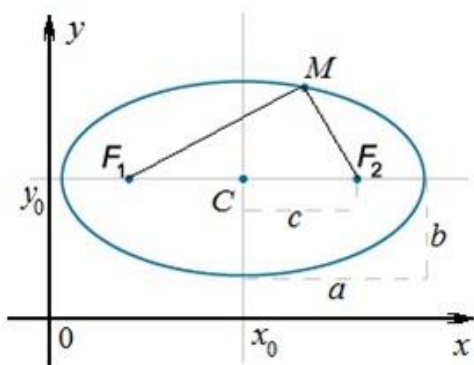


Т. В. ЖУКОВСКАЯ, Е. А. МОЛОКАНОВА, Д. Н. ПРОТАСОВ

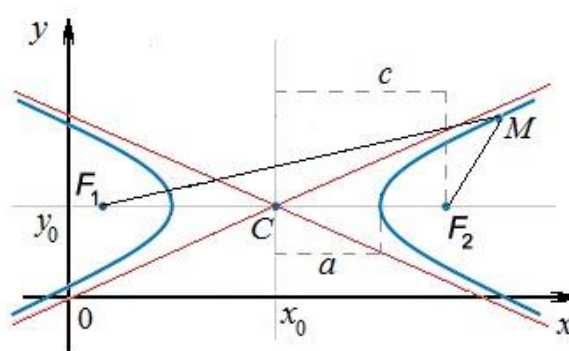
ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЗАОЧНИКОВ

В ДВУХ ЧАСТЯХ

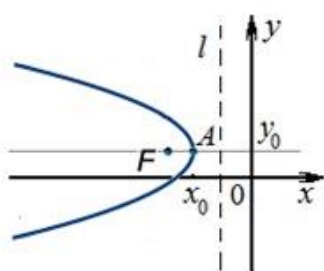
ЧАСТЬ 1



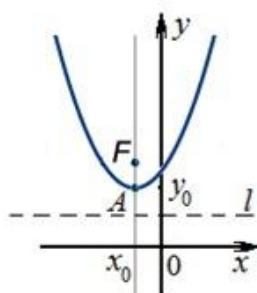
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$



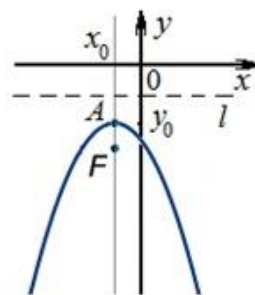
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$



$$(y-y_0)^2 = -2\rho(x-x_0)$$



$$(x-x_0)^2 = 2\rho(y-y_0)$$



$$(x-x_0)^2 = -2\rho(y-y_0)$$

Тамбов
Издательский центр ФГБОУ ВО «ТГТУ»
2025

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тамбовский государственный технический университет»

Т. В. ЖУКОВСКАЯ, Е. А. МОЛОКАНОВА, Д. Н. ПРОТАСОВ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЗАОЧНИКОВ

В ДВУХ ЧАСТЯХ

ЧАСТЬ 1

Утверждено Ученым советом университета в качестве учебного пособия
для студентов 1-го курса заочного отделения инженерных
и экономических направлений высшего образования

Учебное электронное издание



Тамбов
Издательский центр ФГБОУ ВО «ТГТУ»
2025

УДК 51(075.8)
ББК 221я73
Ж86

Рецензенты:

Кандидат физико-математических наук, доцент,
заведующая кафедрой функционального анализа
ФГБОУ ВО «ТГУ им. Г. Р. Державина»
Е. А. Панасенко

Доктор технических наук, профессор, профессор кафедры
«Механика и инженерная графика» ФГБОУ ВО «ТГТУ»
Ю. В. Родионов

Жуковская, Т. В.

Ж86 Высшая математика для заочников [Электронный ресурс] : учебное пособие : в 2 ч. / Т. В. Жуковская, Е. А. Молоканова, Д. Н. Протасов. – Тамбов : Издательский центр ФГБОУ ВО «ТГТУ». ISBN 978-5-8265-2894-5

Ч. 1. – 2025. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Системные требования : ПК не ниже класса Pentium IV, 2,4 ГГц ; RAM 512 Mb ; необходимое место на HDD 2,6 Mb ; Windows 7/8/10/11 ; дисковод CD-ROM ; мышь. – Загл. с экрана.

ISBN 978-5-8265-2895-2

Содержит теоретический материал, набор заданий и задания с решениями по линейной и векторной алгебре, аналитической геометрии, дифференциальному исчислению функций одной и нескольких переменных, а также теории интегралов и обыкновенных дифференциальных уравнений.

Предназначено для студентов 1-го курса заочного отделения инженерных и экономических направлений высшего образования.

УДК 51(075.8)
ББК 221я73

*Все права на размножение и распространение в любой форме остаются за разработчиком.
Нелегальное копирование и использование данного продукта запрещено.*

ISBN 978-5-8265-2894-5 (общ.) © Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
ISBN 978-5-8265-2895-2 (ч. 1) «Тамбовский государственный технический университет» (ФГБОУ ВО «ТГТУ»), 2025

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие «Высшая математика для заочников» разработано для студентов первого курса заочного отделения инженерных и экономических направлений высших технических учебных заведений. Оно служит основным материалом для изучения дисциплины «Высшая математика» и написания итоговой контрольной работы за 1-й семестр.

Пособие состоит из четырех глав, охватывающих курс высшей математики 1-го семестра технического вуза. Изложенный в книге материал представляет собой краткий теоретический курс и подробное практическое руководство по линейной алгебре, векторной алгебре, аналитической геометрии и математическому анализу.

Каждая глава (тема) сопровождается справочным материалом, кратким теоретическим разбором идей и методов решения задач, набором заданий из 30 вариантов, предназначенных для выполнения контрольной работы, и подробным разбором решения заданий варианта № 30. Задания контрольной работы составлены таким образом и в таком количестве, чтобы студенты могли освоить учебный материал, научиться применять его к решению задач среднего уровня сложности.

Книга ориентирована на студентов, изучающих дисциплину «Высшая математика» впервые после полного общего образования, а также на тех, кто ранее изучал эти разделы математики в рамках среднего специального образования. Материал изложен доступно и логично, соблюдая принципы математической строгости и соответствуя учебным программам бакалавриата по инженерным и экономическим направлениям.

Учебное пособие предназначено для активного использования студентами на лекциях и практических занятиях, при выполнении контрольной работы, для подготовки к зачетам и экзаменам. Книга может быть рекомендована и студентам очного обучения, желающим в кратком и доступном виде познакомиться

ся с основными разделами курса высшей математики технического вуза, а также получить помощь при выполнении заданий самостоятельной работы.

Контрольная работа за 1-й семестр содержит 12 заданий: 5 заданий по линейной алгебре, 2 задания по векторной алгебре, 4 задания по аналитической геометрии и 1 задание по дифференциальному исчислению. Все задания сформулированы во втором параграфе соответствующих глав и представлены в 30 вариантах. Номер варианта выбирается по первой букве фамилии студента. Распределение букв русского алфавита по номерам вариантов представлено в следующей таблице

1 А	2 Б	3 В	4 Г	4 Д	6 Е	7 Е, Ы	8 Ж	9 З	10 И, Й
11 К	12 Л	13 М	14 Н	15 О	16 П	17 Р	18 С	19 Т	20 У
21 Ф	22 Х	23 Ц	24 Ч	25 Ш	26 Щ	27 Э	28 Ю	29 Я	30

Например, для студента Поликарпова Николая номер варианта – 16, так как буква «П» в таблице под номером 16. В условиях заданий для большей персонализации введены параметры p и q . Значения параметров следует выбирать из этой же таблицы. Значение параметра p равно номеру первой буквы имени студента, значение параметра q – номеру второй буквы фамилии студента. Например, у Поликарпова Николая параметр $p = 14$ (буква «Н» в таблице под номером 14), параметр $q = 15$ (вторая буква фамилии – «О» имеет номер 15).

Требования к оформлению контрольной работы и пример оформления контрольной работы приведены в пятой главе пособия.

1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Линейная алгебра – раздел математики, посвященный, в частности, изучению систем линейных алгебраических уравнений и методов их решения. Одними из основных инструментов в решении задач линейной алгебры являются матрицы и определители.

1.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ФОРМУЛЫ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

1.1.1. Матрицы и определители

Матрица размером $m \times n$ – это прямоугольная таблица, состоящая из чисел или буквенных выражений, записанных в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

где a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$) – элементы матрицы, индекс i – номер строки, а индекс j – номер столбца. Матрицы обозначаются заглавными (прописными) буквами латинского алфавита, например A, B, C , или в виде $A = (a_{ij})$. Матрица, у которой все элементы равны нулю, называется *нулевой* и обозначается θ . Две матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинакового размера называются *равными*, если равны их соответствующие элементы, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$ для всех i и j .

Квадратная матрица порядка n представляет собой матрицу, у которой количество строк равно количеству столбцов ($m = n$). Например, квадратная матрица второго порядка имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Главной диагональю квадратной матрицы называется совокупность элементов с одинаковыми индексами: $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$, она является естественной диагональю квадрата, вторая диагональ называется *побочной*.

Квадратная матрица является *диагональной*, если все элементы, не принадлежащие главной диагонали, равны нулю, а на главной диагонали есть хотя бы один ненулевой элемент. Диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны 1, называется *единичной*. Например, единичная матрица третьего порядка имеет вид

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица характеризуется величиной, которая называется *определителем* (*детерминантом*) и рассчитывается по определенному правилу. Обозначение: $|A|$, $\det A$. Определитель второго порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Определитель третьего порядка раскрывается по правилу треугольников (правилу Саррюса).

Со знаком «+» берутся произведения трех элементов определителя, расположенных на главной диагонали и в вершинах треугольников, одна из сторон которых параллельна главной диагонали, а противолежащая ей вершина – в противоположном углу определителя; симметрично со знаком «-» берутся произведения элементов, расположенных на побочной диагонали и в вершинах треугольников со стороной, параллельной побочной диагонали (рис. 1.1). Свойства определителей перечислены в работе [1, с. 5].

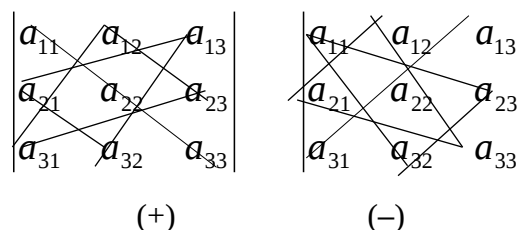


Рис. 1.1

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя $|A|$ называется определитель, полученный вычеркиванием i -й строки и j -го столбца определителя $|A|$ и умноженный на $(-1)^{i+j}$. Например, найдем алгебраическое дополнение A_{23} элемента a_{23} определителя

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 0 & 8 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

По определению составляем определитель и вычисляем его:

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -(3 + 20) = -23.$$

1.1.2. Операции над матрицами

Рассмотрим операции над матрицами: сложение матриц, умножение матрицы на число, умножение матриц.

Сложение матриц. Складывать можно матрицы одинакового размера. Суммой двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ называется матрица $C = (c_{ij})$, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц A и B , т.е. $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Обозначение: $C = A + B$. Например, при сложении двух матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 9 \end{pmatrix} \text{ получится матрица}$$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 & -5+4 \\ 3-4 & 7+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 16 \end{pmatrix}.$$

Умножение матрицы на число. На число можно умножать матрицу любой размерности. При умножении матрицы $A = (a_{ij})$ на число λ все элементы матрицы A умножаются на число λ , в результате получается матрица $C = (c_{ij})$, такая, что $c_{ij} = \lambda a_{ij}$. Обозначение: $C = \lambda A$. Например, если взять $\lambda = 3$ и рассмотренную выше матрицу A , то

$$C = 3A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 & -5 \cdot 3 \\ 3 \cdot 3 & 7 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -15 \\ 9 & 21 \end{pmatrix}.$$

Умножение матриц. Операция умножения матрицы A на матрицу B определена для случая, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B . То есть в произведении $A \cdot B$ первая матрица A имеет размер $m \times n$, а вторая матрица B имеет размер $n \times l$. В результате умножения матриц получается матрица $C = (c_{ij})$, $C = A \cdot B$, размера $m \times l$. Для того чтобы получить элемент c_{ij} матрицы C , берется строка с номером i матрицы A и столбец с номером j матрицы B и находится сумма произведений их соответствующих элементов, т.е.

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}.$$

Например, при умножении матриц $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}$ получится матрица C , в которой

$c_{11} = 2 \cdot 3 - 5 \cdot (-4)$ – элементы первой строки матрицы A умножаем на соответствующие элементы первого столбца матрицы B , а именно:

$(2 \ -5)$ матрицы A и $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ матрицы B ;

$c_{12} = 2 \cdot 4 - 5 \cdot 9$ – элементы первой строки матрицы A умножаем на соответствующие элементы второго столбца матрицы B , а именно: $(2 \ -5)$ матрицы A и $\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$ матрицы B ;

$c_{21} = 3 \cdot 3 + 7 \cdot (-4)$ – элементы второй строки матрицы A умножаем на соответствующие элементы первого столбца матрицы B , а именно: $(3 \ 7)$ матрицы A и $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ матрицы B ;

$c_{22} = 3 \cdot 4 + 7 \cdot 9$ – элементы второй строки матрицы A умножаем на соответствующие элементы второго столбца матрицы B , а именно: $(3 \ 7)$ матрицы A и $\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$ матрицы B .

Итак, получаем матрицу

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 - 5 \cdot (-4) & 2 \cdot 4 - 5 \cdot 9 \\ 3 \cdot 3 + 7 \cdot (-4) & 3 \cdot 4 + 7 \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & -37 \\ -19 & 75 \end{pmatrix}.$$

Свойства всех трех рассмотренных выше операций сформулированы в параграфе 1.1 учебного пособия [1]. Отметим здесь только те, которые нужны для выполнения заданий контрольной работы:

- 1) $A + B = B + A$;
- 2) $A + B + C = (A + B) + C = A + (B + C)$;
- 3) $A \cdot B \neq B \cdot A$;
- 4) $\lambda A \cdot B = \lambda(A \cdot B) = (\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B)$;
- 5) $A \cdot E = E \cdot A = A$ (A – квадратная);
- 6) $A^2 = A \cdot A$.

Особого внимания заслуживает свойство 3, из которого следует, что при умножении матриц *строго важен* порядок следования сомножителей. Существуют такие матрицы, для которых выполняется $A \cdot B = B \cdot A$, они называются перестановочными. Из свойства 5 видно, что единичная матрица перестановочна с любой квадратной матрицей.

Операция деления для матриц не определена. Аналогом ее является умножение на обратную матрицу.

Матрица A^{-1} называется *обратной* матрице A , если

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E, \quad (1.1)$$

где E – единичная матрица. Из равенств (1.1) следует, что матрица A должна быть квадратной. Квадратная матрица A называется *невырожденной*, если $\det A \neq 0$. Матрица A имеет обратную тогда и только тогда, когда она является невырожденной.

