

# ОСНОВЫ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ



Тамбов  
Издательский центр ФГБОУ ВО «ТГТУ»  
2024

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

**Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Тамбовский государственный технический университет»**

# **ОСНОВЫ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ**

*Учебное электронное издание*

Методические указания для бакалавров направления подготовки  
23.03.03 «Эксплуатация транспортно-технологических машин  
и комплексов» и специалистов по направлению  
23.05.01 «Наземные транспортно-технологические средства»



---

Тамбов  
Издательский центр ФГБОУ ВО «ТГТУ»  
2024

УДК 519.86(075.8)  
ББК 22.183.5я73  
О39

Рекомендовано Методическим советом университета

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент кафедры «Агроинженерия»  
ФГБОУ ВО «ТГТУ»  
*А. В. Прохоров*

О39      **Основы** научных исследований [Электронный ресурс] : методические указания / сост. : Ю. Е. Глазков, Н. В. Хольшев. – Тамбов : Издательский центр ФГБОУ ВО «ТГТУ», 2024. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Системные требования : ПК не ниже класса Pentium II ; CD-ROM-дисковод ; 1,7 Mb ; RAM ; Windows 95/98/XP ; мышь. – Загл. с экрана.

Методы планирования эксперимента применяются для построения интерполяционных моделей и оптимизации процессов. Рассмотрена методика построения планов и обработки результатов многофакторного эксперимента. Алгоритмы построения планов эксперимента применимы к большинству оптимизационных задач как проектно-расчетных, так и экспериментальных.

Предназначены для бакалавров направления подготовки 23.03.03 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов» и специалистов по направлению 23.05.01 «Наземные транспортно-технологические средства». Могут быть полезны аспирантам и научным сотрудникам, занимающимся планированием экспериментальных исследований сложных многофакторных систем.

УДК 519.86(075.8)  
ББК 22.183.5я73

*Все права на размножение и распространение в любой форме остаются за разработчиком.  
Нелегальное копирование и использование данного продукта запрещено.*

© Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тамбовский государственный технический университет» (ФГБОУ ВО «ТГТУ»), 2024

## ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА. ПОНЯТИЕ МНОГОФАКТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Цель планирования эксперимента – получить большее количество информации при меньших затратах. Часто экспериментаторы стремятся лишь к тому, чтобы собранные данные подогнать под какую-либо компактную формулировку. Например, требуется проверить однородность выборки путем сравнения дисперсий или получить уравнение регрессии. При этом остается нераскрытым вопрос, каким образом были собраны данные.

Многофакторный эксперимент состоит основных трех этапов с рядом подэтапов (рис. 1).

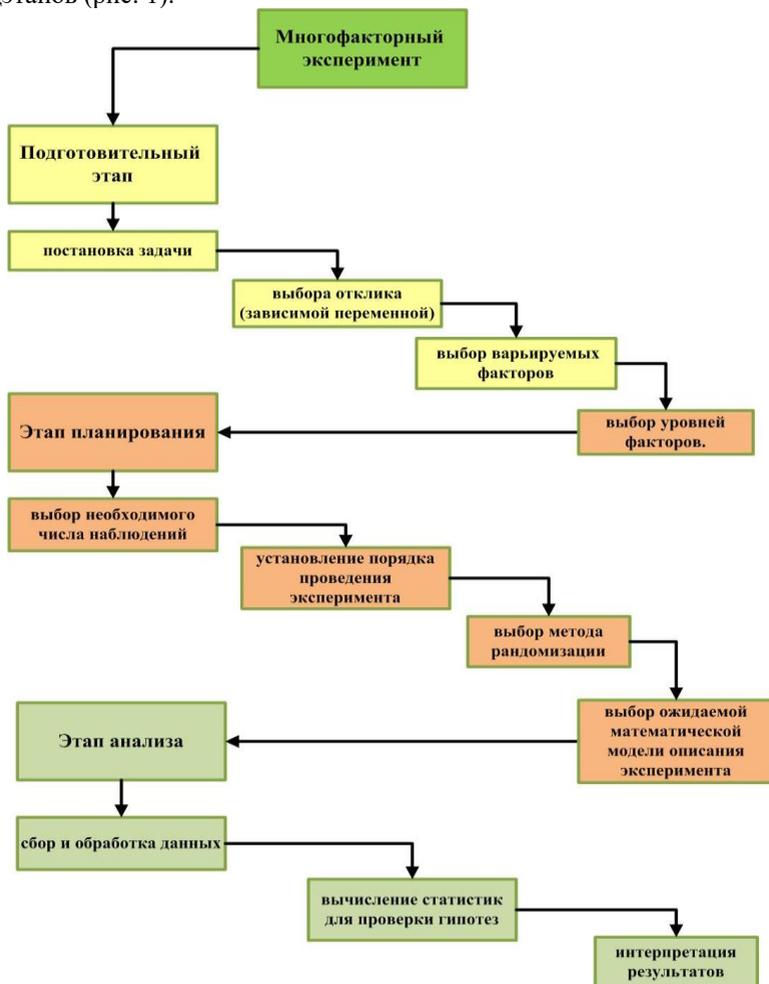


Рис. 1. Общий алгоритм использования многофакторного эксперимента

Необходимость применения многофакторных экспериментов вызвана тем, что при исследовании сложных многопараметрических процессов на интересующий выходной параметр воздействует множество факторов, причем часто большее значение оказывает не какой-либо конкретный фактор, а сочетание воздействия нескольких факторов, что в таком случае исключает возможность серии более простых и менее трудоемких однофакторных экспериментов, так как полученные уравнения аппроксимации будут неудовлетворительно описывать реальный процесс. Многофакторный эксперимент является мощным инструментом по установлению многопараметрических зависимостей, описывающих некоторый процесс, но проведение таких экспериментов при большом числе факторов является трудоемким, не менее сложной является и обработка результатов исследования, поэтому при применении таких экспериментов необходимо стремиться максимально уменьшить число входных параметров на основании предварительного анализа процесса и существующих исследований или серий поисковых однофакторных экспериментов. Для упрощения обработки результатов экспериментов следует использовать существующие математические пакеты (STATISTICA, Mathcad, MATLAB, Microsoft Excel и др.), позволяющие также оперативно проводить построение поверхностей отклика, а также, при необходимости, разрабатывать собственное программное обеспечение, учитывающее специфику проведения эксперимента в конкретных условиях.

В общем случае выбор основного уровня выполняется в соответствии с блок-схемой, приведенной на рис. 2.

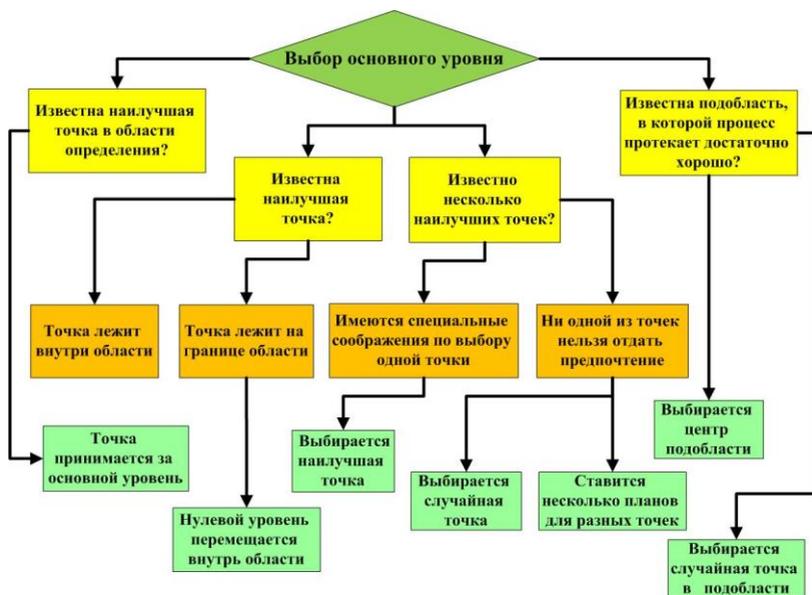
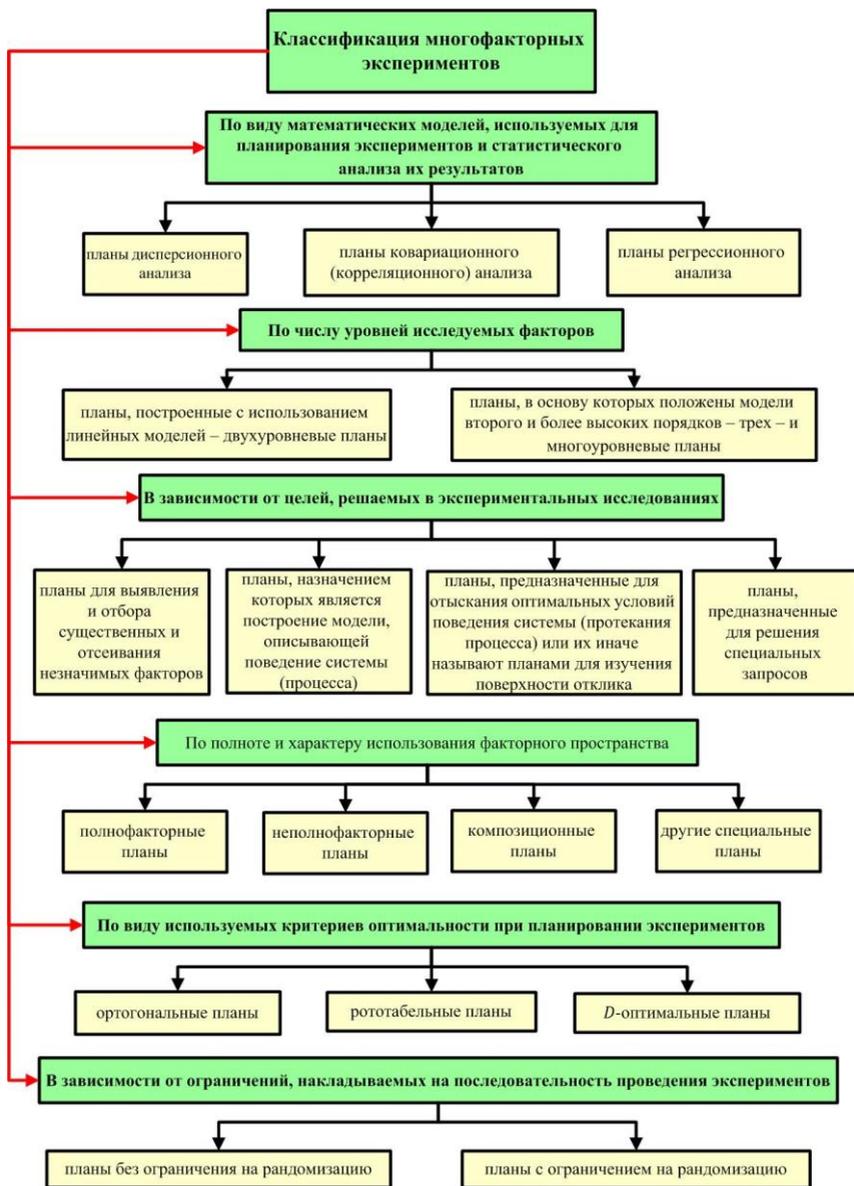


