УДК 681.5.015.24

А.Н. Грибков, И.А. Куркин, И.С. Базылюк, Е.Ю. Кривошеина

АЛГОРИТМ АНАЛИЗА ОБЛАСТИ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ МНОГОМЕРНЫМ ОБЪЕКТОМ

Проектирование систем управления играет важную роль в современных технологических системах. Выгоды от совершенствования систем управления могут быть огромны. Они включают улучшение качества изделия, уменьшение потребления энергии, минимизацию материальных затрат, повышение уровней безопасности и сокращение загрязнения окружающей среды [1]. Одним из важнейших этапов разработки системы управления промышленным объектом является решение задачи анализа и синтеза оптимального управления. При этом следует учитывать, что многие технологические установки представляют собой многомерные объекты (MIMO – Multiple Input Multiple

Output), а при решении задач анализа и синтеза оптимального управления MIMO-объектами возникают трудности, связанные с их многомерностью и сложностью математического аппарата.

Исследование вопросов, связанных с существованием решения задачи оптимального управления (ЗОУ), является одним из основных этапов анализа оптимального управления. Несмотря на то, что вопросам решения задач анализа и синтеза оптимального управления посвящено множество работ авторов Л.С. Понтрягина, Р. Беллмана, А.А. Красовского, А.Д. Александрова, Ю.Л. Муромцева и др., применительно к многомерным объектам данные вопросы изучены пока недостаточно. В статье предложен алгоритм, позволяющий по заданным исходным данным провести анализ области существования решения задачи оптимального управления многомерным объектом и получить аналитические выражения для оперативного вычисления условий существования решения ЗОУ.

Математическую постановку задачи оптимального управления многомерным объектом можно сформулировать следующим образом.

Пусть для MIMO-объекта, динамика которого описывается моделью

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t), \tag{1}$$

решается ЗОУ, заключающаяся в переводе объекта на заданном интервале времени $[t_0; t_к]$ из начального состояния в конечное, т.е.

$$z(t_0) = z_0 \to \; z(t_к) = z_к, \tag{2}$$

при ограничениях на управляющие воздействия в каждый момент времени

$$\forall t \in [t_0;\; t_к] : u(t) \in [u_н;\; u_в] \tag{3}$$

и минимуме функционала

$$J = \int_{t_0}^{t_к} f\big(u(t),\, z(t),\, t\big)dt \xrightarrow{\quad} \min. \tag{4}$$

Массив исходных данных, необходимый для численного решения задачи (1) – (4), имеет вид

$$R = \big(A,\, B,\, u_н,\, u_в,\, z_0,\, z_к,\, t_0,\, t_к\big). \tag{5}$$

В данной задаче A, B – матрицы параметров модели динамики объекта размерности $n \times n$ и $n \times m$ соответственно; $z(t)$ – вектор фазовых координат размерности n; $u(t)$ – вектор управляющих воздействий размерности m; $z_0,\, z_к$ – векторы начальных и конечных значений фазовых координат размерности n; $u_н, u_в$ – векторы нижних и верхних граничных значений управляющих воздействий размерности m; J – минимизируемый функционал.

Для анализа области существования решения ЗОУ (1) – (4) предлагается алгоритм на основе метода синтезирующих переменных [2], включающий следующие этапы:

1. Нормирование исходной задачи. В нормированной ЗОУ временной интервал и область допустимых значений $u(t)$ постоянны:

$$t \in [t_0; t_к] \longrightarrow T \in [0; 2], \quad u(t) \in [u_н;\ u_в] \longrightarrow U(T) \in [-1; 1].$$

2. Решение нормированной задачи

$$Z(T) = e^{A'T} Z(0) + B' \int_0^T e^{A'(T-s)} U(s) ds\,,$$

где A', B' – матрицы параметров нормированной задачи.

3. Введение вектора синтезирующих переменных Λ. Аналитические зависимости для расчета элементов вектора Λ выводятся на основе решения нормированной задачи, полученного на предыдущем этапе:

$$\Lambda = (L_1, L_2, \ldots, L_n), \;\; L_i = f_i^1(R) = f_i^2(U(T),\ R), i = \overline{1, n}\,.$$

4. Построение в n-мерном евклидовом пространстве синтезирующих переменных 2^m гиперповерхностей, ограничивающих область существования решения ЗОУ:

$$L_i^{\text{гр}} = f_i^2(U_j^{\text{гр}}(T),\ R), i = \overline{1,\ n}, \quad j = \overline{1,\ m}\,,$$

где $U_j^{\text{гр}}(T) = \begin{cases} -1, T < T_{nj}; \\ 1, T \geq T_{nj} \end{cases}$ или $U_j^{\text{гр}}(T) = \begin{cases} 1, T < T_{nj}; \\ -1, T \geq T_{nj}; \end{cases}$ T_{nj} – времена переключения j-го элемента вектора управляющих воздействий.

5. Рассечение n-мерных гиперповерхностей, ограничивающих область существования решения ЗОУ, n-мерной гиперплоскостью с фиксированием одного значения $L_i(R)$. Определение аналитической зависимости $m-k$ времен переключения, где k – номер шага, $k = \overline{1, n}$.

6. Пункт 5 применить $m-1$ раз относительно сечения, полученного на предыдущем шаге, с последовательным декрементом размерности гиперповерхности и гиперплоскости и, соответственно, инкрементом k. При этом сечения берутся по различным, неповторяющимся компонентам вектора Λ.

7. Получение аналитических зависимостей времен переключения $T_{nj}(R)$ и определение вида функций $L_i^{\text{н}}(T_{nj})$ и $L_i^{\text{в}}(T_{nj})$ для различных комбинаций выполнения условий $T_{nj} \in [0;\, 2]$ (зон).

При практическом решении задачи анализа области существования решения ЗОУ рассчитываются $T_{nj}(R)$, определяются зона и виды функций $L_i^{\text{н}}(T_{nj})$ и $L_i^{\text{в}}(T_{nj})$, выполняется проверка двойного неравенства $L_i^{\text{н}}(T_{nj}) \le L_i(R) \le L_i^{\text{в}}(T_{nj})$. Если неравенство выполняется – решение ЗОУ существует. В противном случае решения ЗОУ не существует.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гудвин, Г.К. Проектирование систем управления / Г.К. Гудвин, С.Ф. Гребе, М.Э. Сальгадо. – М. : БИНОМ; Лаборатория знаний, 2010. – 911 с.

2. Муромцев, Ю.Л. Метод синтезирующих переменных при оптимальном управлении линейными объектами / Ю.Л. Муромцев, Л.Н. Ляпин, Е.В. Сатина // Приборостроение. Изв. вузов. – 1993. – № 11–12. – С. 19 – 25.

Кафедра «Конструирование радиоэлектронных и микропроцессорных систем» ГОУ ВПО ТГТУ