Всякая невырожденная квадратная матрица A имеет единственную обратную матрицу A^{-1} , равную

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}, \quad (1.2)$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы A , а матрица $\tilde{A}$ называется *присоединенной* матрицей. Заметим, что в присоединенной матрице алгебраические дополнения элементов строки записываются в столбец.

Построение по формуле (1.2) обратной матрицы при $n \geq 3$ – процесс трудоемкий, требующий большого количества вычислений, можно допустить ошибку. Проверить вычисления можно, проверив выполнение равенств (1.1).

1.1.3. Системы линейных уравнений. Методы решения

Система m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными имеет вид

[illegible]

где a_{ij} – коэффициенты системы; x_j – неизвестные; b_i – свободные члены ($i=1, 2, \dots, m$; $j=1, 2, \dots, n$).

Система (1.3), имеющая решения, называется *совместной*, иначе – *несовместной*. В случае единственного решения – система называется *определенной*, в случае нескольких решений (более одного) – *неопределенной*.

Рассмотрим матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},$$

где A – матрица системы; B и X – матрицы-столбцы соответственно неизвестных и свободных членов. Если умножить матрицу A на матрицу X , получится матрица B , поэтому систему можно записать в лаконичном виде

$$A \cdot X = B, \quad (1.4)$$

который называется *матричной формой записи* системы (1.3).

Методы решения систем линейных алгебраических уравнений.

Для решения системы (1.4) предлагаются три метода: метод Крамера, матричный метод и метод Гаусса. Методом Крамера и матричным методом решают системы с квадратной матрицей A . Методом Гаусса можно решать систему (1.4) с матрицей A любого размера. Рассмотрим матричный метод

и метод Крамера для системы трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \quad (1.5)$$

Матричный метод.

Запишем систему (1.5) в матричной форме (1.4), тогда ее решение – вектор-столбец

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

можно найти по формуле

$$X = A^{-1} \cdot B, \quad (1.6)$$

где матрица A^{-1} – обратная матрице A . Для того чтобы систему (1.5) можно было решить матричным методом, обратная матрица A^{-1} должна существовать, следовательно, матрица должна быть невырожденной: $\det A \neq 0$.

Метод Крамера.

Единственное решение системы (1.5), т.е. значения всех трех неизвестных x_1, x_2 и x_3 вычисляются по формулам

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad (1.7)$$

которые называются *формулами Крамера*. Здесь участвуют четыре определителя:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \text{главный определитель системы};$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{12} & b_2 & a_{23} \\ a_{13} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ a_{13} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} - \text{вспомогательные}$$

определители.

Формулы (1.7) имеют место, если $\Delta \neq 0$ – при этом условии система (1.5) имеет единственное решение, т.е. является определенной.

Метод Гаусса – это универсальный способ решения систем линейных алгебраических уравнений (1.3), который применяется в любом случае, даже если число уравнений системы не равно числу неизвестных в ней, $m \neq n$, или если число уравнений равно числу неизвестных $m = n$, но матрица системы вырожденная – ее определитель равен нулю, $\Delta = 0$. Метод Гаусса называют также методом исключения неизвестных, так как алгоритм этого метода позволяет последовательно исключать неизвестные из уравнений системы.

В методе Гаусса выполняются *элементарные преобразования* матрицы. Элементарные преобразования матрицы включают три вида преобразований:

1) умножение всех элементов определенной строки или столбца на ненулевое число λ ;

2) добавление к элементам некоторой строки (или столбца) соответствующих элементов другой строки (или столбца), умноженных на произвольное число α ;

3) а также перестановку любых строк (столбцов) матрицы.

Матрицы A и B , полученные одна из другой с помощью конечного числа элементарных преобразований, называются *эквивалентными*, $A \sim B$.

Примеры элементарных преобразований матриц:

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 3 & -6 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} - \text{элементы третьей строки матрицы}$$

умножили на $1/3$ или разделили на 3, с меньшими числами легче проводить преобразования;

$$2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & -6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -1 \\ 1 & -6 & 3 \end{pmatrix} - \text{к элементам второй строки добавили}$$

элементы первой строки, умноженные на « -2 », для того чтобы получить на месте элемента a_{21} ноль;

$$3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} - \text{переставили местами первую и вторую}$$

строки, для того получить верхнюю треугольную матрицу.

Удобнее реализовать метод Гаусса на расширенной матрице системы

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right),$$

в которой к матрице коэффициентов справа приписывается столбец свободных членов. Таким образом, в расширенной матрице A' содержится матрица A системы. Все преобразования в методе Гаусса выполняются со строками, т.е. с уравнениями системы (1.3). Этот метод состоит из двух этапов, условно называемых прямым и обратным ходами.

Прямой ход включает преобразование расширенной матрицы в ступенчатый вид с использованием элементарных операций над строками. Матрица называется *ступенчатой*, если в каждой строке, начиная со второй, первый ненулевой элемент находится правее первого ненулевого элемента предыдущей строки.

Затем проводится анализ системы на совместность и определенность путем сравнения количества ненулевых строк преобразованной матрицы системы A (расположена в матрице A' до вертикальной черты) и преобразованной расширенной матрицы A' . Нулевыми являются строки, полностью состоящие из нулей. Возможны следующие варианты:

- количество ненулевых строк преобразованной матрицы A меньше количества ненулевых строк преобразованной матрицы A' , тогда система является несовместной (решений нет);
- количество ненулевых строк обеих матриц одинаковое и равно числу неизвестных n , тогда система имеет единственное решение (определенная);
- количество ненулевых строк обеих преобразованных матриц A и A' одинаковое, но меньше числа неизвестных n , тогда система имеет бесконечно много решений (неопределенная).

Если система имеет бесконечно много решений, некоторые переменные считаются свободными, а остальные – главными, которые выражаются через свободные. Количество свободных переменных равно разности числа неизвестных n и количества ненулевых строк преобразованных матриц.

Обратный ход заключается в восстановлении системы уравнений по ступенчатой матрице и нахождении ее решения. Восстановленная таким образом система является ступенчатой. Решаем систему, начиная с последнего уравнения, находим значения неизвестных и подставляем их в предпоследнее уравнение, решаем его и так далее поднимаемся вверх. Если очередное уравнение содержит неизвестных более одного, все неизвестные, кроме одного, объявляем свободными и в дальнейшем решении оставшиеся неизвестные через них выражаем.

1.2. ЗАДАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

По теме «Линейная алгебра» для самостоятельного решения предлагается 5 заданий. В каждом из них 30 задач, номера которых соответствуют номеру варианта. Порядок выбора параметров p и q описан во введении к учебному пособию.

Задание 1.1. Проверьте, верно ли равенство $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, если

матрица $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & q \\ p-q & 3 & 2 \\ -5 & p & 0 \end{pmatrix}$, матрица A приведена в табл. 1.1.

Таблица 1.1

1.	$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix}$	2.	$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix}$	3.	$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix}$
4.	$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix}$	5.	$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix}$	6.	$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix}$
7.	$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix}$	8.	$A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix}$	9.	$A = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix}$

10.	$A = \begin{pmatrix} 11 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix}$	11.	$A = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix}$	12.	$A = \begin{pmatrix} 13 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix}$
13.	$A = \begin{pmatrix} 14 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix}$	14.	$A = \begin{pmatrix} 15 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix}$	15.	$A = \begin{pmatrix} 16 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix}$
16.	$A = \begin{pmatrix} 17 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix}$	17.	$A = \begin{pmatrix} 18 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix}$	18.	$A = \begin{pmatrix} 19 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix}$
19.	$A = \begin{pmatrix} 20 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix}$	20.	$A = \begin{pmatrix} 21 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix}$	21.	$A = \begin{pmatrix} 21 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix}$
22.	$A = \begin{pmatrix} 23 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix}$	23.	$A = \begin{pmatrix} 24 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix}$	24.	$A = \begin{pmatrix} 25 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix}$
25.	$A = \begin{pmatrix} 26 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix}$	26.	$A = \begin{pmatrix} 27 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix}$	27.	$A = \begin{pmatrix} 28 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix}$
28.	$A = \begin{pmatrix} 29 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix}$	29.	$A = \begin{pmatrix} 30 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix}$	30.	$A = \begin{pmatrix} 31 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix}$

Задание 1.2. Вычислите определитель.

$$\begin{array}{llll}
 \mathbf{1.} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix} & \mathbf{2.} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 10 & 1 & -2 \end{vmatrix} & \mathbf{3.} \begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} & \mathbf{4.} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 7 \\ 11 & 5 & -2 \end{vmatrix} \\
 \mathbf{5.} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 8 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} & \mathbf{6.} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix} & \mathbf{7.} \begin{vmatrix} 3 & -5 & 8 \\ 0 & 1 & 10 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} & \mathbf{8.} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} \\
 \mathbf{9.} \begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 11 & 4 \end{vmatrix} & \mathbf{10.} \begin{vmatrix} 0 & 7 & -2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} & \mathbf{11.} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 7 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix} & \mathbf{12.} \begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ -11 & 0 & 3 \end{vmatrix}
 \end{array}$$

$$13. \begin{vmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 10 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$14. \begin{vmatrix} 10 & -3 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$15. \begin{vmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & -2 \\ -3 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$16. \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 9 \\ 6 & -7 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$17. \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & 7 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$18. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & -4 \\ 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}.$$

$$19. \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix}.$$

$$20. \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$21. \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -5 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$22. \begin{vmatrix} 11 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$23. \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$24. \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$25. \begin{vmatrix} 4 & 5 & -7 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$26. \begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 9 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$27. \begin{vmatrix} 6 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$28. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 7 \\ 2 & 11 & -2 \end{vmatrix}.$$

$$29. \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 4 \\ -5 & 8 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$30. \begin{vmatrix} 7 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 7 \\ 4 & 8 & 0 \end{vmatrix}.$$

Задание 1.3. Выясните, существует ли обратная матрица A^{-1} для матрицы A и найдите ее, если она существует. Выполните проверку результата вычислений с помощью равенства

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E, \text{ где } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -4 & 9 & p \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & p \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 4 \\ -1 & -1 & p \\ 10 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 3 & 1 & p \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$5. A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & p \\ 8 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$6. A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & p \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$7. A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & p \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$8. A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & p \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$9. A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & p \\ 2 & 2 & -7 \end{pmatrix}.$$

$$10. A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -1 \\ 5 & -5 & p \\ 10 & 3 & 2 \end{pmatrix}. \quad 11. A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 7 & 1 & p \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}. \quad 12. A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & p \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$13. A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & p \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}. \quad 14. A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & p \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}. \quad 15. A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & p \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$16. A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 5 & 3 & p \\ 1 & -6 & 1 \end{pmatrix}. \quad 17. A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & p \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad 18. A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 3 \\ -4 & 2 & p \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$19. A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & p \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad 20. A = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 4 \\ 5 & -1 & p \\ 10 & -2 & 0 \end{pmatrix}. \quad 21. A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ -6 & 2 & p \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$22. A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & p \\ 8 & 4 & -1 \end{pmatrix}. \quad 23. A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 3 & 5 & p \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix}. \quad 24. A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 8 & -5 & p \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$25. A = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 1 & 8 & p \\ 3 & 5 & -5 \end{pmatrix}. \quad 26. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 9 & p \\ 2 & -2 & 7 \end{pmatrix}. \quad 27. A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -1 \\ 5 & 5 & p \\ 11 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$28. A = \begin{pmatrix} -9 & 6 & 5 \\ 7 & -2 & p \\ 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}. \quad 29. A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 12 & p \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}. \quad 30. A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & p \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задание 1.4. Дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Найдите решение системы: 1) по формулам Крамера; 2) матричным методом, предварительно записав систему в матричном виде.

$$1. \begin{cases} 2x + y - z = 0, \\ 3x + 4y - 2z = 11, \\ 3x - 2y + 4z = p. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x + y + z = -1, \\ 2x - y + 2z = -4, \\ 4x + y + 4z = p. \end{cases} \quad 3. \begin{cases} 3x + 2y + z = 5, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ 2x + y + 3z = p. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x + 2y + 4z = 31, \\ 5x + y + 2z = 29, \\ 3x - y + z = p. \end{cases} \quad 5. \begin{cases} 5x - 2y + z = 4, \\ 2x + y - z = 2, \\ 3x + 5y - 2z = p. \end{cases} \quad 6. \begin{cases} 3x - y - z = 13, \\ x + 3y - 2z = -9, \\ 2x - y + 4z = p. \end{cases}$$

$$\begin{array}{lll}
7. \begin{cases} x+2y-z=2, \\ y+3z=7, \\ x-y+z=p. \end{cases} & 8. \begin{cases} x+3y-z=11, \\ 2x+2y+4z=2, \\ x-5y+2z=p. \end{cases} & 9. \begin{cases} 5x-y+2z=-2, \\ 2x+3y-4z=19, \\ x+2y+3z=p. \end{cases} \\
10. \begin{cases} 2x+y-z=5, \\ x-2y+2z=-5, \\ 7x+y-z=p. \end{cases} & 11. \begin{cases} x+y-z=8, \\ x-y+z=3, \\ -x+y+z=p. \end{cases} & 12. \begin{cases} 9x-6y+3z=1, \\ 5x-8y+9z=3, \\ 2x+y-3z=p. \end{cases} \\
13. \begin{cases} 5x+y-3z=6, \\ 2x-y+7z=1, \\ 4x+3y-z=p. \end{cases} & 14. \begin{cases} 5x-y+z=0, \\ x+2y+3z=14, \\ 3x+3y+2z=p. \end{cases} & 15. \begin{cases} x+3y-6z=12, \\ 3x+2y+5z=-10, \\ 2x+5y-3z=p. \end{cases} \\
16. \begin{cases} -5x+y+z=0, \\ x-6y+z=1, \\ x+y-7z=p. \end{cases} & 17. \begin{cases} x-3y+2z=3, \\ 5x+4y-z=4, \\ 3x+2y+z=p. \end{cases} & 18. \begin{cases} x+2y+z=14, \\ x+y+2z=6, \\ x+y=p. \end{cases} \\
19. \begin{cases} 3x+2y+z=5, \\ x+y-z=0, \\ 4x-y+5z=p. \end{cases} & 20. \begin{cases} 2x+y-z=5, \\ x-2y+2z=-5, \\ 7x+y-z=p. \end{cases} & 21. \begin{cases} 5x+3y-4z=-1, \\ 5x+y+7z=3, \\ 3x-5y+6z=p. \end{cases} \\
22. \begin{cases} 3x-y+z=4, \\ 5x+y+z=10, \\ 3x-2y+4z=p. \end{cases} & 23. \begin{cases} 5x-2y+z=4, \\ 2x+3y-7z=-2, \\ 4x+5y-2z=p. \end{cases} & 24. \begin{cases} 3x-5y+2z=5, \\ 2x+y-4z=-3, \\ 7x-y+5z=p. \end{cases} \\
25. \begin{cases} 4x+5y-10z=9, \\ 2x-y+7z=1, \\ 3x+2y-3z=p. \end{cases} & 26. \begin{cases} 3x+10y-7z=-4, \\ 2x+8y+z=3, \\ 4x-7y+5z=p. \end{cases} & 27. \begin{cases} 10x-2y+5z=3, \\ 4x+3y-2z=1, \\ 7x+8y-6z=p. \end{cases} \\
28. \begin{cases} 6x-7y+2z=-5, \\ 3x+8y+5z=13, \\ 2x-y+4z=p. \end{cases} & 29. \begin{cases} 5x+2y-z=6, \\ 3x-4y+2z=1, \\ 2x+5y-3z=p. \end{cases} & 30. \begin{cases} x+2y-4z=-1, \\ 5x+4y-2z=7, \\ 3x+7y-5z=p. \end{cases}
\end{array}$$