Рис. 2. Блок-схема выбора основного уровня



**Рис. 3. Классификация планов многофакторных экспериментов**

Задача выбора уровней сводится к более простой задаче выбора интервала варьирования. Для упрощения записи условий эксперимента и обработки экспериментальных данных масштабы по осям выбираются так,

чтобы верхний уровень соответствовал +1, нижний –1, а основной – нулю. Для факторов с непрерывной областью определения это всегда можно сделать с помощью преобразования

$$x_j = \frac{\tilde{x}_j - \tilde{x}_{j0}}{I_j},$$

где  $x_j$  – кодированное значение фактора;  $\tilde{x}_j$  – натуральное значение фактора;  $\tilde{x}_{j0}$  – натуральное значение основного уровня;  $I_j$  – интервал варьирования; 0 – номер фактора.

Для качественных факторов, имеющих два уровня, один уровень обозначается +1, а другой –1, порядок уровней не имеет значения.

Размер интервала варьирования составляет некоторую долю от области определения фактора. Можно, например, условиться о следующем: если интервал составляет не более 10% от области определения, то считать его узкими, не более 30% – средним, в остальных случаях – широким.

Существует большое количество классификационных признаков многофакторных экспериментов (рис. 3). Планы можно разделить по шести основным признакам: по виду математических моделей, используемых для планирования экспериментов и статистического анализа их результатов; по числу уровней исследуемых факторов различают; в зависимости от целей, решаемых в экспериментальных исследованиях; в зависимости от полноты и характера использования факторного пространства; по виду используемых критериев оптимальности при планировании экспериментов; в зависимости от ограничений, накладываемых на последовательность проведения экспериментов. Далее, в рамках данного издания, более подробно рассмотрим некомпозиционные планы второго порядка

## НЕКОМПОЗИЦИОННЫЕ ПЛАНЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

### Некомпозиционные планы второго порядка

Во многих случаях целью исследования является получение математического описания изучаемого процесса. Часто из-за сложности процесса или малого объема информации неизвестную зависимость исследуемой величины  $\xi$  от  $k$  независимых факторов представляют полиномом вида

$$\xi = \beta_0 + \sum_{1 \leq i \leq k} \beta_i x_i + \sum_{1 \leq i < l \leq k} \beta_{il} x_i x_l + \sum_{1 \leq i \leq k} \beta_{ii} x_i^2 + \dots \quad (1)$$

В этом случае необходимо определить коэффициенты уравнения и оценить их значимость. По результатам опытов можно определить только выборочные коэффициенты регрессии  $b_0, b_i, b_{il}, b_{ii} \dots$ , которые являются лишь оценками теоретических коэффициентов  $\beta_0, \beta_i, \beta_{il}, \beta_{ii}, \dots$  полинома (1). Уравнение регрессии, полученное по результатам опытов, имеет вид

$$\gamma = b_0 + \sum_{1 \leq i \leq k} b_i x_i + \sum_{1 \leq i < l \leq k} b_{il} x_i x_l + \sum_{1 \leq i \leq k} b_{ii} x_i^2 + \dots \quad (2)$$

где  $\gamma$  – выборочная оценка функции отклика  $\xi$ .

В ситуациях, когда априорная информация о порядке полинома отсутствует, математическую модель исследуемого процесса подбирают, начиная с простейшего линейного уравнения, последовательно увеличивая степень полинома до получения адекватной модели. Процесс получения математической модели в указанных ситуациях осуществляется следующим образом. Вначале реализуется полный факторный эксперимент  $2^k$  или эксперимент, представленный дробной репликой  $2^{k-p}$ , где  $p$  – число эффектов взаимодействия, замененных новыми переменными. По результатам опытов, выполненных согласно этим планам, находят коэффициенты линейного уравнения регрессии. Если это уравнение окажется неадекватным, то находят коэффициенты регрессии при эффектах взаимодействия факторов. Если уравнение регрессии с учетом взаимодействий факторов окажется также неадекватным, то выполненные ранее опыты дополняют опытами в «звездных» точках с плечом  $a$  и опытами в центре плана, число которых равно  $n_0$ . Число опытов в «звездных» точках равно  $2k$ . По результатам опытов, выполненных согласно плану  $2^k$  или  $2^{k-p}$  и дополнительным опытам в «звездных» точках и в центре плана, оценивают коэффициенты полинома второго порядка. Следует отметить, что исследуемый процесс часто удается описать полиномом второго порядка. В случае неадекватности полинома второго порядка переходят к планированию третьего порядка и описывают исследуемый процесс полиномом третьей степени.

При исследовании процессов и систем с двумя факторами рациональным является план типа правильного шестиугольника (рис. 4) с числом центральных точек  $n_0 \geq 1$ . На рисунке указаны номера опытов, а в скобках – уровни факторов в этих опытах. Обычно  $n_0$  принимают равным 4. В этом случае рассматриваемый план предусматривает проведение 10 опытов, из которых шесть выполняются при уровнях факторов, указанных в вершинах шестиугольника, и четыре опыта – при уровнях факторов, соответствующих центру плана. Этот план является ротатабельным и по числу опытов более экономичным, чем соответствующий ротатабельный план второго порядка, требующий для своей реализации постановки 13 опытов: полный факторный эксперимент типа  $2^2$  содержит 4 опыта, в «звездных» точках необходимо провести  $2k = 2 \cdot 2 = 4$  опыта и 5 опытов в центре плана.

Другое достоинство описываемого плана состоит в том, что для фактора  $x_1$  он требует использования пяти уровней (+1; +0,5; 0; -0,5; -1), а для фактора  $x_2$  – всего трех уровней (+0,866; 0; -0,866). Центральный композиционный ротатабельный план второго порядка предусматривает использование обоих факторов на пяти уровнях (+1,414; +1; 0; -1; -1,414).

Матрица плана, изображенного на рис. 4, представлена в табл. 1. По результатам опытов, выполненных согласно этому плану, можно определить коэффициенты уравнения:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2. \quad (3)$$

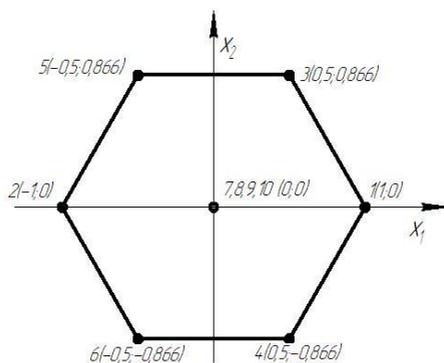


Рис. 4. Некомпозиционный ротatableльный план второго порядка  $k = 2$

### 1. Матрица планирования

Номер опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_1 x_2$	$x_1^2$	$x_2^2$	$y$
1	+1	+1	0	0	+1	0	$y_1$
2	+1	-1	0	0	+1	0	$y_2$
3	+1	+0,5	+0,866	+0,433	+0,25	+0,75	$y_3$
4	+1	+0,5	-0,866	-0,433	+0,25	+0,75	$y_4$
5	+1	-0,5	+0,866	-0,433	+0,25	+0,75	$y_5$
6	+1	-0,5	-0,866	+0,433	+0,25	+0,75	$y_6$
7	+1	0	0	0	0	0	$y_7$
8	+1	0	0	0	0	0	$y_8$
9	+1	0	0	0	0	0	$y_9$
10	+1	0	0	0	0	0	$y_{10}$

Эти коэффициенты находят по приведенным формулам:

$$b_0 = \frac{1}{4} \sum_{u=1}^4 y_{0u} ;$$

$$b_1 = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{10} x_{1j} y_j ;$$

$$b_2 = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{10} x_{2j} y_j ;$$

$$b_{12} = \frac{4}{3} \sum_{j=1}^{10} x_{1j} x_{2j} y_j ;$$

$$b_{11} = \frac{3}{4} \sum_{j=1}^{10} x_{1j}^2 y_j + \frac{1}{12} \sum_{j=1}^{10} x_{2j}^2 y_j - \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{10} y_j ;$$

$$b_{22} = \frac{3}{4} \sum_{j=1}^{10} x_{2j}^2 y_j + \frac{1}{12} \sum_{j=1}^{10} x_{1j}^2 y_j - \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{10} y_j ,$$

где  $y_{0u}$  – значение функции отклика в  $u$ -м опыте в центре плана;  $x_{1j}, x_{2j}$  – кодированные значения факторов в  $j$ -м опыте;  $y_{0j}$  – значение функции отклика в  $j$ -м опыте.

Дисперсию  $s_y^2$  воспроизводимости эксперимента определяют по результатам опытов в центре плана, используя формулу

$$s_y^2 = \frac{\sum_{u=1}^{n_0} (y_{0u} - \bar{y}_0)^2}{n_0 - 1} ,$$

где  $\bar{y}_0$  – среднее арифметическое значение функции отклика, полученное по результатам  $n_0$  опытов в центре плана.

