УДК 517.9

В.А. Яковлев[*]

МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ СУММЫ РЯДА

При решении задач вычислительной математики и реализации вычислительных алгоритмов часто возникает необходимость нахождения суммы числового ряда. В работе предложен метод вычисления суммы ряда, который позволяет повысить производительность вычислительных алгоритмов.

Рассмотрим функции $f(x)$ и $S(x)$, удовлетворяющие условиям:

1) функции непрерывно дифференцируемы на интервале $(a; +\infty)$, где $a \in R_{-}$;

2) функции удовлетворяют равенству $f(x) = S(x) - S(x-1)$ для $\forall x \in \left(D(f) \cap D(S)\right)$.

Для них справедливы равенства [2]:

$$S(n) = \sum_{i=0}^{n} f(i)$$

$$S'(n) = \sum_{i=1}^{n} f'(i) + S'(0), \tag{1}$$

где $n \in N$.

Пусть ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} f'(i)$ сходится, тогда из формулы (1) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} S'(n) = \text{const}$. Согласно интегральному признаку Коши $\int\limits_{0}^{\infty} f'(x)dx$ и ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} f'(i)$ одновременно сходятся или расходятся. Поэтому из сходимости ряда $\sum\limits_{i=0}^{\infty} f'(i)$ следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \text{const}$.

Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} S'(n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(n)$. По теореме Лагранжа

$$S(n) - S(n-1) = S'(n-1+\theta),$$

где $0 \le \theta \le 1$.

---

[*] Работа выполнена под руководством канд. техн. наук, доц. ГОУ ВПО ТГТУ В.А. Попова.

С учётом условия (2) имеем равенство $f(n) = S'(n-1+\theta)$.

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} S'(n-1+\theta) = \left| m = n-1+\theta \right| = \lim_{m\to\infty} S'(m).$$

Тогда из формулы (1) следует:

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \sum_{i=1}^{n} f'(i) + S'(0)$$

или

$$\sum_{i=0}^{\infty} f'(i) = \lim_{n\to\infty} f(n) - S'(0) + f'(0). \qquad (2)$$

Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то формулу (2) можно записать в виде

$$\sum_{i=0}^{\infty} f(i) = \lim_{n\to\infty} F(n) - S'(0) + f(0). \qquad (3)$$

Получим формулу для нахождения $S'(0)$ при заданном значении n, интерполируя функцию $S(n) = \sum_{i=0}^{n} F(i)$ в узлах $\left(i, \sum_{j=0}^{i} F(j) \right)$, где $i = 0, ..., n$, многочленом Лагранжа [1]:

$$S(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-j}{i-j} \sum_{j=0}^{i} F(j) \right) + R_n(x),$$

где $R_n = S^{(n+1)}(\xi) \dfrac{\prod_{i=0}^{n}(x-i)}{(n+1)!}$, $\xi \in [0; n]$.

Её производная будет равна

$$S'(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{i} F(j) \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \left(\frac{1}{i-j} \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j \\ k\neq i}}^{n} \frac{x-k}{i-k} \right) \right) + R_n'(x).$$

При $x = 0$ имеем

$$S'(0) = -F(0) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} + \sum_{i=1}^{n} \left((-1)^{i-1} \frac{1}{i} \frac{(n-i+1)\cdot \ldots \cdot n}{1 \cdot \ldots \cdot i} \sum_{j=0}^{i} F(j) \right) + R_n'(0). \qquad (4)$$

Подставляя (4) в (3), окончательно получаем

$$\sum_{i=0}^{\infty} f(i) = \lim_{n\to\infty} F(n) + F(0)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left((-1)^i \frac{1}{i}\cdot\frac{(n-i+1)\cdot\ldots\cdot n}{1\cdot\ldots\cdot i}\sum_{j=0}^{i}F(j)\right) + f(0) - R_n'(0),$$

где $R_n'(0) = \dfrac{(-1)^n S^{(n+1)}(\xi)}{n+1}$.

Предложенный метод нахождения суммы ряда для определённого класса функций, их порождающих, позволяет повысить производительность вычислительных алгоритмов суммирования рядов за счёт снижения количества итераций. Исследования проводились на рядах с известными суммами. Например, в табл. 1 указано число итераций для предложенного метода и метода простого суммирования при вычислении суммы ряда $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(1+i)^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Таблица 1

Число итераций		Абсолютная погрешность
Предложенный метод	Метод простого суммирования	
5	67	0,1
10	235	0,01
25	1200	0,001

Полученные результаты показывают, что количество итераций в предложенном методе значительно меньше, чем в методе простого суммирования, а, следовательно, его использование повышает скорость работы вычислительных алгоритмов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петров, И.Б. Лекции по вычислительной математике : учебное пособие / И.Б. Петров, А.И. Лобанов. – М. : Интернет-Университет Информационных Технологий ; БИНОМ ; Лаборатория знаний, 2006. – 523 с.

2. Яковлев, В.А. Метод суммирования конечных сумм / В.А. Яковлев // Проблемы ноосферной безопасности и устойчивого

развития : сборник научных статей молодых учёных и студентов. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2010. – Вып. 1. – С. 25 – 29.

Кафедра «Высшая математика» ГОУ ВПО ТГТУ