Задание 1.5. Решите системы методом Гаусса.

$$\begin{array}{ll}
1. \text{ а) } \begin{cases} x_1+2x_2-4x_3=5, \\ 2x_1-3x_2+6x_3=10, \\ 2x_1+4x_2-8x_3=5; \end{cases} & б) \begin{cases} x_1+2x_2-4x_3+x_4=5, \\ 2x_1-3x_2+6x_3+x_4=10, \\ 2x_1+4x_2-8x_3+x_4=5. \end{cases}
\end{array}$$

$$2. \text{ a) } \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 4, \\ 12x_1 - 6x_2 + 9x_3 = 7; \end{cases}$$

$$3. \text{ a) } \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 4, \\ 9x_1 + 3x_2 - 15x_3 = 5; \end{cases}$$

$$4. \text{ a) } \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -2, \\ 4x_1 + 7x_2 + x_3 = 5, \\ -2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 5; \end{cases}$$

$$5. \text{ a) } \begin{cases} 6x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 12x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 10, \\ 4x_1 - 7x_2 + 10x_3 = 3; \end{cases}$$

$$6. \text{ a) } \begin{cases} 9x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 6x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 10; \end{cases}$$

$$7. \text{ a) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 5, \\ 2x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 3, \\ 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 5; \end{cases}$$

$$8. \text{ a) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 5, \\ 3x_1 + 6x_2 - 12x_3 = 2, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 7; \end{cases}$$

$$9. \text{ a) } \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_1 - 2x_2 + 9x_3 = 7; \end{cases}$$

$$10. \text{ a) } \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 15x_3 = 5; \end{cases}$$

$$11. \text{ a) } \begin{cases} x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 8, \\ 2x_1 + 10x_2 - 8x_3 = 2, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = 5; \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 7, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 1, \\ 5x_1 + x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 8. \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1. \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9. \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9. \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7, \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9. \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7, \\ 8x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11. \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9, \\ 8x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11. \end{cases}$$

$$12. \text{ a) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 6x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 7, \\ 3x_1 - 7x_2 + x_3 = 3; \end{cases}$$

$$13. \text{ a) } \begin{cases} x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ -3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 10; \end{cases}$$

$$14. \text{ a) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 2, \\ 2x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 5, \\ 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 11; \end{cases}$$

$$15. \text{ a) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 12, \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 6; \end{cases}$$

$$16. \text{ a) } \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = 4, \\ 12x_1 - 6x_2 + 9x_3 = 3; \end{cases}$$

$$17. \text{ a) } \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = -5, \\ 9x_1 + 3x_2 - 15x_3 = 5; \end{cases}$$

$$18. \text{ a) } \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - 4x_3 = -2, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 5, \\ -2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 9; \end{cases}$$

$$19. \text{ a) } \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 8x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 5, \\ 3x_1 + 11x_2 + 10x_3 = 2; \end{cases}$$

$$20. \text{ a) } \begin{cases} 9x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 5, \\ x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 12, \\ 6x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 2; \end{cases}$$

$$21. \text{ a) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 7, \\ 2x_1 + 4x_2 - 8x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 + 8x_3 = 3; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7, \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9, \\ 8x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 5, \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 7, \\ 4x_1 - 2x_2 + 14x_3 - 31x_4 = 18. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 5, \\ 6x_1 + x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 2, \\ 5x_1 + 4x_2 - 13x_3 + 7x_4 = -3. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 8x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 6. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 6x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - 16x_2 + 14x_3 - 4x_4 = -2. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 2, \\ 6x_1 + 6x_2 + 8x_3 - 12x_4 = 3. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 6x_1 + 10x_2 - 3x_3 + x_4 = 5, \\ 5x_1 + 8x_2 - x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 = -6. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 4, \\ x_2 + 7x_3 + x_4 = -5, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1. \end{cases}$$

$$22. \text{ a) } \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 5, \\ 6x_1 - 6x_2 - 12x_3 = 8, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 7; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3, \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 7, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$$

$$23. \text{ a) } \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_1 - x_2 + 7x_3 = 7; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3. \end{cases}$$

$$24. \text{ a) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 13, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 4; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -2, \\ 2x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$$

$$25. \text{ a) } \begin{cases} x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 11, \\ 2x_1 - 10x_2 + 8x_3 = 2, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = 9; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 7. \end{cases}$$

$$26. \text{ a) } \begin{cases} x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 9, \\ -x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + 6x_3 = 1; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 3x_2 + x_3 - 2x_4 = -5, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 3, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$$

$$27. \text{ a) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -7, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 8; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_1 - 5x_2 - 2x_4 = -2. \end{cases}$$

$$28. \text{ a) } \begin{cases} x_1 + x_2 - 10x_3 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 8, \\ -3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -3; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 6, \\ 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

$$29. \text{ a) } \begin{cases} x_1 - x_2 - 4x_3 = -2, \\ 2x_1 - 2x_2 - 8x_3 = 13, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 10; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$$

$$30. \text{ a) } \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 11, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 4x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 11; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$$

1.3. РАЗБОР РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ ВАРИАНТА № 30

$$(p = 18, q = 1)$$

Задание 1.1. Проверьте, верно ли равенство $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$,

$$\text{где } A = \begin{pmatrix} 31 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 17 & 3 & 2 \\ -5 & 18 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрицу B получили, подставив $p=18, q=1$. Для того чтобы проверить, верно ли равенство, необходимо последовательно выполнить операции над матрицами сначала в левой части, затем в правой.

Рассмотрим левую часть и найдем $(A+B)^2$. Во-первых, найдем сумму матриц A и B , и только после этого возведем полученную матрицу в квадрат. Квадрат матрицы равен произведению этой матрицы на себя, т.е. $(A+B)^2 = (A+B) \cdot (A+B)$. Итак, найдем сумму матриц. Для этого необходимо сложить соответствующие элементы обеих матриц:

$$\begin{aligned} A+B &= \begin{pmatrix} 31 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 17 & 3 & 2 \\ -5 & 18 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 31+2 & 4+2 & 3+1 \\ -1+17 & 3+3 & 2+2 \\ 1-5 & -4+18 & -5+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 6 & 4 \\ 16 & 6 & 4 \\ -4 & 14 & -5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Далее, найдем

$$C = (A+B)^2 = \begin{pmatrix} 33 & 6 & 4 \\ 16 & 6 & 4 \\ -4 & 14 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 33 & 6 & 4 \\ 16 & 6 & 4 \\ -4 & 14 & -5 \end{pmatrix}.$$

Алгоритм умножения матриц приведен в пункте 1.1.2. Получится матрица C , в которой элемент c_{11} равен сумме произведений соответствующих

(по порядку) элементов первой строки матрицы $(A + B)$ на элементы второго столбца матрицы $(A + B)$:

$$c_{11} = 33 \cdot 33 + 6 \cdot 16 + 4 \cdot (-4) = 1089 + 96 - 16 = 1169.$$

Второй элемент первой строки c_{12} новой матрицы равен сумме произведений соответствующих элементов первой строки матрицы $(A + B)$ на элементы второго столбца матрицы:

$$c_{12} = 33 \cdot 6 + 6 \cdot 6 + 4 \cdot 14 = 198 + 36 + 56 = 290.$$

Аналогично остальные элементы. Для вычисления элемента c_{13} выбираются первая строка и второй столбец матрицы $(A + B)$:

$$c_{13} = 33 \cdot 4 + 6 \cdot 4 + 4 \cdot (-5) = 132 + 24 - 20 = 136.$$

Формируем вторую строку новой матрицы C . Для элемента c_{21} выбираем вторую строку и первый столбец матрицы:

$$c_{21} = 16 \cdot 33 + 6 \cdot 16 + 4 \cdot (-4) = 528 + 96 - 16 = 608.$$

Для элемента c_{22} – вторую строку и второй столбец матрицы $(A + B)$:

$$c_{22} = 16 \cdot 6 + 6 \cdot 6 + 4 \cdot 14 = 96 + 36 + 56 = 188.$$

Для элемента c_{23} – вторую строку и третий столбец матрицы $(A + B)$:

$$c_{23} = 16 \cdot 4 + 6 \cdot 4 + 4 \cdot (-5) = 64 + 24 - 20 = 68.$$

Переходим к созданию третьей строки матрицы $(A + B)^2$. Для вычисления элемента c_{31} выбираются третья строка и второй столбец матрицы $(A + B)$:

$$c_{31} = -4 \cdot 33 + 14 \cdot 16 - 5 \cdot (-4) = -132 + 224 + 20 = 112.$$

Для элемента c_{32} – третью строку и второй столбец матрицы $(A + B)$:

$$c_{32} = -4 \cdot 6 + 14 \cdot 6 - 5 \cdot 14 = -24 + 84 - 70 = -10.$$

И, наконец, элемент c_{33} :

$$c_{33} = -4 \cdot 4 + 14 \cdot 4 - 5 \cdot (-5) = -16 + 56 + 25 = 65.$$

Оформляется описанное произведение матриц следующим образом:

$$\begin{aligned}
 (A+B)^2 &= \begin{pmatrix} 33 & 6 & 4 \\ 16 & 6 & 4 \\ -4 & 14 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 33 & 6 & 4 \\ 16 & 6 & 4 \\ -4 & 14 & -5 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 33 \cdot 33 + 6 \cdot 16 + 4 \cdot (-4) & 33 \cdot 6 + 6 \cdot 6 + 4 \cdot 14 & 33 \cdot 4 + 6 \cdot 4 + 4 \cdot (-5) \\ 16 \cdot 33 + 6 \cdot 16 + 4 \cdot (-4) & 16 \cdot 6 + 6 \cdot 6 + 4 \cdot 14 & 16 \cdot 4 + 6 \cdot 4 + 4 \cdot (-5) \\ -4 \cdot 33 + 14 \cdot 16 - 5 \cdot (-4) & -4 \cdot 6 + 14 \cdot 6 - 5 \cdot 14 & -4 \cdot 4 + 14 \cdot 4 - 5 \cdot (-5) \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1169 & 290 & 136 \\ 608 & 188 & 68 \\ 112 & -10 & 65 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим правую часть $A^2 + 2AB + B^2$. Во-первых, найдем произведение матриц A и B и умножим его на 2, во-вторых, найдем квадраты матриц A и B как произведение матрицы на саму себя, и в-третьих, найдем сумму трех полученных матриц. Выполним умножение матрицы A на матрицу B :

$$\begin{aligned}
 A \cdot B &= \begin{pmatrix} 31 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 17 & 3 & 2 \\ -5 & 18 & 0 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 31 \cdot 2 + 4 \cdot 17 - 3 \cdot 5 & 31 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 3 \cdot 18 & 31 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 0 \\ -1 \cdot 2 + 3 \cdot 17 - 2 \cdot 5 & -1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 18 & -1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 0 \\ 1 \cdot 2 + (-4) \cdot 17 + 5 \cdot 5 & 1 \cdot 2 - 4 \cdot 3 - 5 \cdot 18 & 1 \cdot 1 - 4 \cdot 2 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 115 & 128 & 39 \\ 39 & 43 & 5 \\ -41 & -100 & -7 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Следующее действие – умножение полученной матрицы на число «2»:

$$\begin{aligned}
 2AB &= 2 \cdot \begin{pmatrix} 115 & 128 & 39 \\ 39 & 43 & 5 \\ -41 & -100 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 115 & 2 \cdot 128 & 2 \cdot 39 \\ 2 \cdot 39 & 2 \cdot 43 & 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot (-41) & 2 \cdot (-100) & 2 \cdot (-7) \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 230 & 256 & 78 \\ 78 & 86 & 10 \\ -82 & -200 & -14 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Далее находим квадраты матриц A и B :

$$\begin{aligned}
 A^2 &= \begin{pmatrix} 31 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 31 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 31 \cdot 31 + 4 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 & 31 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 3 \cdot (-4) & 31 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot (-5) \\ -1 \cdot 31 + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 & -1 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot (-4) & -1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-5) \\ 1 \cdot 31 - 4 \cdot (-1) - 5 \cdot 1 & 1 \cdot 4 - 4 \cdot 3 - 5 \cdot (-4) & 1 \cdot 3 - 4 \cdot 2 - 5 \cdot (-5) \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 960 & 124 & 86 \\ -32 & -3 & -7 \\ 30 & 12 & 20 \end{pmatrix};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B^2 &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 17 & 3 & 2 \\ -5 & 18 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 17 & 3 & 2 \\ -5 & 18 & 0 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 2 \cdot 17 - 1 \cdot 5 & 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 18 & 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 0 \\ 17 \cdot 2 + 3 \cdot 17 - 2 \cdot 5 & 17 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 18 & 17 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 0 \\ -5 \cdot 2 + 18 \cdot 17 + 0 & -5 \cdot 2 + 18 \cdot 3 + 0 & -5 \cdot 1 + 18 \cdot 2 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 28 & 6 \\ 75 & 79 & 23 \\ 296 & 44 & 26 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Теперь найдем сумму матриц:

$$\begin{aligned}
 A^2 + 2AB + B^2 &= \begin{pmatrix} 960 & 124 & 86 \\ -32 & -3 & -7 \\ 30 & 12 & 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 230 & 256 & 78 \\ 78 & 86 & 10 \\ -82 & -200 & -14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 33 & 28 & 6 \\ 75 & 79 & 23 \\ 296 & 44 & 26 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 960 + 230 + 33 & 124 + 256 + 28 & 86 + 78 + 6 \\ -32 + 78 + 75 & -3 + 86 + 79 & -7 + 10 + 23 \\ 30 - 82 + 296 & 12 - 200 + 44 & 20 - 14 + 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1223 & 408 & 170 \\ 121 & 162 & 26 \\ 244 & -144 & 32 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Сравним полученные в левой и правой частях равенства матрицы:

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 1169 & 290 & 136 \\ 608 & 188 & 68 \\ 112 & -10 & 65 \end{pmatrix} \text{ и } A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 1223 & 408 & 170 \\ 121 & 162 & 26 \\ 244 & -144 & 32 \end{pmatrix}.$$

Видим, что формула сокращенного умножения $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

для заданных матриц не выполняется, а именно

$$\begin{pmatrix} 1169 & 290 & 136 \\ 608 & 188 & 68 \\ 112 & -10 & 65 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1223 & 408 & 170 \\ 121 & 162 & 26 \\ 244 & -144 & 32 \end{pmatrix}.$$

Ответ: для заданных матриц $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

Задание 1.2. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 7 \\ 4 & 8 & 0 \end{vmatrix}$.