Дисперсии коэффициентов регрессии вычисляются по формулам:

$$s_{b_0}^2 = \frac{1}{4} s_y^2 ;$$

$$s_{b_1}^2 = s_{b_2}^2 = \frac{1}{3} s_y^2 ;$$

$$s_{b_{12}}^2 = \frac{4}{3} s_y^2 ;$$

$$s_{b_{11}}^2 = s_{b_{22}}^2 = \frac{3}{4} s_y^2 .$$

Рассматриваемый план не является полностью ортогональным: коэффициенты  $b_0, b_{11}, b_{22}$  коррелированы. Ковариации, характеризующие статистические связи между коэффициентами  $b_0, b_{11}, b_{22}$  можно вычислить по выражениям:

$$\text{cov}\{b_0, b_{11}\} = \text{cov}\{b_0, b_{22}\} = -\frac{1}{4} s_y^2 ;$$

$$\text{cov}\{b_{11}, b_{22}\} = -\frac{1}{12} s_y^2 .$$

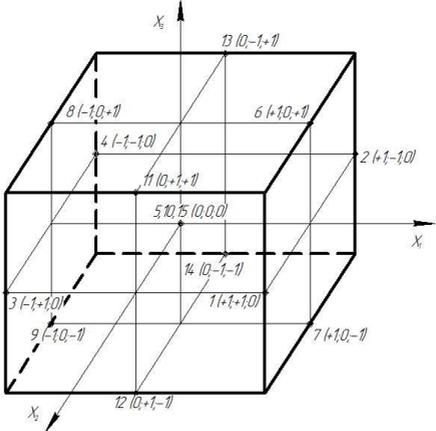
Боксом и Бенкиным для числа факторов от трех до семи рассмотрен ценный в практическом отношении класс некомпозиционных планов второго порядка. Эти планы представляют собой определенные выборки строк

из полного факторного эксперимента типа  $3^k$ . В указанных планах каждая переменная варьируется всего на трех уровнях: +1, 0, -1, в то время как центральные композиционные ротатабельные планы второго порядка предусматривают использование каждого фактора на пяти уровнях. Смена уровней в процессе экспериментирования усложняет эксперимент и увеличивает его стоимость. Использование некомпозиционных планов, предусматривающих всего три уровня варьирования факторов, упрощает и удешевляет проведение эксперимента. Некомпозиционные планы характеризуются наличием в строках матрицы планирования большого числа нулей, в результате чего существенно упрощается вычисление коэффициентов модели. Кроме этого, некомпозиционные планы для 3, 4, 6 и 7 факторов требуют постановки меньшего числа опытов по сравнению с соответствующими ротатабельными центральными композиционными планами второго порядка. Числа опытов, предусмотренные некомпозиционными планами и центральными композиционными ротатабельными планами второго порядка, приведены ниже.

Число факторов	3	4	5	6	7
Некомпозиционный план (выборка из плана типа $3^k$ )	15	27	46	54	62
Центральный композиционный ротатабельный план второго порядка	20	31	32	58	92

Схема некомпозиционного плана второго порядка для трех факторов изображена на рис. 2. Этот план предусматривает проведение 15 опытов.

Номера опытов указаны на схеме. В центре плана, т. е. при нахождении всех факторов на нулевых уровнях ( $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ), предусмотрено проведение трех опытов (рис. 2, опыты 5; 10; 15). Матрица плана, изображенного на рис. 5, представлена в табл. 2.



**Рис. 5. Некомпозиционный план второго порядка для трех факторов (выборка из плана эксперимента  $3^3$ )**

**2. Матрица некомпозиционного плана второго порядка  
для трех факторов (выборка из плана эксперимента типа 3<sup>k</sup>)**

Номер опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1 x_2$	$x_1 x_3$	$x_2 x_3$	$x_1^2$	$x_2^2$	$x_3^2$	$y$
1	+1	+1	+1	0	+1	0	0	+1	+1	0	$y_1$
2	+1	+1	-1	0	-1	0	0	+1	+1	0	$y_2$
3	+1	-1	+1	0	-1	0	0	+1	+1	0	$y_3$
4	+1	-1	-1	0	+1	0	0	+1	+1	0	$y_4$
5	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$y_5$
6	+1	+1	0	+1	0	+1	0	+1	0	+1	$y_6$
7	+1	+1	0	-1	0	-1	0	+1	0	+1	$y_7$
8	+1	-1	0	+1	0	-1	0	+1	0	+1	$y_8$
9	+1	-1	0	-1	0	+1	0	+1	0	+1	$y_9$
10	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$y_{10}$
11	+1	0	+1	+1	0	0	+1	0	+1	+1	$y_{11}$
12	+1	0	+1	-1	0	0	-1	0	+1	+1	$y_{12}$
13	+1	0	-1	+1	0	0	-1	0	+1	+1	$y_{13}$
14	+1	0	-1	-1	0	0	+1	0	+1	+1	$y_{14}$
15	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$y_{15}$

Для четырех факторов матрица планирования приведена в табл. 3, для пяти факторов – в табл. 4, для шести – в табл. 6, для семи – в табл. 7.

**3. Матрица некомпозиционного плана второго порядка  
для четырех факторов (выборка из плана эксперимента 3<sup>4</sup>)**

Номер опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
1	+1	+1	+1	0	0
2	+1	+1	-1	0	0
3	+1	-1	+1	0	0
4	+1	-1	-1	0	0
5	+1	0	0	+1	+1
6	+1	0	0	+1	-1
7	+1	0	0	-1	+1
8	+1	0	0	-1	-1
9	+1	0	0	0	0
10	+1	+1	0	0	+1
11	+1	+1	0	0	-1
12	+1	-1	0	0	+1
13	+1	-1	0	0	-1
14	+1	0	+1	+1	0
15	+1	0	+1	-1	0
16	+1	0	-1	+1	0

Номер опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
17	+1	0	-1	-1	0
18	+1	0	0	0	0
19	+1	+1	0	+1	0
20	+1	+1	0	-1	0
21	+1	-1	0	+1	0
22	+1	-1	0	-1	0
23	+1	0	+1	0	-1
24	+1	0	+1	0	-1
25	+1	0	-1	0	+1
26	+1	0	-1	0	-1
27	+1	0	0	0	0

**4. Матрица некопозиционного плана второго порядка  
для четырех факторов (выборка из плана эксперимента  $3^5$ )**

Номер опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	Номер опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
1	+1	+1	+1	0	0	0	24	+1	0	+1	+1	0	0
2	+1	+1	-1	0	0	0	25	+1	0	+1	-1	0	0
3	+1	-1	+1	0	0	0	26	+1	0	-1	+1	0	0
4	+1	-1	-1	0	0	0	27	+1	0	-1	-1	0	0
5	+1	0	0	+1	0	0	28	+1	+1	0	0	+1	0
6	+1	0	0	+1	+1	0	29	+1	+1	0	0	-1	0
7	+1	0	0	-1	-1	0	30	+1	-1	0	0	+1	0
8	+1	0	0	-1	+1	0	31	+1	-1	0	0	-1	0
9	+1	0	+1	0	-1	+1	32	+1	0	0	+1	-0	+1
10	+1	0	+1	0	0	-1	33	+1	0	0	+1	0	-1
11	+1	0	-1	0	0	+1	34	+1	0	0	-1	0	+1
12	+1	0	-1	0	0	-1	35	+1	0	0	-1	0	-1
13	+1	+1	0	+1	0	0	36	+1	+1	0	0	0	-1
14	+1	+1	0	-1	0	0	37	+1	+1	0	0	0	-1
15	+1	-1	0	+1	0	0	38	+1	-1	0	0	0	+1
16	+1	-1	0	-1	0	0	39	+1	-1	0	0	0	0
17	+1	0	0	0	+1	+1	40	+1	0	+1	0	+1	0
18	+1	0	0	0	+1	-1	41	+1	0	+1	0	-1	0
19	+1	0	0	0	-1	+1	42	+1	0	-1	0	+1	0
20	+1	0	0	0	-1	-1	43	+1	0	-1	0	-1	0
21	+1	0	0	0	0	0	44	+1	0	0	0	0	0
22	+1	0	0	0	0	0	45	+1	0	0	0	0	0
23	+1	0	0	0	0	0	46	+1	0	0	0	0	0

В таблицах в целях сокращения их объема не приведены столбцы парных взаимодействий  $x_i x_l$  и квадратов факторов  $x_i^2$ . Эти столбцы можно легко получить, располагая приведенными ниже таблицами значений факторов.

По результатам опытов, поставленным согласно рассмотренным некомпозиционным планам, можно определить коэффициенты уравнения регрессии

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_k x_k + b_{12} x_1 x_2 + \dots + b_{k-1,k} x_{k-1} x_k + b_{11} x_1^2 + b_{kk} x_k^2. \quad (4)$$

Коэффициенты уравнения (4) могут быть определены с помощью метода наименьших квадратов. Боксом и Бенкиным для определения коэффициентов этого уравнения получены формулы, которые для трех, четырех, пяти и семи факторов имеют вид

$$b_0 = \frac{1}{n_0} \sum_{u=1}^{n_0} y_{0u};$$

$$b_i = A \sum_{j=1}^N x_{ij} y_j;$$

$$b_{il} = D \sum_{j=1}^N x_{ij} x_{lj} y_j;$$

$$b_{ii} = B \sum_{j=1}^N x_{ij}^2 y_j + C \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^N x_{ij}^2 y_j - \frac{1}{\rho \cdot n_0} \sum_{u=1}^{n_0} y_{0u},$$

где  $n_0$  – число опытов в центре плана;  $u$  – номер параллельного опыта в центре плана;  $y_{0u}$  – значение функции отклика в  $u$ -м опыте;  $N$  – число опытов в матрице планирования;  $j$  – номер опыта в матрице планирования;  $i, l$  – номера факторов;  $x_{ij} x_{lj}$  – кодированные значения  $i$ -го и  $l$ -го факторов в  $j$ -м опыте;  $y_j$  – значение функции отклика в  $j$ -м опыте;  $k$  – число факторов;  $A, B, C, D, \rho$  – константы, зависящие от числа факторов.

Для трех, четырех, пяти факторов дисперсии  $s_{b_0}^2, s_{b_i}^2, s_{b_{il}}^2, s_{b_{ii}}^2$  коэффициентов регрессии определяют по формулам:

$$s_{b_0}^2 = \frac{1}{n_0} s_y^2; \quad s_{b_i}^2 = A \cdot s_y^2; \quad s_{b_{il}}^2 = D \cdot s_y^2; \quad s_{b_{ii}}^2 = B \cdot s_y^2,$$

где  $s_y^2$  – дисперсия воспроизводимости эксперимента;  $B_1$  – константа, зависящая от числа факторов.

Значения констант  $A, B, B_1, C, D, \rho$  и  $n_0$  для 3, 4, 5, 7 и приведены в табл. 5.

