УДК 517.925

М.А. Кириченко, Н.А. Рубанов

О ПОСТРОЕНИИ РЕШЕНИЙ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ С ПОЛИЛИНЕЙНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

1. Введение. Рассмотрим автономную нормальную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, векторная запись которой имеет следующий вид:

$$\dot{x} = f(x), \tag{1.1}$$

здесь $x = (x^1, ..., x^n)$ – векторная функция действительного переменного t, а $f = (f^1, ..., f^n)$ – действительная векторная функция, каждый элемент которой f^i является полилинейной формой переменных $x^1, ..., x^n$.

Для получения решений системы (1.1) обычно используют стандартные методы численного анализа, не учитывающие конкретный вид ее правой части. Последнее, очевидно, приводит к тому, что любой из применяемых методов не может считаться оптимальным. Целью настоящей работы является разработка метода построения решений системы (1.1), учитывающего то, что каждый элемент f^i функции f является полилинейной формой переменных $x^1, \ldots, x^n$.

2. Построение решения системы. Для построения локального решения $x(t)$ системы (1.1), удовлетворяющего начальному условию

$$x(0) \equiv x_0 , \tag{2.1}$$

прежде всего, заменим (1.1) интегральным уравнением

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(\tau))d\tau . \tag{2.2}$$

Обозначим через α и q – некоторые положительные числа, а через Γ – компактную часть $(n+1)$-мерного евклидова векторного пространства $\mathbf{R}^{n+1}$, задаваемую неравенствами

$$|x - x_0| \le \alpha, \ |t| \le q .$$

Пусть при этом $r \le q$ – положительное число, которое будет определено ниже. Наряду с Γ введем в рассмотрение более «узкое» компактное множество $\Gamma_r \subset \mathbf{R}^{n+1}$, задаваемое неравенствами

$$|x - x_0| \le \alpha, \ |t| \le r . \tag{2.3}$$

Далее обозначим через Π_r – множество непрерывных функций, графики которых содержатся в Γ_r. Рассмотрим оператор

$$A\varphi_1 = x_0 + \int_0^t f(\varphi(\tau))d\tau . \tag{2.4}$$

Поскольку множество

$$\sum = \{x \in \mathbf{R}^n : |x - x_0| \le \alpha\} \tag{2.5}$$

компактно, найдется такое положительное число M, что для всех $x \in \sum$ выполнено неравенство

$$f(x)| \le M . \tag{2.6}$$

Тогда из условия

$$r \le \frac{\alpha}{M} \tag{2.7}$$

будет следовать, что оператор (2.4) является оператором, отображающим множество Π_r в себя. Поэтому предположим, что число r в (2.3) выбрано так, что выполнено неравенство (2.7). Заметим теперь, что система (1.1) имеет единственное решение $x(t)$ с начальным условием (2.1), определенное на некотором отрезке $[-T,\ T]$. Поэтому уравнение (2.2) также имеет единственное решение $x(t)$, определенное на отрезке $[-T,\ T]$. Для отыскания этого решения будем использовать метод последовательных приближений Пикара и запишем

$$x_{N+1}(t) = x_0 + \int_0^t f\left(x_N(\tau)\right)d\tau . \tag{2.8}$$

Действуя как обычно, положим

$$x_1(t) \equiv x_0 . \tag{2.9}$$

Тогда несложно заметить, что существует некоторая итерация

$$A_p\varphi = \underbrace{A...A}_{p}\varphi$$

оператора A, являющаяся сжатием. Следовательно, метод последовательных приближений (2.8), удовлетворяющий условию (2.9), на отрезке $[-r,\ r]$ равномерно сходится к решению $x(t)$. Остается построить последнее. Чтобы найти $x(t)$, прежде всего, заметим, что в силу (2.8) и (2.9) для всех значений $t \in [-r,\ r]$ справедливо равенство

$$x_2(t) = x_0 + \int_0^t f(x_0)d\tau = x_0 + f(x_0)t. \tag{2.10}$$

Теперь, подставляя (2.10) в (2.8), при $N = 2$ и $t \in [-r,\ r]$ можем записать

$$x_3(t) = x_0 + \int_0^t f\left(x_0 + f(x_0)\tau\right)d\tau = x_0 + \sum_{k=1}^{\theta_2} \xi_{2,k}(x_0)t^k ,$$

где θ_2 – некоторое натуральное число, зависящее от вида формы $f(x_0)$, а $\xi_{2,k}$ – соответствующие действительные векторные функции, определенные и непрерывные в точке x_0; при этом, поскольку f – полилинейная форма

$$\sum_{k=1}^{\theta_2} \xi_{2,k}(x_0)\, t^k = \int_0^t f\left(x_0 + f(x_0)\tau\right) d\tau .$$

Если принять

$$\sum_{k=1}^{\theta_N} \xi_{N,k}(x_0)\, t^k = \int_0^t f(x_N(\tau))\, d\tau, \qquad (2.11)$$

то несложно заметить, что в общем случае при $t \in [-r,\ r]$ справедливо равенство

$$x_{N+1}(t) = x_0 + \sum_{k=1}^{\theta_N} \xi_{N,k}(x_0)\, t^k, \qquad (2.12)$$

в котором θ_N – некоторое натуральное число, как и θ_2 зависящее лишь от вида формы $f(x_0)$, а $\xi_{N,k}$ – соответствующие действительные векторные функции, определенные и непрерывные в точке x_0.

Как уже отмечалось, в силу условия (2.7) метод последовательных приближений (2.8) сходится к решению $x(t)$ уравнения (2.2) равномерно на отрезке $[-r,\ r]$. Поэтому, переходя в равенстве (2.8) к пределу при $N \to \infty$, с учетом (2.12) получим представление

$$x(t) = x_0 + \xi(x_0,\ t), \qquad (2.13)$$

справедливое для всех значений $t \in [-r,\ r]$, где при фиксированном $x(0)$ функция

$$\xi(x_0, t) = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=1}^{\theta_N} \xi_{N,k}(x_0) t^k \qquad (2.14)$$

определена и непрерывна на отрезке $[-r,\ r]$, причем сходимость в равенстве (2.14) равномерна на $[-r,\ r]$. Но выбор начального условия (2.1) выше по существу не играл никакой роли. Поэтому, как легко видеть, справедлива следующая

Теорема 1. Предположим, что число $\alpha > 0$ задано и для соответствующего ему числа $M > 0$ на множестве Σ выполнено неравенство (2.6). Тогда для каждой точки $x_0 \in \Sigma$ существует такое положительное число

$$T = \frac{\alpha}{M}, \qquad (2.15)$$

что на каждом из отрезков $[r_1,\ r_2] \subset [-T, T]$ решение $x(t)$ системы (1.1) с начальным условием (2.1) может быть получено равномерно сходящимся методом последовательных приближений (2.8). При этом на отрезке $[-T,\ T]$ решение $x(t)$ удовлетворяет равенству (2.13).