Решение. Вычислим определитель по правилу треугольников. Найдем сначала сумму произведений элементов, стоящих на главной диагонали и в вершинах треугольников, основания которых параллельны главной диагонали, и возьмем их со знаком «+» (т.е. без изменения знака, полученного в результате умножения элементов):

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 7 \\ 4 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 7 \cdot 2 \cdot 0 + 3 \cdot 7 \cdot 4 + 8 \cdot 1 \cdot 8 = 0 + 84 + 64 = 148.$$

Затем найдем сумму произведений элементов, стоящих на побочной диагонали и в вершинах треугольников, основания которых параллельны побочной диагонали, и возьмем их со знаком «−» (т.е. с изменением знака на противоположный, полученного в результате умножения элементов):

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 7 \\ 4 & 8 & 0 \end{vmatrix} = -8 \cdot 2 \cdot 4 - 7 \cdot 7 \cdot 8 - 3 \cdot 1 \cdot 0 = -64 - 392 - 0 = -456.$$

Заданный определитель равен сумме полученных значений:

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 7 \\ 4 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 148 - 456 = -308.$$

Ответ: −308.

Задание 1.3. Выясните, существует ли обратная матрица A^{-1} для

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 18 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

и найдите ее, если она существует. Выполните проверку результата вычислений с помощью равенства

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E, \text{ где } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Убедимся, что обратная матрица существует. Обратная матрица существует только для невырожденной матрицы, т.е. $\det A \neq 0$. Поэтому вычислим $\det A$ также, как в задании 1.2:

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 18 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -9 + 36 - 4 - 3 - 36 - 12 = -28 \neq 0.$$

Определитель отличен от нуля, поэтому матрица имеет обратную A^{-1} .

Алгоритм построения обратной матрицы приведен в пункте 1.2. Для матрицы третьего порядка формула (1.3) вычисления обратной матрицы принимает вид

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A},$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы A . Найдем алгебраические дополнения к элементам первой строки матрицы A . Для того чтобы найти алгебраическое дополнение A_{11} , составим определитель матрицы, полученной из матрицы A вычеркиванием первой строки и первого столбца в ней, и умножим на $(-1)^{1+1}$ (см. пункт 1.1):

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 18 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 36 = 45.$$

Далее, для того чтобы найти A_{12} , составим минор M_{12} вычеркиванием первой строки и второго столбца матрицы A , умножим его на $(-1)^{1+2}$:

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 18 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(6 - 18) = 12.$$

Аналогично при нахождении алгебраического дополнения A_{13} вычеркивается первая строка и третий столбец в матрице A , и с учетом знака получаем

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 3 = -7.$$

Алгебраические дополнения к элементам второй строки матрицы A :

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -(6 + 2) = -8 \quad \text{— при составлении минора вычеркнули}$$

вторую строку и первый столбец матрицы A ;

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 1 = -4 \quad \text{— вычеркнули вторую строку и второй}$$

столбец матрицы A ;

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{— вычеркнули вторую строку и третий столбец}$$

матрицы A .

Перейдем к нахождению алгебраических дополнений к элементам третьей строки матрицы A :

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 18 \end{vmatrix} = 36 - 3 = 33 \quad \text{— при составлении минора вычеркнули}$$

третью строку и первый столбец матрицы A ;

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 18 \end{vmatrix} = -(-18 - 2) = 20 \quad \text{— вычеркнули третью строку и второй}$$

столбец матрицы A ;

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 4 = -7 \quad \text{— вычеркнули третью строку и третий}$$

столбец матрицы A .

Построим присоединенную матрицу $\tilde{A}$, записывая A_{11} , A_{12} , A_{13} первым столбцом, A_{21} , A_{22} , A_{23} – вторым столбцом, A_{31} , A_{32} , A_{33} – третьим столбцом:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 45 & -8 & 33 \\ 12 & -4 & 20 \\ -7 & 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

Далее, согласно формуле (1.2),

$$A^{-1} = -\frac{1}{28} \begin{pmatrix} 45 & -8 & 33 \\ 12 & -4 & 20 \\ -7 & 0 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -45/28 & 8/28 & -33/28 \\ -12/28 & 4/28 & -20/28 \\ 7/28 & 0 & 7/28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -45/28 & 2/7 & -33/28 \\ -3/7 & 1/7 & -5/7 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Проверка результатов вычислений заключается в проверке выполнений равенств (1.1) для матрицы A и построенной обратной A^{-1} . Итак,

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot A &= \begin{pmatrix} -45/28 & 2/7 & -33/28 \\ -3/7 & 1/7 & -5/7 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 18 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{45}{28} + \frac{4}{7} - \frac{33}{28} & -\frac{90}{28} + \frac{6}{7} - \frac{66}{28} & -\frac{45}{28} + \frac{36}{7} - \frac{99}{28} \\ \frac{3}{7} + \frac{2}{7} - \frac{5}{7} & -\frac{6}{7} + \frac{3}{7} + \frac{10}{7} & -\frac{3}{7} + \frac{18}{7} - \frac{15}{7} \\ -\frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{4} & \frac{2}{4} + 0 - \frac{2}{4} & \frac{1}{4} + 0 + \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{28}{28} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{4} \end{pmatrix} = E; \\ AA^{-1} &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 18 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -45/28 & 2/7 & -33/28 \\ -3/7 & 1/7 & -5/7 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{45}{28} - \frac{6}{7} + \frac{1}{4} & -\frac{2}{7} + \frac{2}{7} + 0 & \frac{33}{28} - \frac{10}{7} + \frac{1}{4} \\ -\frac{90}{28} - \frac{3}{7} + \frac{18}{4} & \frac{4}{7} + \frac{3}{7} + 0 & -\frac{66}{28} - \frac{15}{7} + \frac{18}{4} \\ -\frac{45}{28} + \frac{6}{7} + \frac{3}{4} & \frac{2}{7} - \frac{2}{7} + 0 & -\frac{33}{28} + \frac{10}{7} + \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{28}{28} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{28}{28} \end{pmatrix} = E. \end{aligned}$$

Ответ: $\det A = -28 \neq 0 \Rightarrow$ обратная матрица существует,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -45/28 & 2/7 & -33/28 \\ -3/7 & 1/7 & -5/7 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}, \text{ равенство } A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E \text{ выполняется.}$$

Задание 1.4. Дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = -1, \\ 5x + 4y - 2z = 7, \\ 3x + 7y - 5z = 18. \end{cases}$$

Найдите решение системы:

- 1) по формулам Крамера;
- 2) матричным методом, предварительно записав систему в матричном виде.

Решение.

1. Решение системы трех линейных уравнений методом Крамера сводится к нахождению четырех определителей: главного определителя Δ и трех вспомогательных определителей Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 (см. пункт 1.1.4). Данный метод может быть применен, только если главный определитель системы отличен от нуля. По правилу треугольников найдем главный определитель:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 5 & 4 & -2 \\ 3 & 7 & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot (-5) + 2 \cdot (-2) \cdot 3 + (-4) \cdot 5 \cdot 7 - (-4) \cdot 4 \cdot 3 - 1 \cdot (-2) \cdot 7 - 2 \cdot 5 \cdot (-5) = \\ &= -20 - 12 - 140 + 48 + 14 + 50 = -60 \neq 0. \end{aligned}$$

Определитель отличен от нуля, следовательно, данным методом эту систему линейных уравнений решить можно.

Для вычисления вспомогательного определителя Δ_1 заменим первый столбец главного определителя столбцом свободных членов, для вычисления Δ_2 аналогично заменим второй столбец главного определителя и для вычисления определителя Δ_3 – третий столбец столбцом свободных членов:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 7 & 4 & -2 \\ 18 & 7 & -5 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 4 \cdot (-5) + 2 \cdot (-2) \cdot 18 + (-4) \cdot 7 \cdot 7 - (-4) \cdot 4 \cdot 18 - \\ &- (-1) \cdot (-2) \cdot 7 - 2 \cdot 7 \cdot (-5) = 20 - 72 - 196 + 288 - 14 + 70 = 96; \end{aligned}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 5 & 7 & -2 \\ 3 & 18 & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 \cdot (-5) + (-1) \cdot (-2) \cdot 3 + (-4) \cdot 5 \cdot 18 -$$

$$- (-4) \cdot 7 \cdot 3 - 1 \cdot (-2) \cdot 18 - (-1) \cdot 5 \cdot (-5) = -35 + 6 - 360 + 84 + 36 - 25 = -294;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 18 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 18 + 2 \cdot 7 \cdot 3 + (-1) \cdot 5 \cdot 7 - (-1) \cdot 4 \cdot 3 - 1 \cdot 7 \cdot 7 - 2 \cdot 5 \cdot 18 =$$

$$= 72 + 42 - 35 + 12 - 49 - 180 = -138.$$

Далее применяем формулы Крамера (1.7):

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{96}{-60} = -\frac{8}{5}, y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-294}{-60} = \frac{49}{10}, z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-138}{-60} = \frac{23}{10}.$$

Ответ. $x = -\frac{8}{5}, y = \frac{49}{10}, z = \frac{23}{10}.$

2. Запишем систему в матричном виде: $A \cdot X = B$. Здесь A – матрица системы линейных уравнений, B – матрица-столбец свободных членов, X – матрица-столбец неизвестных:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 5 & 4 & -2 \\ 3 & 7 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 18 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 5 & 4 & -2 \\ 3 & 7 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

По формуле (1.6) решение матричного уравнения имеет вид $X = A^{-1}B$, где A^{-1} – обратная матрица матрицы системы. Подробный разбор алгоритма нахождения обратной матрицы представлен в решении задания 1.3. Матрицу X можно найти по формуле

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{\Delta} \cdot \tilde{A} \cdot B = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \cdot B.$$

Определитель матрицы уже найден в предыдущем пункте $\Delta = -60$ и он отличен от нуля, следовательно, матричным методом данную систему линейных уравнений тоже можно решать. Для этого найдем обратную матрицу A^{-1} , умножим ее слева направо на матрицу-столбец свободных членов B , получим матрицу-столбец неизвестных X .

Найдем матрицу A^{-1} , обратную матрице A . Вычислим алгебраические дополнения к элементам строк матрицы A . Развернутое объяснение этих действий описано в разборе решения задания 1.3. Вычеркнем первую строку и первый столбец в матрице A – составим и вычислим алгебраическое дополнение A_{11} :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = -20 + 14 = -6.$$

Аналогично остальные алгебраические дополнения:

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -(-25 + 6) = 19, \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 35 - 12 = 23.$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = -(-10 + 28) = -18, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -5 + 12 = 7,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -(7 - 6) = -1, \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 16 = 12,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -(-2 + 20) = -18, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 10 = -6.$$

Построим присоединенную матрицу $\tilde{A}$ – матрицу алгебраических дополнений A_{ij} , найденных к элементам строк матрицы A , но записанных столбцами. То есть элементы A_{11} , A_{12} , A_{13} записываем первым столбцом, элементы A_{21} , A_{22} , A_{23} – вторым столбцом, элементы A_{31} , A_{32} , A_{33} – третьим столбцом. По сути, применяем операцию транспонирования, т.е. меняем местами строки и столбцы:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -6 & -18 & 12 \\ 19 & 7 & -18 \\ 23 & -1 & -6 \end{pmatrix}.$$

Далее найдем матрицу X :

$$\begin{aligned} X &= -\frac{1}{60} \cdot \begin{pmatrix} -6 & -18 & 12 \\ 19 & 7 & -18 \\ 23 & -1 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 18 \end{pmatrix} = -\frac{1}{60} \cdot \begin{pmatrix} -6 \cdot (-1) - 18 \cdot 7 + 12 \cdot 18 \\ 19 \cdot (-1) + 7 \cdot 7 - 18 \cdot 18 \\ 23 \cdot (-1) - 1 \cdot 7 - 6 \cdot 18 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{60} \cdot \begin{pmatrix} 6 - 126 + 216 \\ -19 + 49 - 324 \\ -23 - 7 - 108 \end{pmatrix} = -\frac{1}{60} \cdot \begin{pmatrix} 96 \\ -294 \\ -138 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 96/-60 \\ -294/-60 \\ -138/-60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8/5 \\ 49/10 \\ 23/10 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Мы нашли вектор-столбец неизвестных

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8/5 \\ 49/10 \\ 23/10 \end{pmatrix}.$$

Так как матрицы равны, то $x = -\frac{8}{5}$, $y = \frac{49}{10}$, $z = \frac{23}{10}$.

Ответ: $x = -\frac{8}{5}$, $y = \frac{49}{10}$, $z = \frac{23}{10}$.

Задание 1.5. Решите системы методом Гаусса:

$$a) \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 11, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 4x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 11; \end{cases} \quad б) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$$

Решение.

а) Решим систему линейных уравнений методом Гаусса (пункт 1.1.4).

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 11, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 4x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 11. \end{cases}$$

Выпишем расширенную матрицу системы

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -4 & 11 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & -8 & 11 \end{array} \right).$$

С помощью элементарных преобразований строк приведем ее к ступенчатому виду. Для того чтобы получить первую «ступеньку», нужны нули на месте элементов a_{21} и a_{31} . Произведем элементарные преобразования матрицы A' : умножим элементы первой строки на « -1 » и прибавим к соответствующим элементам второй строки (вычтем из второй строки первую), получим $a_{21} = 0$; умножим элементы первой строки на « -2 » и прибавим к соответствующим элементам третьей строки, получим $a_{31} = 0$:

$$\begin{aligned} A' &= \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -4 & 11 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & -8 & 11 \end{array} \right) \cdot (-1) \quad \downarrow \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -4 & 11 \\ 2-2 & 1-2 & 1+4 & 3-11 \\ 4 & 4 & -8 & 11 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -4 & 11 \\ 0 & -1 & 5 & -8 \\ 4 & 4 & -8 & 11 \end{array} \right) \cdot (-2) \quad \downarrow \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -4 & 11 \\ 0 & -1 & 5 & -8 \\ 4-4 & 4-4 & -8+8 & 11-22 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -4 & 11 \\ 0 & -1 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Получили ступенчатую матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -4 & 11 \\ 0 & -1 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \end{array} \right)$$

Преобразованная матрица системы имеет две ненулевые строки (первая и вторая), а преобразованная расширенная матрица имеет три ненулевые строки, следовательно, система несовместна: решений нет.

Ответ: решений нет.

б) Решим систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$$

Выпишем расширенную матрицу системы

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right),$$

С помощью элементарных преобразований над строками матрицы приведем ее к ступенчатому виду.