### 5. Значения констант в формулах для вычисления коэффициентов регрессии и их дисперсий

Число факторов	$A$	$B$	$B_1$	$C$	$D$	$\rho$	$n_0$
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{13}{48}$	$-\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	2	3
4	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{46}$	$-\frac{1}{48}$	$\frac{1}{4}$	2	3
5	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{11}{96}$	$-\frac{1}{96}$	$\frac{1}{4}$	2	6
7	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{54}$	$\frac{1}{144}$	$\frac{1}{8}$	3	6

### 6. Матрица некомпозиционного плана второго порядка для четырех факторов (выборка из плана эксперимента 3<sup>6</sup>)

Номер опыта								Номер опыта							
	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$		$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
1	+1	+1	+1	0	+1	0	0	28	+1	+1	0	0	+1	+1	0
2	+1	+1	+1	0	-1	0	0	29	+1	+1	0	0	+1	-1	0
3	+1	+1	-1	0	+1	0	0	30	+1	+1	0	0	-1	+1	0
4	+1	+1	-1	0	-1	0	0	31	+1	+1	0	0	-1	-1	0
5	+1	-1	+1	0	+1	0	0	32	+1	-1	0	0	+1	+1	0
6	+1	-1	+1	0	-1	0	0	33	+1	-1	0	0	+1	-1	0
7	+1	-1	-1	0	+1	0	0	34	+1	-1	0	0	-1	+1	0
8	+1	-1	-1	0	-1	0	0	35	+1	-1	0	0	-1	-1	0
9	+1	0	+1	+1	0	+1	0	36	+1	0	+1	0	0	+1	+1
10	+1	0	+1	+1	0	-1	0	37	+1	0	+1	0	0	+1	-1
11	+1	0	+1	-1	0	+1	0	38	+1	0	+1	0	0	-1	+1
12	+1	0	+1	-1	0	-1	0	39	+1	0	+1	0	0	-1	-1
13	+1	0	-1	+1	0	+1	0	40	+1	0	-1	0	0	+1	+1
14	+1	0	-1	+1	0	-1	0	41	+1	0	-1	0	0	+1	-1
15	+1	0	-1	-1	0	+1	0	42	+1	0	-1	0	0	-1	+1
16	+1	0	-1	-1	0	-1	0	43	+1	0	-1	0	0	-1	-1
17	+1	0	0	+1	+1	0	+1	44	+1	+1	0	+1	0	0	+1
18	+1	0	0	+1	-1	0	-1	45	+1	+1	0	+1	0	0	-1
19	+1	0	0	+1	+1	0	+1	46	+1	+1	0	-1	0	0	+1
20	+1	0	0	+1	-1	0	-1	47	+1	+1	0	-1	0	0	-1
21	+1	0	0	-1	+1	0	+1	48	+1	-1	0	+1	0	0	+1
22	+1	0	0	-1	-1	0	-1	49	+1	-1	0	+1	0	0	-1
23	+1	0	0	-1	+1	0	+1	50	+1	-1	0	-1	0	0	+1
24	+1	0	0	-1	-1	0	-1	51	+1	-1	0	-1	0	0	-1
25	+1	0	0	0	0	0	0	52	+1	0	0	0	0	0	0
26	+1	0	0	0	0	0	0	53	+1	0	0	0	0	0	0
27	+1	0	0	0	0	0	0	54	+1	0	0	0	0	0	0

**7. Матрица некомпозиционного плана второго порядка  
для четырех факторов (выборка из плана эксперимента 3<sup>7</sup>)**

Номер опыта								Номер опыта									
	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$		$x_7$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
1	+1	0	0	0	+1	+1	+1	0	32	+1	-1	-1	0	-1	0	0	0
2	+1	0	0	0	+1	+1	-1	0	33	+1	0	0	+1	+1	0	0	+1
3	+1	0	0	0	+1	-1	+1	0	34	+1	0	0	+1	+1	0	0	-1
4	+1	0	0	0	+1	-1	-1	0	35	+1	0	0	+1	-1	0	0	+1
5	+1	0	0	0	-1	+1	+1	0	36	+1	0	0	+1	-1	0	0	-1
6	+1	0	0	0	-1	+1	-1	0	37	+1	0	0	-1	+1	0	0	+1
7	+1	0	0	0	-1	-1	+1	0	38	+1	0	0	-1	+1	0	0	-1
8	+1	0	0	0	-1	-1	-1	0	39	+1	0	0	-1	-1	0	0	+1
9	+1	+1	0	0	0	0	+1	+1	40	+1	0	0	-1	-1	0	0	-1
10	+1	+1	0	0	0	0	+1	-1	41	+1	+1	0	+1	0	+1	0	0
11	+1	+1	0	0	0	0	-1	+1	42	+1	+1	0	+1	0	-1	0	0
12	+1	+1	0	0	0	0	-1	-1	43	+1	+1	0	-1	0	+1	0	0
13	+1	-1	0	0	0	0	+1	+1	44	+1	+1	0	-1	0	-1	0	0
14	+1	-1	0	0	0	0	+1	-1	45	+1	-1	0	+1	0	+1	0	0
15	+1	-1	0	0	0	0	-1	+1	46	+1	-1	0	+1	0	-1	0	0
16	+1	-1	0	0	0	0	-1	-1	47	+1	-1	0	-1	0	+1	0	0
17	+1	0	+1	0	0	+1	0	+1	48	+1	-1	0	-1	0	-1	0	0
18	+1	0	+1	0	0	+1	0	-1	49	+1	0	+1	+1	0	0	+1	0
19	+1	0	+1	0	0	-1	0	+1	50	+1	0	+1	+1	0	0	-1	0
20	+1	0	+1	0	0	-1	0	-1	51	+1	0	+1	-1	0	0	+1	0
21	+1	0	-1	0	0	+1	0	+1	52	+1	0	+1	-1	0	0	-1	0
22	+1	0	-1	0	0	+1	0	-1	53	+1	0	-1	+1	0	0	+1	0
23	+1	0	-1	0	0	-1	0	+1	54	+1	0	-1	+1	0	0	-1	0
24	+1	0	-1	0	0	-1	0	-1	55	+1	0	-1	-1	0	0	+1	0
25	+1	+1	+1	0	+1	0	0	0	56	+1	0	-1	-1	0	0	-1	0
26	+1	+1	+1	0	-1	0	0	0	57	+1	0	0	0	0	0	0	0
27	+1	+1	-1	0	+1	0	0	0	58	+1	0	0	0	0	0	0	0
28	+1	+1	-1	0	-1	0	0	0	59	+1	0	0	0	0	0	0	0
29	+1	-1	+1	0	+1	0	0	0	60	+1	0	0	0	0	0	0	0
30	+1	-1	+1	0	-1	0	0	0	61	+1	0	0	0	0	0	0	0
31	+1	-1	-1	0	+1	0	0	0	62	+1	0	0	0	0	0	0	0

При шести факторах формулы для вычисления коэффициентов регрессии и их дисперсии имеют вид

$$b_0 = \frac{1}{6} \sum_{u=1}^6 y_{0u};$$

$$b_i = \frac{1}{24} \sum_{j=1}^{54} x_{ij} y_j;$$

$$b_{il} = \frac{1}{16} \sum_{j=1}^{54} x_{ij} x_{lj} y_j \text{ для } b_{14}, b_{25}, b_{36};$$

$$b_{il} = \frac{1}{8} \sum_{j=1}^{54} x_{ij} x_{lj} y_j \text{ для остальных } b_{il};$$

$$b_{11} = \frac{17}{216} \sum_{j=1}^{54} x_{1j}^2 y_j - \frac{10}{216} \sum_{j=1}^{54} x_{4j}^2 y_j - \\ - \frac{1}{256} \left( \sum_{j=1}^{54} x_{2j}^2 y_j + \sum_{j=1}^{54} x_{3j}^2 y_j + \sum_{j=1}^{54} x_{5j}^2 y_j + \sum_{j=1}^{54} x_{6j}^2 y_j \right) - \frac{1}{18} \sum_{u=1}^6 y_{0u};$$

$$b_{22} = \frac{17}{216} \sum_{j=1}^{54} x_{2j}^2 y_j - \frac{10}{216} \sum_{j=1}^{54} x_{5j}^2 y_j - \\ - \frac{1}{256} \left( \sum_{j=1}^{54} x_{1j}^2 y_j + \sum_{j=1}^{54} x_{3j}^2 y_j + \sum_{j=1}^{54} x_{4j}^2 y_j + \sum_{j=1}^{54} x_{6j}^2 y_j \right) - \frac{1}{18} \sum_{u=1}^6 y_{0u};$$

$$b_{33} = \frac{17}{216} \sum_{j=1}^{54} x_{3j}^2 y_j - \frac{10}{216} \sum_{j=1}^{54} x_{6j}^2 y_j - \\ - \frac{1}{256} \left( \sum_{j=1}^{54} x_{1j}^2 y_j + \sum_{j=1}^{54} x_{2j}^2 y_j + \sum_{j=1}^{54} x_{4j}^2 y_j + \sum_{j=1}^{54} x_{5j}^2 y_j \right) - \frac{1}{18} \sum_{u=1}^6 y_{0u};$$

$$b_{44} = \frac{17}{216} \sum_{j=1}^{54} x_{4j}^2 y_j - \frac{10}{216} \sum_{j=1}^{54} x_{1j}^2 y_j - \\ - \frac{1}{256} \left( \sum_{j=1}^{54} x_{2j}^2 y_j + \sum_{j=1}^{54} x_{3j}^2 y_j + \sum_{j=1}^{54} x_{5j}^2 y_j + \sum_{j=1}^{54} x_{6j}^2 y_j \right) - \frac{1}{18} \sum_{u=1}^6 y_{0u};$$

$$b_{55} = \frac{17}{216} \sum_{j=1}^{54} x_{5j}^2 y_j - \frac{10}{216} \sum_{j=1}^{54} x_{2j}^2 y_j - \\ - \frac{1}{256} \left( \sum_{j=1}^{54} x_{1j}^2 y_j + \sum_{j=1}^{54} x_{3j}^2 y_j + \sum_{j=1}^{54} x_{4j}^2 y_j + \sum_{j=1}^{54} x_{6j}^2 y_j \right) - \frac{1}{18} \sum_{u=1}^6 y_{0u};$$

$$b_{66} = \frac{17}{216} \sum_{j=1}^{54} x_{6j}^2 y_j - \frac{10}{216} \sum_{j=1}^{54} x_{3j}^2 y_j - \\ - \frac{1}{256} \left( \sum_{j=1}^{54} x_{1j}^2 y_j + \sum_{j=1}^{54} x_{2j}^2 y_j + \sum_{j=1}^{54} x_{4j}^2 y_j + \sum_{j=1}^{54} x_{5j}^2 y_j \right) - \frac{1}{18} \sum_{u=1}^6 y_{0u};$$

$$s_{b_0}^2 = \frac{1}{6} s_y^2;$$

$$s_{b_i}^2 = \frac{1}{24} s_y^2;$$

$$s_{b_{ii}}^2 = \frac{1}{16} s_y^2 \quad \text{для } s_{b_{14}}^2; s_{b_{25}}^2; s_{b_{36}}^2;$$

$$s_{b_{ii}}^2 = \frac{1}{8} s_y^2 \quad \text{для остальных } s_{b_{ii}}^2;$$

$$s_{b_{ii}}^2 = \frac{21}{216} s_y^2.$$

Дисперсию  $s_y^2$  воспроизводимости эксперимента определяют по результатам  $n_0$  опытов в центре плана

$$s_y^2 = \frac{S_E}{n_0 - 1},$$

где  $S_E = \sum_{u=1}^{n_0} (y_{0u} - \bar{y}_0)^2$ ;  $\bar{y}_0 = \frac{1}{n_0} \sum_{u=1}^{n_0} y_{0u}$ .

