УДК 512.13

*А. А. Островская**

МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ВВЕДЕНИЯ ПОНЯТИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

В настоящем сообщении интегрированы сведения о периодических (элементарных и неэлементарных) функциях, выстроены основные компоненты соответствующих понятий и фактов.

Проблемное поле исследования ([1, 2]):

1. Оптимальное определение периодической функции.
2. Конструкция определения непериодической функции.
3. Соизмеримость периодов.
4. Периодичность и существование наименьшего (положительного) периода.

Последовательно изучим данные проблемы.

1. Какое из определений периодической функции, существующих в литературе, предпочтительнее?

Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется периодической, если существует такое число $T \neq 0$, что:

1) для любого $x \in D(f)$ числа $x+T \in D(f)$ и $x-T \in D(f)$;

2) для всех $x \in D(f)$ верно $f(x-T) = f(x) = f(x+T)$.

Наименьший из положительных периодов (если он существует) функции называется основным (главным) периодом функции.

Определения 2 и 3 отличаются от определения 1 условием 2): здесь $f(x+T) = f(x)$ либо $f(x) = f(x-T)$. Указанные три определения равносильны. С точки зрения минимальности требований предпочтительнее определения 2 или 3; однако в учебной практике нам представляется предпочтительнее первое, как наиболее информативное.

Заметим, что в приведенных определениях явно указан период функции. В литературе имеется также определение 4, в котором

---

* Работа выполнена под руководством канд. физ.-мат. наук, доц. ФГБОУ ВО «ТГТУ» А. Д. Нахмана.

условие 2) имеет вид $f(x+T)=f(x-T)$. Здесь можно лишь утверждать, что периодом будет число $2T$ (число $T\neq 0$ возможно не будет периодом функции). В таком определении, с нашей точки зрения, утрачена наиболее важная информация.

2. Определение непериодической функции строится как отрицание определения периодической функции.

Рассмотрим следующие предикаты, в которых T – произвольное ненулевое число:

$$B(x,\,T)\equiv\left\{\textit{точка } x+T \textit{ принадлежит множеству } D_f\right\},$$
$$C(x,\,T)\equiv\left\{\textit{точка } x-T \textit{ принадлежит множеству } D_f\right\},$$
$$D(x,\,T)\equiv\{f(x+T)=f(x)\}.$$

Согласно определению функция $y=f(x)$ называется периодической, если существует такое ненулевое число T, что для любого $x\in D_f$ справедливы высказывания $B(x,\,T)$, $C(x,\,T)$, $D(x,\,T)$. Другими словами, высказывание

$$P\equiv\{\textit{функция } y=f(x) \textit{ является периодической}\}$$

может быть записано в следующем виде:

$$P\equiv(\exists T\neq 0)(\forall x\in D_f)(B(x,\,T)\wedge C(x,\,T)\wedge D(x,\,T)).$$

Отрицание $\overline{P}$ данного высказывания имеет вид

$$\overline{P}\equiv\overline{(\exists T\neq 0)(\forall x\in D_f)(B(x,\,T)\wedge C(x,\,T)\wedge D(x,\,T))}\equiv$$
$$\equiv(\forall T\neq 0)(\exists x\in D_f)\left(\overline{B(x,\,T)}\vee\overline{C(x,\,T)}\vee\overline{D(x,\,T)}\right).$$

Теперь, для того чтобы убедиться, что функция $y=f(x)$ не является периодической, достаточно установить следующее: для любого $T\neq 0$ найдется такое $x\in D_f$, что не будет выполняться хотя бы одно из указанных выше условий $B(x,\,T)$, $C(x,\,T)$, $D(x,\,T)$.

3. Рассмотрим проблему «соизмеримости» периодов.

Период T_1 функции $y=f(x)$ и период T_2 функции $y=g(x)$ называются соизмеримыми, если их отношение есть рациональное число.

Утверждение 3.1. Если $D_f \cap D_g \neq \varnothing$ и периоды функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ соизмеримы, то $f(x) + g(x)$ и $f(x)g(x)$ – периодические с периодом T, являющимся общим кратным T_1 и T_2.

Утверждение 3.2. Если непрерывная функция $y = f(x)$ имеет два несоизмеримых периода T_1 и T_2 (т.е. T_1 / T_2 – иррациональное число), то $y = f(x) = \text{const}$.

Утверждение 3.3. Общим периодом периодических функций $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, …, $y = f_k(x)$, имеющих периоды $T_j = (n_j / m_j)t$, где $n_i \in Z \setminus \{0\}$, $m_i \in N$, $i = 1, 2, ..., k$, $t \in R \setminus \{0\}$, является число $T = t \cdot \text{НОК}(n_1, n_2, ..., n_k) / \text{НОД}(m_1, m_2, ..., m_k)$.