На первом этапе получим нули в первом столбце под элементом $a_{11} = 1$, для этого умножим первую строку матрицы на «-1» и прибавим ко второй строке, затем умножим первую строку на «-3» и прибавим к третьей строке (помним, что вычисления необходимо производить и над коэффициентами, и над свободными членами системы):

$$\begin{aligned} A' &= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right) \cdot (-1) \downarrow \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & 1 \\ 1-1 & -3-2 & 1-0 & -1+4 & 2-1 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right) \cdot (-3) \downarrow \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & 3 & 1 \\ 3-3 & -2-6 & 1-0 & 1+12 & 4-3 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -8 & 1 & 13 & 1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

На втором этапе необходимо получить ноль на месте элемента $a_{11} = 1$ новой матрицы. Для этого умножим третью строку на «-5», а затем прибавим поэлементно к третьей строке вторую, умноженную на «8»:

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -8 & 1 & 13 & 1 \end{array} \right) \cdot (-5) \downarrow \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 40 & -5 & -65 & -5 \end{array} \right) \cdot 8 \downarrow \\ &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -40+40 & 5-8 & 65-24 & 5-8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 41 & -3 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Преобразованная таким образом матрица является ступенчатой:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 41 & -3 \end{array} \right)$$

Прямой ход метода Гаусса выполнен. Система совместна, так как количество ненулевых строк преобразованной матрицы системы и преобразованной расширенной матрицы одинаковое (равно 3); система имеет бесконечное множество решений (является неопределенной), так как число неизвестных больше, чем количество ненулевых строк преобразованных матриц, $4 > 3$.

По преобразованной расширенной матрице восстанавливаем систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 1, \\ -5x_2 + x_3 + 3x_4 = 1, \\ -3x_3 + 41x_4 = -3, \end{cases}$$

равносильную заданной системе и имеющей с ней одни и те же решения. Рассмотрим третье уравнение: в нем два неизвестных, одно из них объявляем свободным, пусть это будет x_4 , тогда

$$x_4 = C, \quad -3x_3 + 41C = -3 \Rightarrow x_3 = 1 + \frac{41}{3}C.$$

Подставим значения x_3 и x_4 во второе уравнение:

$$-5x_2 + \left(1 + \frac{41}{3}C\right) + 3C = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{10}{3}C.$$

Для того чтобы найти неизвестное x_1 , подставим полученные значения x_2 и x_4 в оставшееся первое уравнение:

$$x_1 + 2 \cdot \frac{10}{3}C - 4C = 1 \Rightarrow x_1 = 1 - \frac{8}{3}C.$$

Система имеет множество решений, зависящих от произвольного числа C . При каждом значении C имеем одно конкретное решение. Например, если взять $C = 3$, получим одно решение системы в виде набора чисел $x_1 = -7$, $x_2 = 10$, $x_3 = 42$, $x_4 = 3$.

$$\text{Ответ. } x_1 = 1 - \frac{8}{3}C, \quad x_2 = \frac{10}{3}C, \quad x_3 = 1 + \frac{41}{3}C, \quad x_4 = C, \quad C \in (-\infty; +\infty).$$

2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Векторная алгебра изучает геометрические векторы, линейные операции над ними и произведения векторов. В предлагаемом к изучению курсе векторной алгебры рассматриваются скалярное произведение, векторное произведение, смешанное произведение векторов, свойства этих произведений и их приложение к решению геометрических задач.

2.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ФОРМУЛЫ

2.1.1. Пространство векторов

Вектор – направленный отрезок прямой. Его обозначают $\vec{a}$ или $\overrightarrow{AB}$, где точка A является началом вектора, точка B – концом. Вектор в пространстве $Oxyz$ определяется тремя координатами:

$$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}.$$

Векторы, заданные координатами, равны тогда и только тогда, когда равны соответствующие координаты векторов. Координатами вектора являются его проекции на координатные оси. Если известны координаты начала $A(x_1, y_1, z_1)$ и конца $B(x_2, y_2, z_2)$ вектора, то координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ находятся как разности одноименных координат конца и начала вектора:

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}.$$

Нулевым вектором $\vec{0}$ называется вектор, начало и конец которого совпадают. Нулевой вектор имеет нулевые координаты. *Модуль* (или *длину*) $|\vec{a}|$ вектора $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ можно найти по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (2.1)$$

Над векторами можно производить *линейные операции*: сложение (вычитание) векторов и умножение вектора на число. Если векторы заданы координатами $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ и $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, то их суммой является вектор

$$\vec{a} + \vec{b} = \{a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z\}.$$

Аналогично разностью векторов является вектор

$$\vec{a} - \vec{b} = \{a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z\}.$$

При умножении ненулевого вектора $\vec{a}$ на число λ получается вектор $\lambda\vec{a}$, координаты которого равны

$$\lambda\vec{a} = \lambda\{a_x, a_y, a_z\} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}.$$

Три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, лежащие в параллельных плоскостях (или в одной плоскости), называются *компланарными*. Условие компланарности векторов в координатной форме: векторы $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ и $\vec{c} = \{c_x, c_y, c_z\}$ компланарны тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0. \quad (2.2)$$

Базисом в пространстве называются любые три упорядоченных некопланарных вектора $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$. Каждый вектор $\vec{d}$ пространства можно *разложить по базису* единственным образом, т.е. представить в виде

$$\vec{d} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3, \quad (2.3)$$

где набор чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, называемых *координатами вектора $\vec{d}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$* , единственный. Прямоугольная декартова система координат Охуз в пространстве описывается прямоугольным декартовым базисом $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – это векторы единичной длины, расположенные в положительном направлении координатных осей Ох, Оу и Oz соответственно. Разложение любого вектора по этому базису дает координаты вектора в привычном понимании, т.е. запись $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ равносильна разложению

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}.$$

2.1.2. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов

В векторной алгебре в случае, когда вектор не задан началом и концом, вектор является свободным, т.е. при параллельном переносе вектор не меняется, его начало можно поместить в любую точку пространства. Для того чтобы получить угол между векторами, векторы (свободные векторы) параллельным перемещением сводят к общему началу, образующийся между ними угол φ и есть угол между векторами, $\varphi \in [0, \pi]$.

Скалярным произведением $\vec{a} \cdot \vec{b}$ двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi.$$

Если известны координаты векторов в прямоугольной системе координат:

$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ и $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Некоторые свойства скалярного произведения векторов:

- 1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
- 2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ – признак перпендикулярности векторов;
- 3) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

С помощью скалярного произведения можно рассчитать такие геометрические характеристики, как *проекцию одного вектора на направление другого* вектора, например проекцию вектора $\vec{a}$ на направление вектора $\vec{b}$:

$$\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}};$$

косинус угла φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \quad (2.4)$$

Упорядоченная тройка некопланарных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется *правой*, если, приведя эти три вектора к общему началу и расположив наблюдателя вдоль третьего вектора $\vec{c}$, кратчайший поворот от первого вектора $\vec{a}$ до второго вектора $\vec{b}$ будет виден наблюдателю против движения часовой стрелки. Если поворот виден по движению часовой стрелки, то тройка *левая*.

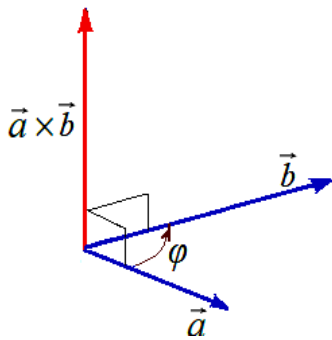


Рис. 2.1

Векторным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{a} \times \vec{b}$, длина которого равна

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi,$$

где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и направлен вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ перпендикулярно вектору $\vec{a}$ и вектору $\vec{b}$ так, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{a} \times \vec{b}$ образуют правую тройку (рис. 2.1).

Свойства векторного произведения векторов:

- 1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$,
- 2) $\vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda (\vec{a} \times \vec{b})$,
- 3) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и любого числа λ .

Если известны координаты векторов в прямоугольной системе координат:

$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ и $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, то вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ можно найти по формуле

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (2.5)$$

С помощью векторного произведения можно вычислять площади многоугольников. Так, площадь S_{Π} параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$

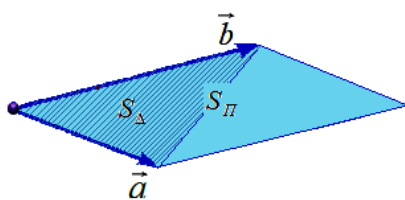


Рис. 2.2

и $\vec{b}$, равна длине векторного произведения этих векторов: $S_{\Pi} = |\vec{a} \times \vec{b}|$, а площадь S_{Δ} треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, равна $S_{\Delta} = 0,5 |\vec{a} \times \vec{b}|$ (рис. 2.2).

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, обозначаемое $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ и равное $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Некоторые свойства смешанного произведения векторов:

$$1) \vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b};$$

$$2) \text{ векторы } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ компланарны тогда и только тогда, когда } \vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$$

для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Если известны координаты векторов в прямоугольной системе координат:

$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ и $\vec{c} = \{c_x, c_y, c_z\}$, то

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (2.6)$$

Равенство (2.6) объясняет условие компланарности векторов (2.2).

С помощью смешанного произведения можно вычислять объемы многогранников. Так, объем V треугольной пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ (рис. 2.3), равен модулю смешанного произведения этих векторов, деленному на 6:

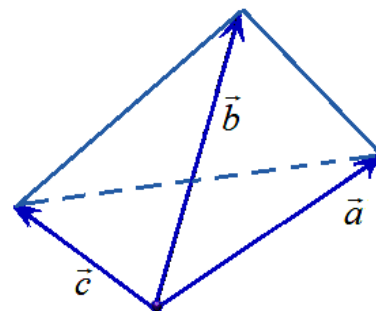


Рис. 2.3

$$V = \frac{1}{6} |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|. \quad (2.7)$$

2.2. ЗАДАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задание 2.1. Даны три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ в пространстве (табл. 2.1).

1. Проверьте, образуют ли эти векторы базис и, если образуют, разложите вектор $\vec{d} = \{q; p; q - p\}$ по базису $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Порядок выбора параметров p и q описан во введении к учебному пособию.

2. Найдите, при каком значении λ вектор $\vec{a} + \lambda \vec{b}$ перпендикулярен вектору $\vec{c}$.

3. Найдите векторное произведение $(\vec{a} + 2\vec{b}) \times (\vec{c} - 3\vec{d})$.

Таблица 2.1

	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$		$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
1.	$\{1; -2; 3\}$	$\{3; 5; -3\}$	$\{-5; 4; 1\}$	2.	$\{1; 3; 4\}$	$\{-1; 0; 2\}$	$\{3; 4; 1\}$
3.	$\{1; 2; 3\}$	$\{-1; 3; 2\}$	$\{2; -3; 5\}$	4.	$\{4; 7; 8\}$	$\{-1; 1; 3\}$	$\{2; -4; 1\}$
5.	$\{10; 3; 1\}$	$\{1; 4; 2\}$	$\{3; 1; 9\}$	6.	$\{2; 4; 1\}$	$\{1; -4; 2\}$	$\{1; -1; 3\}$
7.	$\{0; 2; 4\}$	$\{1; 5; -3\}$	$\{4; -1; 2\}$	8.	$\{1; 4; 3\}$	$\{2; -1; 5\}$	$\{3; 1; 4\}$
9.	$\{8; 2; 3\}$	$\{1; 2; -5\}$	$\{3; -2; 1\}$	10.	$\{4; -1; 4\}$	$\{1; 3; -2\}$	$\{0; -2; 2\}$
11.	$\{1; -6; 1\}$	$\{-3; 1; 2\}$	$\{-2; 1; 1\}$	12.	$\{6; 4; 3\}$	$\{9; 5; 1\}$	$\{2; 1; 0\}$
13.	$\{2; 10; 5\}$	$\{0; 3; 2\}$	$\{-1; 0; 1\}$	14.	$\{8; -2; 5\}$	$\{1; 3; 4\}$	$\{0; 2; 2\}$
15.	$\{4; 7; 5\}$	$\{1; 2; 1\}$	$\{5; 7; 6\}$	16.	$\{1; 3; 5\}$	$\{1; 4; 3\}$	$\{1; 4; 4\}$
17.	$\{2; 5; 2\}$	$\{2; -1; 7\}$	$\{2; 4; 3\}$	18.	$\{3; 5; 2\}$	$\{4; -3; 4\}$	$\{4; 4; 3\}$
19.	$\{4; -1; -2\}$	$\{-3; 3; 1\}$	$\{3; 0; -2\}$	20.	$\{5; 2; 2\}$	$\{1; -2; 3\}$	$\{5; 0; 5\}$
21.	$\{2; 2; 3\}$	$\{-1; 2; 1\}$	$\{3; 4; 6\}$	22.	$\{3; 2; 2\}$	$\{4; -8; 5\}$	$\{4; 1; 3\}$
23.	$\{1; 2; 3\}$	$\{1; 3; 7\}$	$\{2; 5; 11\}$	24.	$\{4; 2; 5\}$	$\{7; 3; 8\}$	$\{1; 0; 1\}$
25.	$\{1; 1; 4\}$	$\{0; 2; -1\}$	$\{1; -1; 2\}$	26.	$\{5; 4; 1\}$	$\{4; 3; -4\}$	$\{6; 5; 7\}$
27.	$\{4; 3; 5\}$	$\{2; 2; 7\}$	$\{6; 5; 13\}$	28.	$\{2; -3; 6\}$	$\{4; 0; -1\}$	$\{3; 1; 6\}$
29.	$\{1; 1; 1\}$	$\{4; 1; -3\}$	$\{0; 5; -2\}$	30.	$\{2; 7; 3\}$	$\{3; 1; 8\}$	$\{2; -1; 1\}$

Во второй, третьей, четвертой, шестой, седьмой и восьмой колонках табл. 2.1 приведены координаты соответствующих векторов, а в первой и четвертой колонках – номера вариантов.

Задание 2.2. Даны четыре точки $A(p, q, p - q)$, B , C и D в пространстве, координаты точек B , C и D приведены в табл. 3.2. Найдите:

- 1) угол DAC ;
- 2) площадь параллелограмма $ABMC$ и две его высоты (выполните рисунок);
- 3) объем пирамиды $ABCD$ и высоту, проведенную к грани ABC (выполните рисунок). Порядок выбора параметров p и q описан во введении к учебному пособию.

2.3. РАЗБОР РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ ВАРИАНТА № 30

($p = 18, q = 1$)

Задание 2.2.1. Даны три вектора: $\vec{a} = \{2; 7; 3\}$, $\vec{b} = \{3; 1; 8\}$ и $\vec{c} = \{2; -1; 1\}$ в пространстве.

1. Проверьте, образуют ли эти векторы базис и, если образуют, разложите вектор $\vec{d} = \{1; 18; -17\}$ по базису $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

2. Найдите, при каком значении λ вектор $\vec{a} + \lambda \vec{b}$ перпендикулярен вектору $\vec{c}$.

3. Найдите векторное произведение $(\vec{a} + 2\vec{b}) \times (\vec{c} - 3\vec{d})$.

Решение.