Адекватность полученной модели проверяют с помощью  $F$ -критерия Фишера

$$F_p = \frac{s_{ад}^2}{s_y^2}.$$

Дисперсию  $s_{ад}^2$  адекватности вычисляют по формуле

$$s_{ад}^2 = \frac{S_R - S_E}{f},$$

где  $S_R$  – сумма квадратов отклонений эмпирических значений  $y_j$ ; функции отклика от ее значений  $\hat{y}_j$ , вычисленных по модели, во всех точках плана;  $j$  – число степеней свободы,  $f = N - k' - (n_0 - 1)$ ;  $k'$  – число коэффициентов аппроксимирующего полинома.

Если найденное значение критерия  $F_p$  меньше табличного при принятом уровне значимости и соответствующих числах степеней свободы, то гипотеза адекватности полученной модели принимается.

Рассмотренные Боксом и Бенкиным некомпозиционные планы для числа факторов от трех до семи имеют высокую степень ортогональности, а именно: только свободный член  $b_0$  и коэффициенты  $b_{ii}$  при квадратичных членах коррелированы друг с другом.

При четырех и семи факторах указанные планы являются ротатабельными, а при другом числе факторов эти планы являются почти ротатабельными.

## Применение некомпозиционных планов второго порядка при исследовании процесса вибродуговой наплавки

Основное влияние на толщину наплавленного слоя оказывают диаметр электрода, скорость наплавки, скорость подачи электродной проволоки и шаг наплавки. Рабочее напряжение и положение электрода относительно наплавляемой поверхности оказывают значительно меньшее влияние на толщину слоя. При выбранном диаметре электродной проволоки необходимую толщину слоя устанавливают с помощью пробных наплавов, выполняемых при различных сочетаниях значений шага наплавки, скорости подачи электрода и скорости наплавки. Но установленный с их помощью режим часто оказывается далеким от оптимального: наплавленные поверхности имеют большую высоту неровностей, что приводит к увеличению расхода электродного металла и затрат на последующую механическую обработку наплавленной поверхности.

Требуется определить для электродной проволоки  $\varnothing 2,5$  мм из хромоникелевой стали типа 18-8 условия наплавки, обеспечивающие получение заданной толщины наплавленного слоя при минимальном припуске на последующую обработку. Задача решается нахождением условного минимума функции отклика для припуска при ограничениях, налагаемых функцией отклика для толщины слоя. В целях получения указанных функций отклика проводятся экспериментальное исследование.

В исследовании переменными приняты следующие факторы:  $V_3$  – скорость подачи электродной проволоки;  $V_n$  – скорость наплавки;  $t$  – шаг наплавки.

В качестве параметра оптимизации приняли припуск на обработку, который вычисляли как среднее значение высоты неровностей наплавленной поверхности.

На основе априорной информации были выбраны уровни и интервалы варьирования факторов (табл. 8).

### 8. Уровни и интервалы варьирования факторов

Факторы	Кодовое обозначение	Интервалы варьирования	Уровни факторов		
			основной 0	верхний +1	нижний -1
$V_3$ – скорость подачи электродной проволоки, м/ч	$x_1$	32	80	112	48
$V_n$ – скорость наплавки, м/ч	$x_2$	20,7	41,4	62,1	20,7
$t$ – шаг наплавки	$x_3$	1	4	5	3

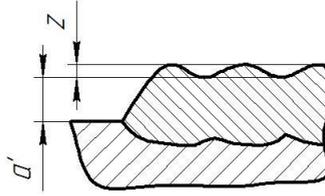
## 9. Матрица планирования и результаты опытов

Номер опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_{1x_2}$	$x_{1x_3}$	$x_{2x_3}$	$x_1^2$	$x_2^2$	$x_3^2$	$y_a$ , мм	$y_z$ , мм
1	+1	+1	+1	0	+1	0	0	+1	+1	0	1,76	0,30
2	+1	+1	-1	0	-1	0	0	+1	+1	0	4,30	0,25
3	+1	-1	+1	0	-1	0	0	+1	+1	0	0,41	0,91
4	+1	-1	-1	0	+1	0	0	+1	+1	0	2,68	0,27
5	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1,90	0,31
6	+1	+1	0	+1	0	+1	0	+1	0	+1	2,10	0,33
7	+1	+1	0	-1	0	-1	0	+1	0	+1	3,26	0,25
8	+1	-1	0	+1	0	-1	0	+1	0	+1	0,56	1,05
9	+1	-1	0	-1	0	+1	0	+1	0	+1	1,78	0,30
10	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,09	0,27
11	+1	0	+1	+1	0	0	+1	0	+1	+1	0,80	0,64
12	+1	0	+1	-1	0	0	-1	0	+1	+1	1,71	0,32
13	+1	0	-1	+1	0	0	-1	0	+1	+1	2,68	0,35
14	+1	0	-1	-1	0	0	+1	0	+1	+1	4,68	0,20
15	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1,99	0,32

Для получения математических моделей процесса в виде полиномов второй степени реализован некомпозиционный план второго порядка (табл. 9).

В соответствии с условиями опытов (табл. 9) наплавляли в углекислом газе образцы Ø110 мм из стали 45 с помощью головки ВГ-8М-УПИ и сварочного выпрямителя ВС-600. Условия наплавки характеризовались совокупностью следующих параметров: дополнительная индуктивность – 2,1 мГн; сопротивление сварочной цепи – 0,05 Ом; частота вибраций – 50 Гц; амплитуда колебаний электрода 1,7 мм; смещение электрода от зенита в сторону наплавки – 25 мм; вылет электрода – 15 мм; рабочее напряжение 21...22 В. Из каждого наплавленного образца приготавливали по четыре макрошлифа, на которых измеряли толщину слоя  $a'$  (рис. 6) и припуск  $z$ . Замеры выполняли на микроскопе УИМ-21 с точностью 0,1 мм. На каждом макрошлифе измерения производили на участке длиной 20...25 мм. Таким образом, значения толщины  $y_a$  наплавленного слоя и припуска  $y_z$  на образцовку, указанные в табл. 11, получены как средние из 20...25 замеров

По данным опытов (табл. 9), получены математические модели, характеризующие зависимости  $y_a$  и  $y_z$  от исследуемых факторов процесса. Эти модели представлены в виде полиномов второй степени.



**Рис. 6. Размеры наплавленного слоя:**

$a'$  – толщина наплавленного слоя;

2 – припуск на механическую обработку наплавленной поверхности

Коэффициенты указанных моделей вычисляли по приведенным выше формулам, которые для трех факторов имеют вид

$$b_0 = \frac{1}{3} \sum_{u=1}^3 y_{0u}; \quad (5)$$

$$b_i = \frac{1}{8} \sum_{j=1}^{15} x_{ij} y_j; \quad (6)$$

$$b_{ii} = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{15} x_{ij} x_{ij} y_j; \quad (7)$$

$$b_{ii} = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{15} x_i^2 y_j - \frac{1}{16} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{15} x_{ij}^2 y_j - \frac{1}{6} \sum_{u=1}^3 y_{0u}. \quad (8)$$

При определении коэффициента модели для  $y_z$  значение сумм, входящих в формулы 5 – 8, следующие:

$$\sum_{u=1}^3 y_{0u} = 90; \quad \sum_{j=1}^{15} x_{1j} y_j = -1,42; \quad \sum_{j=1}^{15} x_{2j} y_j = 1,01; \quad \sum_{j=1}^{15} x_{3j} y_j = 1,19;$$

$$\sum_{j=1}^{15} x_{1j} x_{2j} y_j = -0,59; \quad \sum_{j=1}^{15} x_{1j} x_{3j} y_j = -0,65; \quad \sum_{j=1}^{15} x_{2j} x_{3j} y_j = 0,29;$$

$$\sum_{j=1}^{15} x_1^2 y_j = 3,68; \quad \sum_{j=1}^{15} x_2^2 y_j = 3,33; \quad \sum_{j=1}^{15} x_3^2 y_j = 3,55; \quad \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{15} x_{ij}^2 y_j = 10,56.$$

После подстановки в формулы 5 – 8 получаем коэффициенты уравнения регрессии:

$$b_0 = \frac{1}{3} \cdot 0,90 = 0,3;$$

$$b_1 = \frac{1}{8} \cdot (-1,42) = -0,1775;$$

$$b_2 = \frac{1}{8} \cdot 1,01 = 0,12625;$$

$$b_3 = \frac{1}{8} \cdot 1,19 = 0,14875;$$

$$b_{12} = \frac{1}{4} \cdot (-0,59) = -0,1475;$$

$$b_{13} = \frac{1}{4} \cdot (-0,65) = -0,1625;$$

$$b_{23} = \frac{1}{4} \cdot 0,29 = 0,0725;$$

$$b_{11} = \frac{1}{4} \cdot 3,68 - \frac{1}{16} \cdot 10,56 - \frac{1}{6} \cdot 0,9 = 0,11;$$

$$b_{22} = \frac{1}{4} \cdot 3,33 - \frac{1}{16} \cdot 10,56 - \frac{1}{6} \cdot 0,9 = 0,0225;$$

$$b_{33} = \frac{1}{4} \cdot 3,55 - \frac{1}{16} \cdot 10,56 - \frac{1}{6} \cdot 0,9 = 0,0775.$$

Дисперсию  $s_{y_z}^2$  параметра оптимизации определяется по результатам опытов в центре плана (см. табл. 9, опыты 5; 10; 15). Для вычисления дисперсии  $s_{y_z}^2$  составляется вспомогательная таблица (табл. 10).