Утверждение 3.4. Пусть $T_1, T_2, ..., T_n$ – основные периоды непрерывных периодических функций $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ $(n \geq 2)$ соответственно, причем отношения $T_i \ / T_j$ $(i \neq j)$ иррациональные (т.е. T_i и T_j несоизмеримые) при любых i и j. Тогда функция $f_1(x) + f_2(x) + \text{K} + f_n(x)$ не является периодической.

4. Периодичность и существование наименьшего (положительного) периода.

Как оказывается, периодичность данной функции еще не означает существования у нее наименьшего положительного периода. Так, например, функция Дирихле, определяемая в виде

$$D(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x - \text{рациональное число;} \\ 0, \text{ если } x - \text{иррациональное число,} \end{cases}$$

имеет, как легко заметить, периодом любое рациональное число, однако наименьшего положительного периода у нее не существует.

Утверждение 4.1. Если периодическая функция $f(x)$ $(x \in R)$ не имеет наименьшего положительного периода, то для любого $\varepsilon > 0$ существует положительный период меньше ε.

Обоснуем данный тезис. Пусть T_1 – некоторый положительный период функции $f(x)$. Из условия леммы следует, что существует положительный период $T_2 < T_1$. Аналогично существует положительный период $T_3 < T_2$ и т.д.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Отрезок $[0; T_1]$ разделим на n равных частей так, чтобы $\frac{T_1}{n} < \varepsilon$. Рассмотрим числа $T_1 > T_2 > ... > T_n > T_{n+1}$. Очевидно, что существуют T_i и T_j (не уменьшая общности, можно предположить, что $i < j$), принадлежащие одной и той же части отрезка $[0; T_1]$. Рассмотрим $T = T_i - T_j > 0 \ (i < j)$, $T = T_i - T_j \leq \frac{T_1}{n} < \varepsilon$. С другой стороны, число T является периодом функции $f(x)$ и, поскольку $T < \varepsilon$, то утверждение доказано.

Определение. Говорят, что множество $X \in R$ всюду плотно в R, если любой интервал $(\alpha; \beta)$ содержит число из множества X.

Утверждение 4.2. Если периодическая функция $f(x)$ не имеет наименьшего положительного периода, то множество периодов функции $f(x)$ всюду плотно в R.

Обоснуем данное утверждение. Пусть $(\alpha; \beta)$ – некоторый интервал. Покажем, что существует период функции $f(x)$, принадлежащий этому интервалу. Согласно утверждению 4.1 существует период T_0 такой, что

$$0 < T_0 < \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

Рассмотрим числа …, $-3T_0$, $-2T_0$, $-T_0$, T_0, $2T_0$, $3T_0$, … . Разность соседних чисел этой последовательности не больше $2T_0 < \beta - \alpha$, следовательно, одно из этих чисел принадлежит интервалу $(\alpha; \beta)$.

С другой стороны, любое число этой последовательности – период функции $f(x)$. Утверждение доказано.

Примером функции, множество периодов которой всюду плотно в R, является вышевведенная функция Дирихле.

Следствие 4.1. Множество периодов функции $f(x)$ или всюду плотно в R, или состоит из чисел вида nT_0 $(n \in Z,\ n \neq 0)$, где T_0 – наименьший положительный период функции $f(x)$.

Следствие 4.2. Если непрерывная периодическая функция $f(x)$ не имеет наименьшего положительного периода, то она постоянна.

Доказательство. Обозначим через T_f множество периодов функции $f(x)$. Пусть x_1 и x_2 произвольные точки. Из непрерывности функции $f(x)$ следует, что для любого ε > 0 существует δ > 0 такое, что при $x \in (x_2 - \delta;\ x_2 + \delta)$ имеет место неравенство $|f(x) - f(x_2)| < \varepsilon$.

По лемме 2 существует $T \in T_f$ такое, что $T \in (x_2 - \delta - x_1;\ x_2 + \delta - x_1)$ или $x_1 + T \in (x_2 - \delta;\ x_2)$, следовательно, $|f(x_1 + T) - f(x_2)| = |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

В силу произвольности ε > 0 имеем $f(x_1) = f(x_2)$, т.е. функция $f(x)$ – постоянная.

Из следствия 4.2 немедленно вытекает следующее следствие.

Следствие 4.3. Отличная от постоянной непрерывная периодическая функция имеет наименьший положительный период.

Список литературы

1. **Нахман, А. Д.** Функции и их свойства : учебно-методическое пособие / А. Д. Нахман. – Тамбов : ТОИПКРО, 2006. – 61 с.
2. **Нахман, А. Д.** Концепция развития математического образования. Уровневая модель : монография / А. Д. Нахман, И. В. Аверина, И. Ю. Иванова. – LAP Lambert Academic Publishing. GmbH, Deutschland, 2015. – 115 с.

Кафедра «Техническая механика
и детали машин» ФГБОУ ВО «ТГТУ»