1. Три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют базис, если они не являются компланарными. Проверим условие компланарности векторов (2.2):

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 8 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 1 + 7 \cdot 8 \cdot 2 - 3 \cdot 3 \cdot 1 - (2 \cdot 1 \cdot 3 + 3 \cdot 7 \cdot 1 - 2 \cdot 8 \cdot 1) = 105 - 11 = 94 \neq 0.$$

Смешанное произведение векторов не равно нулю, следовательно, векторы образуют базис.

Разложим вектор $\vec{d}$ по базису $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, т.е. составим равенство (2.3):

$$\vec{d} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c}$$

или в координатной форме

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 18 \\ -17 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Выполним линейные операции над векторами (пункт 2.1.1):

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 18 \\ -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 \\ 7\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ 3\lambda_1 + 8\lambda_2 - \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Приравняем соответствующие координаты равных векторов, получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 1, \\ 7\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 18, \\ 3\lambda_1 + 8\lambda_2 - \lambda_3 = -17. \end{cases}$$

Решим систему методом Крамера. Главный определитель Δ системы найден и равен 94, так как по свойствам определителей при замене строк соответствующими столбцами при сохранении порядка следования элементов определитель не меняется. Вычислим вспомогательные определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 18 & 1 & 1 \\ -17 & 8 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 51 + 288 - (-34 - 54 + 8) = 236 + 80 = 316,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 7 & 18 & 1 \\ 3 & -17 & -1 \end{vmatrix} = -36 - 238 + 3 - (108 - 7 - 34) = -271 - 67 = -338,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & 18 \\ 3 & 8 & -17 \end{vmatrix} = -34 + 162 + 56 - (3 - 357 + 288) = 184 + 66 = 250.$$

По формулам Крамера (1.7) найдем решение системы:

$$\lambda_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{316}{94} = \frac{158}{47}, \quad \lambda_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-338}{94} = -\frac{169}{47}, \quad \lambda_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{250}{94} = \frac{125}{47}.$$

Разложение вектора $\vec{d}$ по базису $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ принимает вид

$$\vec{d} = \frac{158}{47}\vec{a} - \frac{169}{47}\vec{b} + \frac{125}{47}\vec{c}.$$

2. Найдем координаты вектора $\vec{a} + \lambda \vec{b}$, умножив вектор $\vec{b}$ на число λ и сложив результат умножения с вектором $\vec{a}$:

$$\vec{a} + \lambda \vec{b} = \{2; 7; 3\} + \lambda\{3; 1; 8\} = \{2; 7; 3\} + \{3\lambda; \lambda; 8\lambda\} = \{2 + 3\lambda; 7 + \lambda; 3 + 8\lambda\}.$$

По свойствам скалярного произведения векторов векторы перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю. Найдем скалярное произведение векторов $\vec{a} + \lambda \vec{b}$ и $\vec{c}$, приравняем его к нулю:

$$\begin{aligned}
(\vec{a} + \lambda \vec{b}) \cdot \vec{c} &= \{2 + 3\lambda; 7 + \lambda; 3 + 8\lambda\} \cdot \{2; -1; 1\} = \\
&= 2(2 + 3\lambda) - 1 \cdot (7 + \lambda) + 1 \cdot (3 + 8\lambda) = 10\lambda, \\
10\lambda &= 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0.
\end{aligned}$$

3. Составим вектор $\vec{a} + 2\vec{b}$, подставив в вектор $\vec{a} + \lambda\vec{b}$ число $\lambda = 2$, и найдем вектор $\vec{c} - 3\vec{d}$ по правилам линейных операций над векторами:

$$\begin{aligned}
\vec{a} + 2\vec{b} &= \{2 + 3 \cdot 2; 7 + 2; 3 + 8 \cdot 2\} = \{8; 9; 19\}, \\
\vec{c} - 3\vec{d} &= \{2; -1; 1\} - 3 \cdot \{1; 18; -17\} = \{-1; -55; 52\}.
\end{aligned}$$

По формуле (2.5) векторное произведение векторов $\vec{a} + 2\vec{b}$ и $\vec{c} - 3\vec{d}$ (порядок важен) равно

$$\begin{aligned}
(\vec{a} + 2\vec{b}) \times (\vec{c} - 3\vec{d}) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8 & 9 & 19 \\ -1 & -55 & 52 \end{vmatrix} = 468\vec{i} - 19\vec{j} - 440\vec{k} - \\
&- (-9\vec{k} + 416\vec{j} - 1045\vec{i}) = 1513\vec{i} - 435\vec{j} - 449\vec{k}.
\end{aligned}$$

Ответ: 1) векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют базис; $\vec{d} = \frac{158}{47}\vec{a} - \frac{169}{47}\vec{b} + \frac{125}{47}\vec{c}$;

2) $\lambda = 0$; 3) $(\vec{a} + 2\vec{b}) \times (\vec{c} - 3\vec{d}) = \{1513; -435; -449\}$.

Задание 2.2.2. Даны четыре точки: $A(18; 1; 17)$, $B(7; 5; 2)$, $C(-2; 0; -7)$, $D(-2; -3; 5)$. Найдите:

- 1) угол DAC ;
- 2) площадь параллелограмма $ABMC$ и две его высоты (выполните рисунок);
- 3) объем пирамиды $ABCD$ и высоту, проведенную к грани ABC (выполните рисунок).

Решение.

1) Угол DAC можно рассматривать как угол между векторами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AC}$. Косинус угла между векторами вычисляется по формуле (2.4). Согласно теории пункта 1.2, координаты векторов равны разности соответствующих координат конца и начала вектора, поэтому

$$\overrightarrow{AD} = \{-2-18; -3-1; 5-17\} = \{-20; -4; -12\},$$

$$\overrightarrow{AC} = \{-2-18; 0-1; -7-17\} = \{-20; -1; -24\}.$$

По формуле (2.4) имеем

$$\cos \angle ADC = \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}.$$

Найдем скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = -20 \cdot (-20) - 4 \cdot (-1) - 12 \cdot (-24) = 400 + 4 + 288 = 692.$$

Вычислим длины векторов:

$$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{(-20)^2 + (-4)^2 + (-12)^2} = 4\sqrt{5^2 + 1^2 + 3^2} = 4\sqrt{35},$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-20)^2 + (-1)^2 + (-24)^2} = \sqrt{400 + 1 + 576} = \sqrt{977}.$$

Найденные значения подставим в формулу для вычисления косинуса угла:

$$\cos \angle ADC = \frac{692}{4\sqrt{35} \cdot \sqrt{977}} = \frac{173}{\sqrt{34195}}.$$

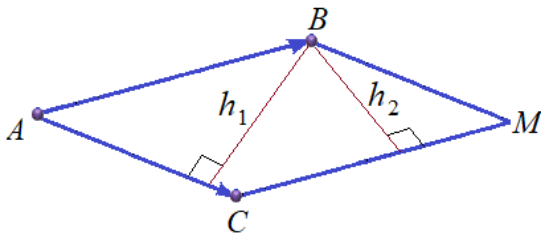


Рис. 2.4

2) Три вершины A , B и C однозначно определяют параллелограмм $ABMC$, площадь которого S равна модулю векторного произведения образующих его векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ (рис. 2.4):

$$S = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|.$$

Координаты вектора $\overrightarrow{AC}$ найдены в решении первого задания, аналогично найдем координаты вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = \{7-18; 5-1; 2-17\} = \{11; 4; -15\}.$$

По формуле (2.5)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 11 & 4 & -15 \\ -20 & -1 & -24 \end{vmatrix} = -96\vec{i} + 300\vec{j} - 11\vec{k} - (-80\vec{k} - 264\vec{j} + 15\vec{i}) = \\ &= -111\vec{i} + 564\vec{j} + 69\vec{k} = 3(-37\vec{i} + 188\vec{j} + 23\vec{k}). \end{aligned}$$

Длина полученного вектора вычисляется по формуле (2.1):

$$S = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 3\sqrt{(-37)^2 + 188^2 + 23^2} = 3\sqrt{37242} = 9\sqrt{4138}.$$

Проведем из точки B высоту h_1 к стороне AC и высоту h_2 к стороне CM .

Используем найденное значение площади и школьную формулу площади параллелограмма для расчета высот:

$$S = h_1 \cdot AC, S = h_2 \cdot CM \Rightarrow h_1 = \frac{S}{AC}, h_2 = \frac{S}{CM}.$$

Учитывая, что в параллелограмме длины противоположных сторон равны,

$$|\overrightarrow{CM}| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{121 + 16 + 225} = \sqrt{362}, \quad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{977}.$$

Тогда

$$h_1 = \frac{9\sqrt{4138}}{\sqrt{977}}, h_2 = \frac{9\sqrt{4138}}{\sqrt{362}} = \frac{9\sqrt{2069}}{\sqrt{181}}.$$

3) Можно считать, что пирамида образована векторами $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ (рис. 2.5), поэтому ее объем можно найти по формуле (2.7):

$$V = \frac{1}{6} |\overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC} \overrightarrow{AD}|.$$

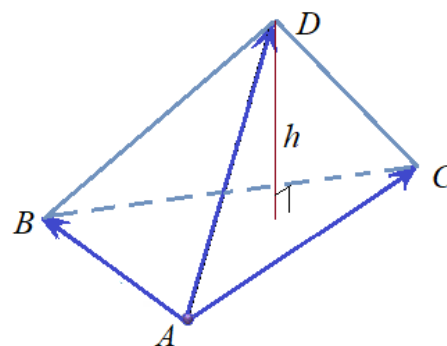


Рис. 2.5

Координаты всех векторов известны, по формуле (2.6) имеем

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC} \overrightarrow{AD} &= \begin{vmatrix} 11 & 4 & -15 \\ -20 & -1 & -24 \\ -20 & -4 & -12 \end{vmatrix} = 132 + 1920 - 1200 - (-300 + 960 + 1056) = \\ &= 852 - 1716 = -864. \end{aligned}$$

Объем пирамиды равен

$$V = \frac{1}{6} |-864| = \frac{864}{6} = 144.$$

С другой стороны, объем пирамиды равен

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h,$$

где h – высота, проведенная из вершины D к основанию ABC (рис. 2.5).

Площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма $ABMC$:

$$S_{ABC} = 0,5S = 4,5 \cdot \sqrt{4138}.$$

Тогда

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h \Rightarrow 144 = \frac{4,5}{3} \sqrt{4138} \cdot h \Rightarrow h = \frac{96}{\sqrt{4138}}.$$

Ответ: 1) $\angle ADC = \arccos(173/\sqrt{34195})$;

2) $S_{ABMC} = 9\sqrt{4138}$, $h_1 = 9\sqrt{4138}/\sqrt{977}$, $h_2 = 9\sqrt{2069}/\sqrt{181}$;

3) $V_{ABCD} = 144$, $h = 96/\sqrt{4138}$.

3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Аналитическая геометрия позволяет исследовать геометрические объекты средствами алгебры на основе метода координат. Средствами алгебры – значит, с помощью уравнений и систем уравнений. Каждая точка плоскости или пространства имеет две или три координаты соответственно. На основании свойств геометрических объектов составляются уравнения или системы уравнений, которым удовлетворяют координаты точек объекта и не удовлетворяют координаты других точек. В результате геометрический объект отождествляется с уравнением или системой уравнений, и расчет его элементов (решение задач) осуществляется алгебраическими методами. Это существенно упрощает решение геометрических задач.

3.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ФОРМУЛЫ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

3.1.1. Прямая линия на плоскости

Уравнением прямой линии l на плоскости является линейное уравнение

$$l: Ax + By + C = 0,$$

которое называется *общим уравнением прямой*. Здесь x и y являются переменными, A , B и C – числами. Коэффициенты уравнения A и B имеют геометрический смысл – это координаты вектора-нормали, перпендикулярного прямой l , $\vec{N} = \{A, B\}$ (рис. 3.1).

Для составления уравнения прямой используются разные исходные данные. Если даны точка, принадлежащая прямой $M_0(x_0, y_0) \in l$, и нормаль $\vec{N} = \{A, B\}$ (рис. 3.1), то уравнение можно записать в виде

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (3.1)$$

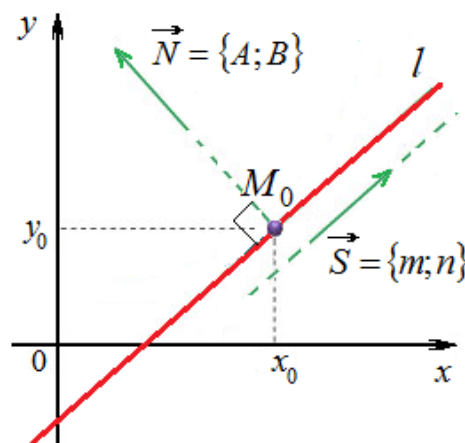


Рис. 3.1

Если известна точка $M_0(x_0, y_0)$ на прямой l и ненулевой вектор $\vec{S} = \{m; n\}$, параллельный прямой l (рис 3.1), который называется *направляющим* вектором, то можно составить уравнение прямой

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}, \quad (3.2)$$

называемое *каноническим уравнением*. Если есть две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, лежащие на прямой l , то уравнение прямой принимает вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (3.3)$$

Это уравнение является каноническим уравнением прямой, так как числа в знаменателях дробей являются координатами направляющего вектора.

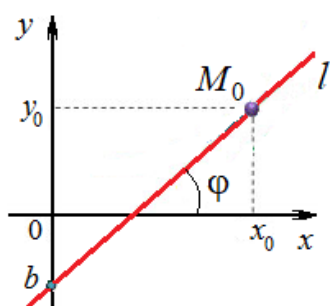


Рис. 3.2

Если известен угол φ между прямой l и осью Ox (рис. 3.2) и точка $M_0(x_0, y_0) \in l$, то, вычислив $\operatorname{tg} \varphi = k$, можно составить *уравнение прямой с угловым коэффициентом k* (здесь b – ордината точки пересечения прямой с осью Oy):

$$y - y_0 = k(x - x_0), \quad y = kx + b.$$

Все эти уравнения в результате простейших преобразований приводятся к общему уравнению прямой.

При пересечении двух прямых образуются два угла, меньший из них φ называется *углом между прямыми*. Если прямые параллельны, то угол φ между ними равен нулю. Косинус и тангенс угла между прямыми вычисляются по следующим формулам (здесь коэффициенты и характеристики одной прямой имеют индекс 1, а другой – 2):

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2|}{|\vec{N}_1| \cdot |\vec{N}_2|}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|. \quad (3.4)$$

В числителе первой формулы находится модуль скалярного произведения нормалей к прямым, в знаменателе – произведение длин этих нормалей. Если

прямые перпендикулярны, т.е. $\varphi = 90^\circ$, тогда угловые коэффициенты прямых связаны соотношением $k_1 k_2 = -1$.