Дисперсии, характеризующие ошибки в определении коэффициентов уравнения регрессии для трех факторов, имеют вид

$$s_{b_0}^2 = \frac{1}{3} s_y^2;$$

$$s_{b_i}^2 = \frac{1}{8} s_y^2;$$

$$s_{b_{ii}}^2 = \frac{1}{4} s_y^2;$$

$$s_{b_{ii}}^2 = \frac{13}{48} s_y^2.$$

### 10. Вспомогательная таблица для расчетов $s_{y_z}^2$

Номер опыта в центре плана	$y_z$	$\bar{y}_z$	$y_z - \bar{y}_z$	$(y_z - \bar{y}_z)^2$
5	0,30		0,01	0,0001
10	0,27	0,30	-0,03	0,0009
15	0,32		0,02	0,0004
$s_{y_z}^2 = \frac{S_E}{n_0 - 1} = \frac{0,0014}{3 - 1}$				$S_E = \sum (y_z - \bar{y}_z)^2$

В результате вычислений получены следующие значения дисперсий коэффициентов уравнения регрессии для  $y_z$ :

$$s_{b_0}^2 = 0,000233;$$

$$s_{b_i}^2 = 0,000088;$$

$$s_{b_{il}}^2 = 0,000178;$$

$$s_{b_{ii}}^2 = 0,000189.$$

Доверительный интервал  $\Delta b_0$  коэффициента  $b_0$  определяется по выражению

$$\Delta b_0 = \pm t s_{b_0} = \pm 4,3 \cdot 0,015264 = \pm 0,065635,$$

где  $t$  – табличное значение критерия Стьюдента; в данном случае, при числе степеней свободы, равном 2, и 5%-ном уровне значимости,  $t = 4,3$ ;

$$s_{b_0} = \sqrt{s_{b_0}^2} = \sqrt{0,000233} = 0,015264.$$

Аналогично определяются доверительные интервалы коэффициентов  $b_i, b_{il}, b_{ii}$ :

$$\Delta b_i = \pm t s_{b_i} = \pm 4,3 \cdot 0,00938 = \pm 0,040334;$$

$$\Delta b_{il} = \pm t s_{b_{il}} = \pm 4,3 \cdot 0,013228 = \pm 0,056880;$$

$$\Delta b_{ii} = \pm t s_{b_{ii}} = \pm 4,3 \cdot 0,013760 = \pm 0,059206.$$

Коэффициент  $b_{22}$  меньше доверительного интервала, поэтому его можно признать статистически незначимым и исключить из уравнения регрессии. После исключения коэффициента  $b_{22}$  уравнение регрессии для  $y_z$  примет вид:

$$y_z = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{23} x_2 x_3 + b_{11} x_1^2 + b_{33} x_3^2. \quad (9)$$

Так как незначимым оказался коэффициент при квадратичном члене, все остальные коэффициенты пересчитываем с использованием метода наименьших квадратов.

Для этого по выражению (9) составляем систему (10) нормальных уравнений:

$$b_0 N + b_1 \sum_{j=1}^N x_{1j} + b_2 \sum_{j=1}^N x_{2j} + b_3 \sum_{j=1}^N x_{3j} + b_{12} \sum_{j=1}^N x_{1j} x_{2j} + b_{13} \sum_{j=1}^N x_{1j} x_{3j} + b_{11} \sum_{j=1}^N x_{1j}^2 + b_{33} \sum_{j=1}^N x_{3j}^2 = \sum_{j=1}^N y_{zj}; \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
& b_0 \sum_{j=1}^N x_{1j} + b_1 \sum_{j=1}^N x_{1j}^2 + b_2 \sum_{j=1}^N x_{1j}x_{2j} + b_3 \sum_{j=1}^N x_{1j}x_{3j} + \\
& \quad + b_{12} \sum_{j=1}^N x_{1j}^2x_{2j} + b_{13} \sum_{j=1}^N x_{1j}^2x_{3j} + \\
& + b_{33} \sum_{j=1}^N x_{1j}x_{2j}x_{3j} + b_{11} \sum_{j=1}^N x_{1j}^2x_{2j} + b_{33} \sum_{j=1}^N x_{3j}^2x_{1j} = \sum_{j=1}^N y_{zj}x_{1j}; \\
& b_0 \sum_{j=1}^N x_{2j} + b_1 \sum_{j=1}^N x_{1j}x_{2j} + b_2 \sum_{j=1}^N x_{2j}^2 + b_3 \sum_{j=1}^N x_{2j}x_{3j} + \\
& + b_{12} \sum_{j=1}^N x_{1j}x_{2j}^2 + b_{13} \sum_{j=1}^N x_{1j}x_{2j}x_{3j} + b_{23} \sum_{j=1}^N x_{2j}x_{3j} + b_{11} \sum_{j=1}^N x_{1j}^2x_{2j} + \\
& \quad + b_{33} \sum_{j=1}^N x_{3j}^2x_{2j} = \sum_{j=1}^N y_{zj}x_{2j}; \\
& b_0 \sum_{j=1}^N x_{3j} + b_1 \sum_{j=1}^N x_{1j}x_{3j} + b_2 \sum_{j=1}^N x_{2j}x_{3j} + b_3 \sum_{j=1}^N x_{3j}^2 + \\
& + b_{12} \sum_{j=1}^N x_{1j}x_{2j}x_{3j} + b_{13} \sum_{j=1}^N x_{1j}x_{3j}^2 + b_{23} \sum_{j=1}^N x_{2j}x_{3j}^2 + \\
& \quad + b_{11} \sum_{j=1}^N x_{1j}^2x_{3j} + b_{33} \sum_{j=1}^N x_{3j}^3 = \sum_{j=1}^N y_{zj}x_{3j}; \\
& b_0 \sum_{j=1}^N x_{1j}x_{2j} + b_1 \sum_{j=1}^N x_{1j}^2x_{2j} + b_2 \sum_{j=1}^N x_{2j}^2x_{1j} + b_3 \sum_{j=1}^N x_{1j}x_{2j}x_{3j} + \\
& + b_{12} \sum_{j=1}^N x_{1j}^2x_{2j}^2 + b_{13} \sum_{j=1}^N x_{1j}^2x_{2j}x_{3j} + b_{23} \sum_{j=1}^N x_{2j}^2x_{3j}x_{1j} + \\
& \quad + b_{11} \sum_{j=1}^N x_{1j}^3x_{2j} + b_{33} \sum_{j=1}^N x_{3j}^3x_{1j}x_{2j} = \sum_{j=1}^N y_{zj}x_{1j}x_{2j};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& b_0 \sum_{j=1}^N x_{1j} x_{3j} + b_1 \sum_{j=1}^N x_{1j}^2 x_{3j} + b_2 \sum_{j=1}^N x_{1j} x_{2j} x_{3j} + \\
& + b_3 \sum_{j=1}^N x_{3j}^2 x_{1j} + b_{12} \sum_{j=1}^N x_{1j}^2 x_{2j} x_{3j} + b_{13} \sum_{j=1}^N x_{1j}^2 x_{3j}^2 + \\
& + b_{23} \sum_{j=1}^N x_{2j} x_{3j}^2 x_{1j} + b_{11} \sum_{j=1}^N x_{1j}^3 x_{3j} + b_{33} \sum_{j=1}^N x_{3j}^3 x_{1j} = \sum_{j=1}^N y_{zj} x_{1j} x_{3j};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& b_0 \sum_{j=1}^N x_{2j} x_{3j} + b_1 \sum_{j=1}^N x_{1j} x_{2j} x_{3j} + b_2 \sum_{j=1}^N x_{2j}^2 x_{3j} + \\
& + b_3 \sum_{j=1}^N x_{3j}^2 x_{2j} + b_{12} \sum_{j=1}^N x_{2j}^2 x_{1j} x_{3j} + b_{13} \sum_{j=1}^N x_{1j} x_{2j} x_{3j}^2 + \\
& + b_{23} \sum_{j=1}^N x_{2j}^2 x_{3j}^2 + b_{11} \sum_{j=1}^N x_{1j}^3 x_{2j} x_{3j} + b_{33} \sum_{j=1}^N x_{3j}^3 x_{2j} = \sum_{j=1}^N y_{zj} x_{2j} x_{3j};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& b_0 \sum_{j=1}^N x_{1j}^2 + b_1 \sum_{j=1}^N x_{1j}^3 + b_2 \sum_{j=1}^N x_{2j} x_{1j}^2 + b_3 \sum_{j=1}^N x_{3j} x_{1j}^2 + b_{12} \sum_{j=1}^N x_{1j}^3 x_{2j} + \\
& + b_{13} \sum_{j=1}^N x_{1j}^3 x_{3j} + b_{23} \sum_{j=1}^N x_{2j} x_{3j} x_{1j}^2 + b_{11} \sum_{j=1}^N x_{1j}^4 + \\
& + b_{33} \sum_{j=1}^N x_{3j}^2 x_{1j}^2 = \sum_{j=1}^N y_{zj} x_{1j}^2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& b_0 \sum_{j=1}^N x_{3j}^2 + b_1 \sum_{j=1}^N x_{1j} x_{3j}^2 + b_2 \sum_{j=1}^N x_{2j} x_{3j}^2 + b_3 \sum_{j=1}^N x_{3j}^3 + b_{12} \sum_{j=1}^N x_{1j} x_{2j} x_{3j} + \\
& + b_{13} \sum_{j=1}^N x_{1j} x_{3j}^3 + b_{23} \sum_{j=1}^N x_{2j} x_{3j}^3 + b_{11} \sum_{j=1}^N x_{1j}^2 x_{3j}^2 + \\
& + b_{33} \sum_{j=1}^N x_{3j}^4 = \sum_{j=1}^N y_{zj} x_{3j}^2;
\end{aligned}$$