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой l , заданной уравнением $Ax + By + C = 0$, можно найти по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (3.5)$$

Координаты середины $M(x_m, y_m)$ отрезка AB , если известны координаты концов отрезка $A(x_a, y_a)$ и $B(x_b, y_b)$, вычисляются по формулам:

$$x_m = \frac{x_a + x_b}{2}, \quad y_m = \frac{y_a + y_b}{2}. \quad (3.6)$$

3.1.2. Плоскости и прямые в пространстве

Уравнением плоскости α является линейное уравнение вида

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (3.7)$$

которое называют *общим уравнением плоскости*.

Здесь коэффициенты A , B и C являются координатами *нормали* – вектора $\vec{N} = \{A, B, C\}$, перпендикулярного плоскости α (рис. 3.3). Плоскость α однозначно определяется нормальным вектором и точкой, лежащей на ней. Если известен вектор нормали $\vec{N} = \{A, B, C\}$ и точка на плоскости: $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$, то можно составить уравнение плоскости по формуле

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и при том только одну. Уравнение такой плоскости α имеет вид

$$\alpha: \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.8)$$

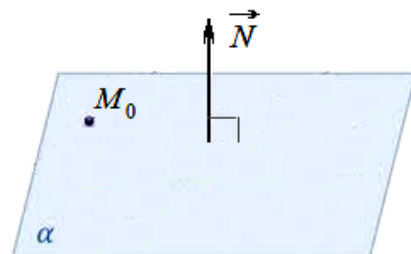


Рис. 3.3

Этот определитель надо раскрыть, привести подобные, после чего уравнение плоскости α примет общий вид (3.7).

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости α , заданной уравнением (3.7), можно найти по формуле (аналог формулы (3.5) – расстояние от точки до прямой на плоскости)

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (3.9)$$

Прямую l в пространстве можно получить в результате пересечения двух плоскостей, поэтому ее можно задать системой двух линейных уравнений, каждое из которых определяет плоскость:

$$l: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Эту систему уравнений называют *общими уравнениями прямой*. При решении задач обычно пользуются другими уравнениями: каноническими или параметрическими.

Если известен параллельный прямой l вектор $\vec{S} = \{m, n, p\}$, называемый *направляющим*, и точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, лежащая на прямой (рис. 3.4), то прямая

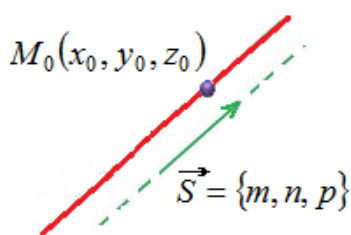


Рис. 3.4

определяется однозначно, и ее можно задать *каноническим уравнениями*

$$l: \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \quad (3.10)$$

или *параметрическими уравнениями* (t – параметр)

$$l: \begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \end{cases} \quad t \in (-\infty, +\infty). \quad (3.11)$$

При $t = 0$ имеем точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на прямой. Меняя значения параметра t , получаем координаты точек, принадлежащих прямой. Если хотя бы одна из координат направляющего вектора $\vec{S}$ равна нулю, то прямую лучше задавать параметрическими уравнениями, для того чтобы избежать деления на ноль.

Если известны две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, лежащие на прямой l , то по аналогии с прямой на плоскости составим уравнение прямой l :

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (3.12)$$

Угол φ между прямой l , направляющий вектор которой $\vec{S} = \{m, n, p\}$, и плоскостью α с вектором нормали $\vec{N} = \{A, B, C\}$ можно найти по формуле

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{N} \cdot \vec{S}|}{|\vec{N}| \cdot |\vec{S}|} = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \quad (3.13)$$

Для того чтобы найти точку пересечения прямой l и плоскости α , удобнее пользоваться параметрическими значениями (3.11) прямой. При некотором значении параметра t точка прямой окажется на плоскости, тогда ее координаты будут удовлетворять уравнению плоскости (3.7). Поэтому подставим выражения для x , y и z из параметрических уравнений (3.11) в уравнение плоскости (3.7):

$$A(x_0 + mt) + B(y_0 + nt) + C(z_0 + pt) + D = 0, \quad (3.14)$$

получим линейное уравнение с неизвестным t . Если это уравнение имеет одно решение t_0 , то для вычисления координат точки пересечения остается подставить t_0 в параметрические уравнения (3.11). Если уравнение преобразуется в тождество, то каждая точка прямой l принадлежит плоскости α , т.е. прямая l лежит в плоскости α . Если такая подстановка в уравнение (3.14) приводит к противоречию, то прямая l и плоскость α параллельны.

3.1.3. Линии второго порядка

Линии второго порядка – это линии на плоскости, уравнениями которых являются алгебраические уравнения второй степени. Такими линиями являются окружность, эллипс, гипербола и парабола. Все эти линии имеют оси симметрии. В предлагаемом курсе рассматриваются линии, оси симметрии которых параллельны координатным осям. В общем случае уравнение таких линий имеет вид

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0,$$

где $A^2 + B^2 \neq 0$. Для того чтобы определить тип линии и построить ее, надо преобразовать это уравнение: выделив полные квадраты, привести к каноническому виду.

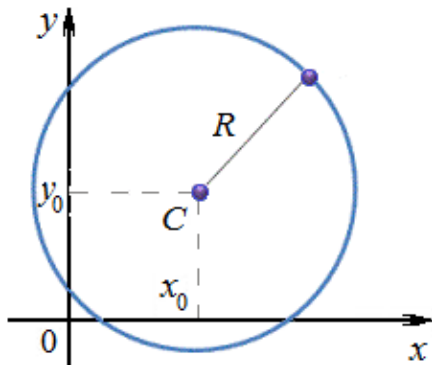


Рис. 3.5

Окружность. Окружностью называется линия на плоскости, все точки которой удалены на одинаковое расстояние, называемое радиусом R , от фиксированной точки $C(x_0, y_0)$, называемой центром (рис. 3.5). Каноническое уравнение окружности имеет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Эллипс. Эллипсом называется линия на плоскости, сумма расстояний от каждой точки которой до двух фиксированных точек F_1 и F_2 , называемых фокусами, есть величина постоянная. Эллипс изображен на рис. 3.6, он имеет

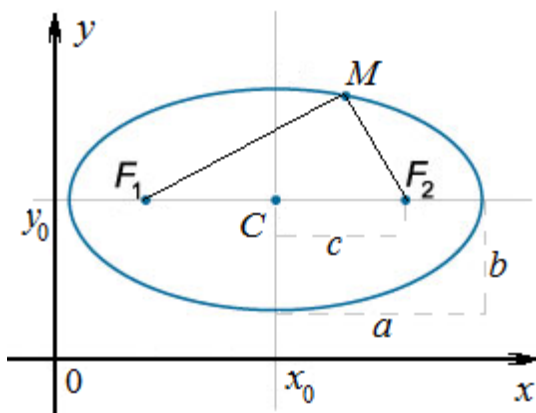


Рис. 3.6

форму овала, фокусы F_1 и F_2 такого эллипса находятся на горизонтальной прямой. Если M – произвольно выбранная точка на эллипсе, то $MF_1 + MF_2 = 2a$, $a = \text{const}$, расстояние между фокусами равно $2c$, $F_1F_2 = 2c$. В середине отрезка F_1F_2 расположен центр эллипса $C(x_0, y_0)$. Одна

из осей симметрии содержит отрезок F_1F_2 , вторая ось проходит через центр эллипса перпендикулярно отрезку F_1F_2 . Отрезок, соединяющий две точки эллипса, лежащие на прямой F_1F_2 , называется большей осью эллипса, его длина равна $2a$, a – большая полуось. Отрезок, соединяющий две точки эллипса, лежащие на оси перпендикулярной большей оси, называется меньшей осью эллипса, его длина равна $2b = 2\sqrt{a^2 - c^2}$, b – меньшая полуось. Здесь $b < a$. Каноническое уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Если фокусы эллипса расположены на вертикальной прямой, то уравнение сохраняет такой же вид, но параметры будут связаны неравенством $b > a$. В этом случае b – большая полуось, a – меньшая.

По каноническому уравнению можно построить эллипс, так как это уравнение содержит основные параметры: координаты центра x_0, y_0 , большую полуось, т.е. большее из двух чисел a и b , меньшую полуось – меньшее из двух чисел a и b . Сначала на координатной плоскости отмечаем центр эллипса, затем проводим через центр две прямые, параллельные координатным осям, – оси эллипса. На горизонтальной оси влево и вправо от центра откладываем расстояние a , на вертикальной оси вверх и вниз от центра – расстояние b . Отмеченные таким образом четыре точки на осях эллипса являются вершинами эллипса (рис. 3.7). Через все четыре вершины проводим прямые, перпендикулярные осям, на которых эти точки лежат – получаем базовый прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$. В этот прямоугольник вписываем эллипс, который в вершинах касается сторон прямоугольника (рис. 3.7).

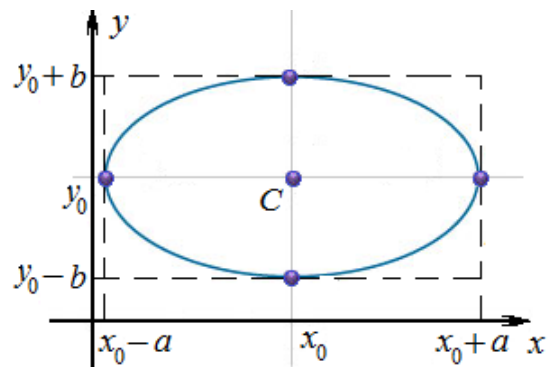


Рис. 3.7

Гипербола. Гиперболой называется линия на плоскости, абсолютное значение разности расстояний от каждой точки которой до двух фиксированных точек F_1 и F_2 , называемых фокусами, есть величина постоянная. Гипербола, изображена на рис. 3.8, она имеет две ветви, которые уходят в бесконечность, фокусы F_1 и F_2 гиперболы находятся на горизонтальной прямой. Если M – произвольно выбранная точка на гиперболе, то $|MF_1 - MF_2| = 2a$, $a = \text{const}$, расстояние между фокусами равно $2c$, $F_1F_2 = 2c$. В середине отрезка F_1F_2 расположен центр $C(x_0, y_0)$. Одна из осей симметрии содержит отрезок F_1F_2 . Гипербола пересекает эту ось, точки пересечения называются вершинами

гиперболы, а отрезок, соединяющий вершины, – действительной осью, его длина равна $2a$. Вторая ось симметрии гиперболы проходит через центр гиперболы перпендикулярно отрезку F_1F_2 , гипербола эту ось не пересекает. На этой оси симметрично относительно центра $C(x_0, y_0)$ расположена мнимая ось гиперболы длиной $2b = 2\sqrt{c^2 - a^2}$. При бесконечном удалении точки гиперболы от центра эта точка сколь угодно близко приближается к прямой,

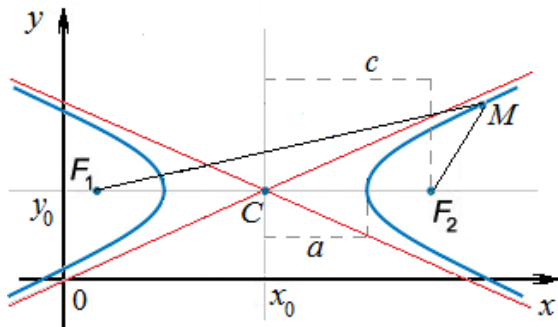


Рис. 3.8

называемой асимптотой. У гиперболы две асимптоты (на рис. 3.8 выделены красным цветом), они характеризуют поведение кривой на бесконечности. Асимптоты гиперболы – прямые с угловыми коэффициентами $\pm b/a$,

проходящие через центр C . Каноническое уравнение гиперболы, изображенной на рис. 3.8, имеет вид

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \quad (3.15)$$

Если фокусы гиперболы F_1 и F_2 расположены на вертикальной прямой, тогда вершины гиперболы также будут находиться на вертикальной прямой, одна ветвь гиперболы разместится выше центра и асимптот, другая – ниже центра

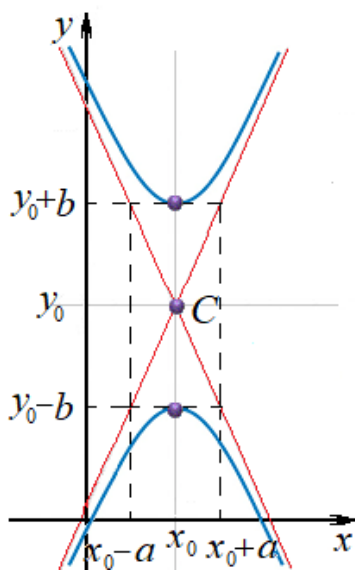


Рис. 3.9

и асимптот. Действительной осью гиперболы будет отрезок между вершинами, длина которого равна $2b$. Чертеж такой гиперболы представлен на рис. 3.9, а ее каноническое уравнение имеет вид

$$-\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \quad (3.16)$$

По каноническому уравнению гиперболы, как и по уравнению эллипса, можно построить кривую. Сначала, используя координаты центра и полуоси гиперболы, строим базовый прямоугольник так же,

как и для эллипса, отмечаем две вершины гиперболы в зависимости от вида уравнения. На рисунке 3.9 выполнено построение гиперболы, заданной уравнением (3.16). Поскольку диагонали прямоугольника лежат на асимптотах гиперболы, проводим диагонали и продолжаем их за прямоугольник. В точках вершин гипербола касается прямоугольника с внешней стороны, по мере удаления от вершин точки гиперболы удаляются от базового прямоугольника, приближаясь к асимптотам. Таким образом, каждая ветка гиперболы оказывается вписанной в бесконечную область, ограниченную стороной базового прямоугольника и теми частями двух асимптот, которые находятся вне прямоугольника (рис. 3.9).

Парабола. Параболой называется линия на плоскости, точки которой равноудалены от некоторой фиксированной точки F , называемой фокусом, и от некоторой заданной прямой l , называемой директрисой. Фокус не принадлежит директрисе. Осью симметрии параболы является прямая, проходящая через фокус F перпендикулярно директрисе. Вершина параболы $A(x_0, y_0)$ лежит на оси симметрии посередине между фокусом F и директрисой l , ветви параболы направлены в сторону, противоположную директрисе. Если директриса параллельна оси Oy , и фокус находится справа от нее (рис. 3.10), то каноническое уравнение параболы принимает вид

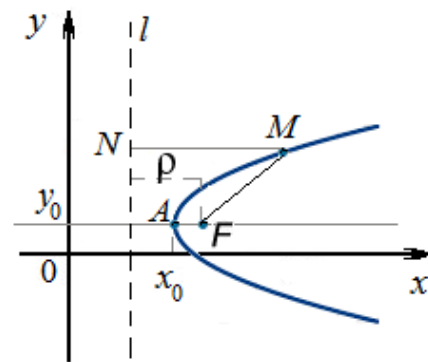


Рис. 3.10

$$(y - y_0)^2 = 2\rho(x - x_0),$$

где число ρ , называемое параметром параболы, равно расстоянию от фокуса до директрисы. Если M – произвольно выбранная точка на параболе, то, по определению параболы, отрезки NM (расстояние от точки M до директрисы) и FM равны. Вид канонического уравнения параболы зависит от расположения ее фокуса и директрисы. На рисунке 3.11 представлены варианты остальных возможных расположений фокуса и директрисы и соответствующие им виды канонических уравнений парабол.