После подстановки значений сумм система (10) принимает вид:

$$\begin{cases} 15b_0 + 0b_1 + 0b_2 + 0b_3 + 0b_{12} + 0b_{13} + 0b_{23} + 8b_{11} + 8b_{33} = 6,18; \\ 0b_0 + 8b_1 + 0b_2 + 0b_3 + 0b_{12} + 0b_{13} + 0b_{23} + 0b_{11} + 0b_{33} = -1,42; \\ 0b_0 + 0b_1 + 8b_2 + 0b_3 + 0b_{12} + 0b_{13} + 0b_{23} + 0b_{11} + 0b_{33} = 1,01; \\ 0b_0 + 0b_1 + 0b_2 + 8b_3 + 0b_{12} + 0b_{13} + 0b_{23} + 0b_{11} + 0b_{33} = 1,19; \\ 0b_0 + 0b_1 + 0b_2 + 0b_3 + 4b_{12} + 0b_{13} + 0b_{23} + 0b_{11} + 0b_{33} = -0,59; \\ 0b_0 + 0b_1 + 0b_2 + 0b_3 + 0b_{12} + 4b_{13} + 0b_{23} + 0b_{11} + 0b_{33} = -0,65; \\ 0b_0 + 0b_1 + 0b_2 + 0b_3 + 0b_{12} + 0b_{13} + 4b_{23} + 0b_{11} + 0b_{33} = 0,29; \\ 8b_0 + 0b_1 + 0b_2 + 0b_3 + 0b_{12} + 0b_{13} + 0b_{23} + 8b_{11} + 4b_{33} = 3,68; \\ 8b_0 + 0b_1 + 0b_2 + 0b_3 + 0b_{12} + 0b_{13} + 0b_{23} + 4b_{11} + 8b_{33} = 3,55. \end{cases} \quad (11)$$

Решая систему (11), получаем следующие значения коэффициентов:

$$b_0 = 0,313846; \quad b_1 = -0,17756; \quad b_2 = 0,126256; \quad b_3 = 0,14875; \quad b_{12} = -0,1475; \\ b_{13} = -0,1625; \quad b_{23} = 0,0725; \quad b_{11} = 0,108269; \quad b_{33} = 0,075769.$$

Уравнение регрессии для  $y_z$  принимает вид

$$y_z = 0,313846 - 0,1775x_1 + 0,12625x_2 + 0,14875x_3 - 0,1475x_1x_2 - \\ - 0,1625x_1x_3 + 0,0725x_2x_3 + 0,108269x_1^2 + 0,075769x_3^2. \quad (12)$$

Адекватность полученной модели проверяем по критерию Фишера. Для вычисления дисперсии  $S_{ад}^2$  адекватности находим сумму  $S_R$  квадратов отклонений расчетных значений  $y'_z$  от экспериментальных  $y_z$  во всех точках плана (табл. 11). Расчетные значения  $y'_z$  определяются по выражению (12).

### 11. Вспомогательная таблица для вычисления $S_R$

Номер опыта	$Y_z$	$y'_z$	$y_z - y'_z$	$(y_z - y'_z)^2$
1	0,30	0,22	0,08	0,0064
2	0,25	0,26	-0,01	0,0001
3	0,91	0,87	0,04	0,0016
4	0,27	0,32	-0,05	0,0025
5	0,31	0,31	0	0
6	0,33	0,31	0,02	0,0004
7	0,25	0,33	-0,08	0,0064
8	0,05	0,99	0,06	0,0036
9	0,32	0,36	-0,04	0,0016
10	0,27	0,31	-0,04	0,0016
11	0,64	0,71	-0,10	0,01
12	0,32	0,29	0,03	0,0009
13	0,35	0,34	0,01	0,0001
14	0,29	0,19	0,10	0,01
15	0,32	0,31	0,01	0,0001
			$S_R = \sum (y_z - y'_z)^2 = 0,0453$	

Находим дисперсию

$$s_{ад}^2 = \frac{S_R - S_E}{N - k' - (n_0 - 1)} = \frac{0,0453 - 0,0014}{15 - 9 - 2} = 0,010975.$$

Расчетное значение  $F$ -критерия

$$F_p = \frac{s_{ад}^2}{s_{yz}^2} = \frac{0,010975}{0,0007} = 15,68$$

меньше  $F_T = 19,3$ . Следовательно, полученная модель адекватна при 5 %-ном уровне значимости.

Аналогично получаем уравнение регрессии для  $y_a$ :

$$y_a = 1,95486 + 0,74875x_1 - 1,2075x_2 - 0,66125x_3 + 0,2725x_2x_3 + 0,42321x_2^2. \quad (13)$$

Полученная модель адекватна при 5%-ном уровне значимости, так как

$$F_p = \frac{s_{ад}^2}{s_{yz}^2} = 2,04 < F_3 = 19,3.$$

Уравнения (12) и (13) можно использовать для определения толщины слоя и припуска на обработку при наплавке проволокой  $\varnothing 2,5$  мм на режимах, входящих в область эксперимента.

Переход от кодированных значений ( $x_1, x_2, x_3$ ) факторов к натуральным ( $V_3, V_n, t$ ) осуществляют по формулам:

$$V_3 = \varepsilon_1 x_1 + V_{30}; V_n = \varepsilon_2 x_2 + V_{n0}; t = \varepsilon_3 x_3 + t_0,$$

где  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  – интервалы варьирования факторов;  $V_{30}, V_{n0}, t_0$  – натуральные значения основных уровней факторов.

Условный минимум функции  $y_z$  при ограничениях, налагаемых функцией  $y_a$ , находили графическим способом с помощью совмещенных двухмерных сечений.

Двухмерные сечения поверхности отклика получают следующим образом. В уравнение регрессии подставляют значения (предположительно близкие к оптимальным) всех факторов, кроме двух. В результате получают зависимость исследуемой переменной от двух факторов при определенных значениях остальных факторов. Устанавливая для исследуемой величины в указанном уравнении определенное значение, получают зависимость между двумя факторами, которую на плоскости можно представить кривой линией. Эта линия носит название кривой равного отклика. Задавая различные значения зависимой переменной, можно построить семейство таких кривых, дающих наглядное представление о поверхности отклика. Для оптимизации процесса, заключающейся в нашем случае в установлении режимов, обеспечивающих заданную толщину слоя при минимальном припуске, строим кривые равного отклика или, что одно и то же, контурные кривые поверхности отклика  $y_z$ .

Рассмотрим построение контурных кривых поверхности отклика  $y_z$  при  $x_3 = -1$ . Подставив в уравнение (12)  $x_3 = -1$ , получаем для  $y_z$  следующее выражение:

$$y_z = 0,240865 - 0,015x_1 + 0,05375x_2 - 0,1475x_1x_2 + 0,108268x_1^2, \quad (14)$$

Уравнение (14) приводим к каноническому виду. На первом этапе канонического преобразования начало координат переносим в особую точку – центр фигуры. Для определения координат центра  $S^z$  фигуры уравнение (14) дифференцируем по  $x_1$  и  $x_2$ :

$$\begin{aligned} \frac{dy_z}{dx_1} &= -0,015 - 0,1475x_2 + 0,216538x_1; \\ \frac{dy_z}{dx_2} &= -0,05375 - 0,1475x_1. \end{aligned}$$

Приравняем частные производные нулю, после чего, решая полученную систему уравнений, находим, что  $x_1 = 0,364406$ , а  $x_2 = 0,433267$ . Найденные координаты являются координатами центра  $S^z$  фигуры, поэтому обозначаем их через  $x_{1S}$  и  $x_{2S}$  ( $x_{1S} = 0,364406$  и  $x_{2S} = 0,433267$ ).

Известно, что при параллельном переносе системы координат в центр  $S^z$  фигуры исчезают члены уравнения, содержащие линейные эффекты, и изменяется свободный член. Коэффициенты при вторых степенях и произведениях факторов инвариантны относительно параллельного переноса. Подставляя в уравнение (14) вместо  $x_1$ , и  $x_2$  соответственно координаты центра  $S^z$  фигуры  $x_{1S} = 0,364406$  и  $x_{2S} = 0,433267$ , получаем значение припуска  $Y_z^S$  в новом начале координат:

$$\begin{aligned} Y_z^S &= 0,240865 - 0,015 \cdot 0,364406 + 0,05375 \cdot 0,433267 - \\ &- 0,1475 \cdot 0,364406 \cdot 0,433267 + 0,108269 \cdot 0,364406^2 = 0,249776. \end{aligned}$$

В результате переноса начала координат в центр  $S^z$  фигуры уравнение (10) примет вид

$$Y_z = Y_z^S + 0,108269\widetilde{x}_1^2 - 0,1475\widetilde{x}_1\widetilde{x}_2.$$

Подставляя в последнее выражение  $Y_z^S = 0,249776$ , получаем:

$$Y_z = 0,249776 + 0,108269\widetilde{x}_1^2 - 0,1475\widetilde{x}_1\widetilde{x}_2, \quad (15)$$

где  $Y_z$  – значение функции отклика;  $\widetilde{x}_1$  и  $\widetilde{x}_2$  – значения координат в новой системе, связанные с  $x_1$  и  $x_2$  следующими соотношениями:

$$\widetilde{x}_1 = x_1 - x_{1S} = x_1 - 0,364406; \quad \widetilde{x}_2 = x_2 - x_{2S} = x_2 - 0,433267.$$

Вторым этапом канонического преобразования является поворот осей в новом начале координат. Угол поворота находим по выражению

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}2\alpha &= \frac{b_{12}}{b_{11} - b_{22}} = -\frac{0,1475}{0,108269 - 0} = -1,362347; \\ 2\alpha &= -53^\circ 43'; \quad \alpha = -26^\circ 52'. \end{aligned}$$

Коэффициенты  $B_{11}, B_{22}, \dots, B_{kk}$  канонического уравнения находят, решая характеристическое уравнение, которое имеет вид

$$\begin{vmatrix} b_{11} - B & \frac{1}{2}b_{12} & \dots & \frac{1}{2}b_{1k} \\ \frac{1}{2}b_{21} & b_{22} - B & \dots & \frac{1}{2}b_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{2}b_{k1} & \frac{1}{2}b_{k2} & \dots & b_{kk} - B \end{vmatrix} = 0.$$

В данном случае для полинома

$$y_z = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2$$

характеристическое уравнение имеет следующее выражение:

$$\begin{vmatrix} b_{11} - B & \frac{1}{2}b_{12} \\ \frac{1}{2}b_{21} & b_{22} - B \end{vmatrix} = 0.$$

В это выражение подставляем значения  $b_{12}, b_{11}, b_{22}$ .

$$\begin{vmatrix} 0,108269 - B & \frac{1}{2}(-0,1475) \\ \frac{1}{2}(-0,1475) & 0 - B \end{vmatrix} = B^2 - 0,108269B - 0,005439 = 0;$$

$$B_{11,22} = \frac{0,108269}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0,108269}{2}\right)^2 + 0,005439};$$

$$B_{11} = 0,145622; \quad B_{22} = -0,037353.$$

Правильность вычислений коэффициентов  $B_{11}$  и  $B_{22}$  проверяем, сравнивая суммы  $\sum B_{ii}$  и  $\sum b_{ii}$ . Поскольку коэффициенты при вторых степенях инвариантны относительно параллельного переноса осей, значения коэффициентов  $b_{ii}$ , можно брать из уравнения (14) или (15):

$$\sum b_{ii} = b_{11} + b_{22} = 0,108269 + 0 = 0,108269;$$

$$\sum B_{ii} = B_{11} + B_{22} = 0,145622 - 0,037353 = 0,108269.$$

Таким образом, уравнение (14), приведенное к канонической форме, получает вид

$$Y_z - 0,249776 = 0,145622X_1^2 - 0,037353X_2^2. \quad (16)$$

Подставляя в уравнение (16) значение припуска  $Y_z = 0,2$  мм, получаем следующее выражение:

$$\frac{X_2^2}{1,332717} - \frac{X_1^2}{0,341828} = 1. \quad (17)$$

Уравнение (17) – каноническое уравнение гиперболы. По уравнению (17) построена кривая I на рис. 7.

Кривая I построена в системе координат  $X_1^z; X_2^z$ . Эта система получена путем переноса начала  $H$  координат в центр  $S^z$  и по следующего поворота координатных осей в точке  $S^z$  на угол  $\alpha = -26^\circ 52'$ . Каноническое уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где  $a$  – действительная полуось;  $b$  – мнимая полуось.

В данном случае  $a = 1,154434$ ;  $b = 0,584660$ .

Значение  $a$  откладываем по оси  $X_2^z$ , а значение  $b$  – по оси  $X_1^z$ . При этом необходимо учитывать, что масштаб для  $a$  и  $b$  и масштаб соответственно факторов  $x_2$  и  $x_1$  должны быть одинаковыми. По полученным значениям полуосей строим гиперболу известными способами.

Аналогичным образом получаем уравнения при  $Y_z = 0,25; 0,3; 0,35; 0,4$  мм. По этим уравнениям строили контурные кривые 2, 3, 4 и 5 (рис. 7). Подставив в уравнение (13)  $x_3 = -1$ , получили для  $y_a$  следующее выражение:

$$y_a = 2,61611 + 0,74875x_1 - 1,48x_2 + 0,423214x_2^2. \quad (18)$$

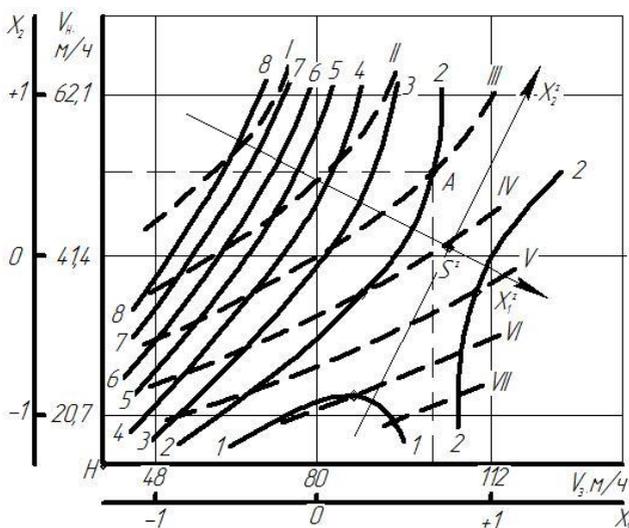


Рис. 7. Двухмерные сечения поверхностей откликов  $y_z$  и  $y_a$  при  $x_3 = -1$  ( $t = 3$  мм):

1, 2, 3, 4, 5 – припуск на обработку соответственно 0,2; 0,25; 0,3; 0,35; 0,4 мм;

I, II, III, IV, V, VI, VII – толщина наплавленного слоя соответственно 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4; 4,5 мм;  $d_3 = 2,5$  мм

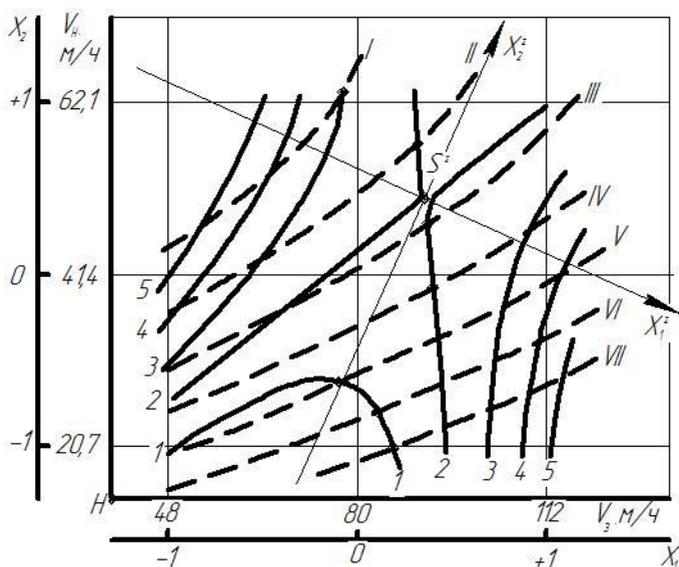
Приняв  $y_a = 1,5$ , уравнение (14) приняло вид

$$x_1 = -1,490631 + 1,976628x_2 - 0,565227x_2^2. \quad (19)$$

По уравнению (19), представляющему собой уравнение параболы, построена кривая I на рис. 2. Последовательно приняв толщину слоя равной 2,0; 2,5; 3,0; 3,5; 4,0; 4,5 мм, получили уравнения, по которым построили кривые II, III, IV, V, VI, VII. Эти кривые и кривые 1, 2, 3, 4, 5 представляют собой совмещенные двухмерные сечения поверхностей откликов  $y_z$  и  $y_a$  при шаге наплавки, равном 3 мм.

Аналогично построены совмещенные двухмерные сечения поверхностей откликов  $y_z$  и  $y_a$  при шаге наплавки 3,5; 4,0; 4,5; 5,0 мм. Указанные сечения при шаге наплавки  $t = 4,0$  мм изображены на рис. 3.

Точкам пересечения кривых, представленным на рис. 2 и 3, отвечают значения  $V_3$  и  $V_H$ , обеспечивающие получение минимального припуска при заданной толщине слоя и принятом шаге наплавки. Так, например, точка A (рис. 8) имеет координаты  $V_3 = 103,7$  и  $V_H = 52,2$ . Эти значения  $V_3$  и  $V_H$  обеспечивают при заданной толщине слоя 2,0 мм и шаге наплавки 4 мм получение минимального припуска, равного 0,25 мм.



**Рис. 8.** Двухмерные сечения поверхностей откликов  $y_z$  и  $y_a$  при  $x_3 = 0$  ( $t = 4$  мм):  
 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 – припуск на обработку соответственно 0,2; 0,25; 0,3; 0,35; 0,4;  
 0,45; 0,5; 0,55 мм; I, II, III, IV, V, VI, VII – толщина наплавленного слоя  
 соответственно 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4 мм;  $d_s = 2,5$  мм

Анализ совмещенных двумерных сечений позволил определить режимы, обеспечивающие требуемую толщину слоя при минимальном припуске на обработку (табл. 12). В последнем столбце таблицы указано машинное время  $\tau$  наплавки поверхности  $\varnothing 100$  мм и длиной 100 мм. По приведенным данным можно выбрать режим, обеспечивающий заданную толщину слоя при наименьшем припуске и максимальной производительности наплавки.

**12. Режимы, обеспечивающие заданную толщину слоя при минимальном припуске на обработку ( $d_3 = 2,5$  мм)**

$a'$	$V_3$ , м/ч	$V_{II}$ , м/ч	$t$ , мм	$z$ , мм	$\tau$ , мин
1,0	64	62,1	3,5	0,50	8,67
1,0	64	52,4	4,0	0,55	8,99
1,0	80	59,6	4,5	0,55	7,03
1,0	89	61,3	5,0	0,60	6,15
1,5	80	64,6	3,0	0,3	9,73
1,5	87,7	64,2	3,5	0,3	8,39
1,5	84,5	53,4	4,0	0,35	8,82
1,5	95,4	55,9	4,5	0,35	7,49
1,5	100,5	48,8	5,0	0,40	7,71
2,0	91,5	57,1	3,0	0,25	11,00
2,0	94,7	53,4	3,5	0,25	10,08
2,0	103,7	52,2	4,0	0,25	9,03
2,0	97,3	42	4,5	0,30	9,97
2,0	115,2	44,7	5,0	0,30	8,43
2,5	91,8	47,6	3,0	0,25	13,20
2,5	77,4	38,1	3,5	0,25	14,14
2,5	89,6	36,4	4,0	0,25	12,94
2,5	79,0	27,7	4,5	0,30	15,10
2,5	101,8	29,4	5,0	0,30	12,82
3,0	91,8	39,7	3,0	0,25	15,81
3,0	105,0	40,2	3,5	0,25	13,40
3,0	112,0	36,4	4,0	0,25	12,94
3,0	113,0	31,2	4,5	0,25	13,40
3,0	83,2	18,0	5,0	0,30	20,93
3,5	74,2	29,4	3,0	0,20	21,38
3,5	83,8	27,3	3,5	0,20	19,71
3,5	88,3	23,4	4,0	0,20	20,14
4,0	80,3	25,5	3,0	0,20	24,7
0,0	88,6	23,6	3,5	0,20	22,82
4,0	95,7	20,1	4,0	0,20	23,5
4,5	82,6	21,1	3,0	0,20	29,76
4,5	91,5	19,2	3,5	0,20	27,98

Учебное электронное издание

# ОСНОВЫ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Методические указания

Составители:

ГЛАЗКОВ Юрий Евгеньевич  
ХОЛЬШЕВ Николай Васильевич

Редактирование И. В. Калистратовой  
Графический и мультимедийный дизайнер Т. Ю. Зотова  
Обложка, упаковка, тиражирование И. В. Калистратовой

Подписано к использованию 01.02.2024.

Тираж 50 шт. Заказ № 9

Издательский центр ФГБОУ ВО «ТГТУ»  
392000, г. Тамбов, ул. Советская, д. 106, к. 14.  
Тел./факс (4752) 63-81-08.  
E-mail: izdatelstvo@tstu.ru