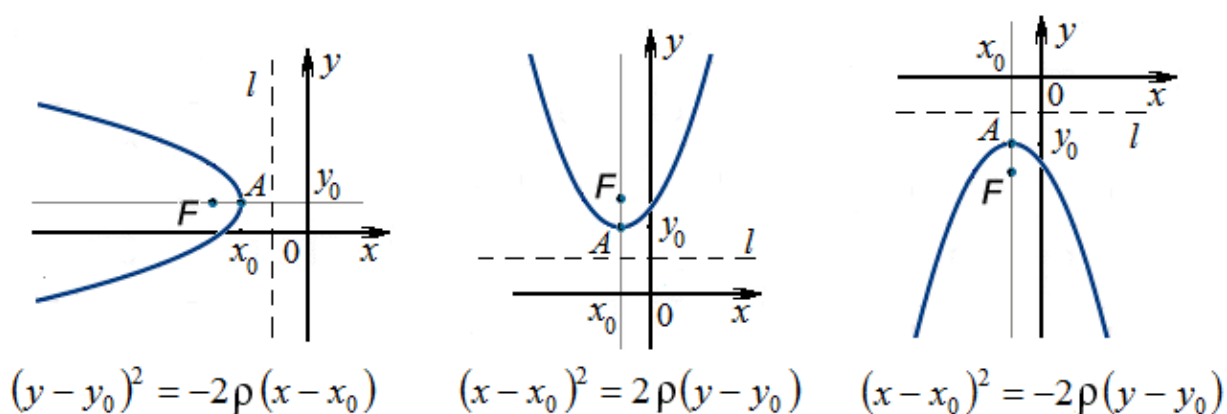


Рис. 3.11

По виду канонического уравнения определяют один из четырех вариантов расположения параболы, затем на координатной плоскости отмечают ее вершину $A(x_0, y_0)$. Парабола однозначно определяется по трем точкам, поэтому, кроме вершины, выбирают еще две точки, как правило, симметричные относительно оси параболы.

3.2. ЗАДАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задание 3.1. Найдите элементы геометрической фигуры, в соответствии с заданием, изобразите фигуру и ее элементы на координатной плоскости. В левой колонке табл. 3.1 расположены номера вариантов. Порядок выбора параметров p и q описан во введении к учебному пособию.

Таблица 3.1

На плоскости даны три точки A , B и C , которые являются вершинами треугольника. Найдите уравнения стороны l , медианы m , высоты h , длину высоты h и угол между высотой h и медианой m .

1.	$A(p-9, q+1)$	$B(3, -1)$	$C(0, 7)$	$l = AC$	$m = BM$	$h = BH$
2.	$A(-5, 3)$	$B(p, q-10)$	$C(1, 1)$	$l = BC$	$m = AM$	$h = AH$
3.	$A(3, 0)$	$B(5, -4)$	$C(p-5, q+5)$	$l = AB$	$m = CM$	$h = CH$
4.	$A(p-10, q)$	$B(11, 4)$	$C(b-1, 7)$	$l = BC$	$m = BM$	$h = BH$
5.	$A(7, -2)$	$B(p-3, q-5)$	$C(1, 1)$	$l = AC$	$m = AM$	$h = AH$
6.	$A(-4, 8)$	$B(7, p-6)$	$C(q-9, 10)$	$l = AB$	$m = BM$	$h = BH$
7.	$A(p-11, 4)$	$B(q-12, 8)$	$C(1, -1)$	$l = AC$	$m = BM$	$h = CH$

8.	$A(-2, p-8)$	$B(5, -3)$	$C(q-5, 8)$	$l = BC$	$m = BM$	$h = AH$
9.	$A(6, -6)$	$B(p-12, 0)$	$C(9, q-5)$	$l = AB$	$m = AM$	$h = CH$
10.	$A(q-7, 5)$	$B(6, p-13)$	$C(8, 0)$	$l = AC$	$m = CM$	$h = BH$

В параллелограмме $ABCD$ известны координаты трех вершин. Найдите уравнения стороны l , диагонали d , высоты AH , длину высоты AH и угол между высотой AH и диагональю d^1 .

11.	$A(p-7, 6)$	$B(8, 10-q)$	$C(9, 0)$	$l = AD$	$d = BD$	$H \in BC$
12.	$A(4, 4)$	$B(8-p, 11)$	$C(10, q-8)$	$l = DC$	$d = BD$	$H \in DC$
13.	$A(7, p-7)$	$B(9, 10)$	$D(11-q, 2)$	$l = DC$	$d = AC$	$H \in DC$
14.	$A(3, -4)$	$B(p-9, 9)$	$D(10, 12-q)$	$l = BC$	$d = AC$	$H \in BC$
15.	$A(12-q, 5)$	$C(11-p, -3)$	$D(8, 8)$	$l = AB$	$d = BD$	$H \in BC$
16.	$A(8, q-12)$	$C(0, -5)$	$D(10-p, 3)$	$l = BC$	$d = BD$	$H \in DC$
17.	$A(2, -3)$	$B(q-12, 7)$	$C(-5, p-11)$	$l = AD$	$d = BD$	$H \in DC$
18.	$A(14-p, 9)$	$B(8, -8)$	$C(7, q-10)$	$l = DC$	$d = BD$	$H \in BC$
19.	$A(8, q-8)$	$B(-9, 10-p)$	$D(10, 12)$	$l = DC$	$d = AC$	$H \in BC$
20.	$A(5, -5)$	$C(-1, q-13)$	$D(8-p, 11)$	$l = BC$	$d = BD$	$H \in DC$

Даны три вершины прямоугольной трапеции $ABCD^2$, $BC \parallel AD$, угол при четвертой вершине равен 90° . Найдите уравнения стороны l , средней линии трапеции, диагонали d , длину высоты и угол между высотой и диагональю d .

21.	$A(p-15, q-10)$	$B(7, 10)$	$C(17, 12)$	$l = CD$	$d = AC$
22.	$B(10-p, q-8)$	$D(15, -2)$	$C(11, 7)$	$l = AB$	$d = BD$
23.	$C(p, q+1)$	$D(20, 1)$	$A(-1, -5)$	$l = AB$	$d = AC$
24.	$D(p+2, 8-q)$	$A(-5, 3)$	$B(1, 11)$	$l = CD$	$d = BD$
25.	$A(p-13, 5-q)$	$B(10, 10)$	$C(18, 12)$	$l = CD$	$d = AC$
26.	$B(p-17, 11-q)$	$D(20, -3)$	$C(13, 5)$	$l = AB$	$d = BD$
27.	$C(q-15, p-11)$	$D(15, 17)$	$A(20, 12)$	$l = AB$	$d = AC$
28.	$D(q-12, 3-p)$	$A(18, 8)$	$B(15, -1)$	$l = CD$	$d = BD$
29.	$A(p-5, q-12)$	$B(5, 18)$	$C(15, 9)$	$l = CD$	$d = AC$
30.	$B(16-p, q-9)$	$D(19, -3)$	$C(10, 8)$	$l = AB$	$d = BD$

¹ Вершины параллелограмма $ABCD$ идут по порядку (по кругу), переставлять вершины нельзя.

² Вершины трапеции $ABCD$ идут по порядку (по кругу), переставлять вершины нельзя. Но если для данного набора вершин соответствующая прямоугольная трапеция не существует, то следует рассматривать трапецию $DBCA$.

Задание 3.2. В пирамиде $ABCD$, где $A(p, q, p - q)$, найдите уравнения грани α , ребра l , высоты h , длину высоты h , координаты основания H высоты пирамиды, угол φ между ребром l и плоскостью α^3 . Изобразите схематично пирамиду $ABCD$ и ее элементы. В левой колонке табл. 3.2 расположены номера вариантов.

Таблица 3.2

1.	$B(3, 8, -1)$	$C(10, -5, 7)$	$D(-1, 1, 15)$	$\alpha = (ABC)$	$l = AD$	$h = DH$
2.	$B(7, -9, 2)$	$C(0, 6, -11)$	$D(-5, -1, 5)$	$\alpha = (ABD)$	$l = AC$	$h = CH$
3.	$B(3, 5, 7)$	$C(-4, -2, 1)$	$D(8, 10, -3)$	$\alpha = (ACD)$	$l = AB$	$h = BH$
4.	$B(-5, -4, 5)$	$C(11, 0, -3)$	$D(7, 9, 10)$	$\alpha = (BCD)$	$l = AD$	$h = AH$
5.	$B(2, 7, -2)$	$C(11, -4, 8)$	$D(-2, 0, 13)$	$\alpha = (ABC)$	$l = BD$	$h = DH$
6.	$B(-6, 8, -1)$	$C(1, -5, 10)$	$D(5, -1, 4)$	$\alpha = (ABD)$	$l = BC$	$h = CH$
7.	$B(4, -6, 8)$	$C(-2, 0, -1)$	$D(12, 9, -9)$	$\alpha = (ACD)$	$l = BC$	$h = BH$
8.	$B(-2, 0, 10)$	$C(12, 7, 2)$	$D(5, -9, 2)$	$\alpha = (BCD)$	$l = AB$	$h = AH$
9.	$B(6, 11, -2)$	$C(7, -8, 4)$	$D(0, 2, -2)$	$\alpha = (ABC)$	$l = CD$	$h = DH$
10.	$B(4, -12, 6)$	$C(4, 2, -10)$	$D(-5, 3, 12)$	$\alpha = (ABD)$	$l = CD$	$h = CH$
11.	$B(6, -1, 12)$	$C(-1, -7, 1)$	$D(-4, 9, -3)$	$\alpha = (ACD)$	$l = DB$	$h = BH$
12.	$B(3, 4, -5)$	$C(10, -4, 3)$	$D(-2, 9, 8)$	$\alpha = (BCD)$	$l = AC$	$h = AH$
13.	$B(-3, 9, 0)$	$C(4, 2, -7)$	$D(9, 4, -7)$	$\alpha = (ABC)$	$l = AD$	$h = DH$
14.	$B(-9, 7, 2)$	$C(5, -6, -8)$	$D(3, 0, -1)$	$\alpha = (ABD)$	$l = BC$	$h = CH$
15.	$B(7, -3, 0)$	$C(-1, 5, 11)$	$D(4, 0, -3)$	$\alpha = (ACD)$	$l = DB$	$h = BH$
16.	$B(1, 1, 1)$	$C(1, -8, 7)$	$D(7, 1, -2)$	$\alpha = (BCD)$	$l = AB$	$h = AH$
17.	$B(8, 12, 2)$	$C(5, -9, 2)$	$D(8, 0, -5)$	$\alpha = (ABC)$	$l = CD$	$h = DH$
18.	$B(6, -8, 1)$	$C(0, -8, 8)$	$D(-5, 2, -5)$	$\alpha = (ABD)$	$l = AC$	$h = CH$
19.	$B(4, 5, -8)$	$C(-4, -5, 8)$	$D(4, 10, 8)$	$\alpha = (ACD)$	$l = AB$	$h = BH$
20.	$B(12, -4, 1)$	$C(3, 0, -5)$	$D(3, 9, 5)$	$\alpha = (BCD)$	$l = AC$	$h = AH$
21.	$B(-2, 3, -7)$	$C(6, 3, 6)$	$D(1, -1, 0)$	$\alpha = (ABC)$	$l = AD$	$h = DH$

³ Длину высоты, координаты точки H и значение тригонометрической функции угла вычислите с точностью до сотых.

22.	$B(8, -8, 3)$	$C(1, 4, -5)$	$D(5, 0, -5)$	$\alpha = (ABD)$	$l = BC$	$h = CH$
23.	$B(-3, -5, 4)$	$C(4, 3, -5)$	$D(9, -5, -5)$	$\alpha = (ACD)$	$l = DB$	$h = BH$
24.	$B(2, -1, 3)$	$C(-3, -1, 8)$	$D(7, 10, -2)$	$\alpha = (BCD)$	$l = AD$	$h = AH$
25.	$B(7, 6, 0)$	$C(-2, -3, 0)$	$D(4, -8, 5)$	$\alpha = (ABC)$	$l = CD$	$h = DH$
26.	$B(5, -11, 0)$	$C(-1, 5, -3)$	$D(5, 0, 5)$	$\alpha = (ABD)$	$l = AC$	$h = CH$
27.	$B(-1, 1, 3)$	$C(2, 5, 9)$	$D(8, -3, -3)$	$\alpha = (ACD)$	$l = AB$	$h = BH$
28.	$B(5, 4, -3)$	$C(-3, 0, -3)$	$D(7, 4, 10)$	$\alpha = (BCD)$	$l = AC$	$h = AH$
29.	$B(-4, 13, 1)$	$C(6, 2, 7)$	$D(-1, 2, -5)$	$\alpha = (ABC)$	$l = BD$	$h = DH$
30.	$B(7, 5, 2)$	$C(-2, 0, -7)$	$D(-2, -3, 5)$	$\alpha = (ABD)$	$l = AC$	$h = CH$

Задание 3.3. Составьте уравнение линии на плоскости, каждая точка которой равноудалена от точки M_0 и прямой l . Сделайте чертеж. В первой и четвертой колонках таблицы заданий 3.3 расположены номера вариантов.

Таблица 3.3

1.	$M_0(p; 2)$	$l: y - 4 = 0$	2.	$M_0(2; q)$	$l: x + 2 = 0$
3.	$M_0(q; 5)$	$l: y + 1 = 0$	4.	$M_0(p; -4)$	$l: y + 3 = 0$
5.	$M_0(-3; p)$	$l: 2x - 3 = 0$	6.	$M_0(-2; q)$	$l: x - 6 = 0$
7.	$M_0(p; 3)$	$l: 2y + 1 = 0$	8.	$M_0(3; q)$	$l: 2x - 5 = 0$
9.	$M_0(1; q)$	$l: x + 4 = 0$	10.	$M_0(p; -2)$	$l: y - 2 = 0$
11.	$M_0(5; p)$	$l: 2x - 1 = 0$	12.	$M_0(-4; q)$	$l: x + 1 = 0$
13.	$M_0(q - 3; 0)$	$l: y - 3 = 0$	14.	$M_0(p; 2, 5)$	$l: 2y + 1 = 0$
15.	$M_0(3; p - 5)$	$l: x + 3 = 0$	16.	$M_0(0, 5; q - 1)$	$l: 2x - 3 = 0$
17.	$M_0(p; 3, 5)$	$l: 2y + 5 = 0$	18.	$M_0(q - 4; 7)$	$l: y - 9 = 0$
19.	$M_0(6; p - 7)$	$l: x = 0$	20.	$M_0(-1; q)$	$l: 2x + 1 = 0$
21.	$M_0(p - 6; 2)$	$l: y - 8 = 0$	22.	$M_0(q - 7; 5)$	$l: y = 0$
23.	$M_0(0, 5; q)$	$l: 2x + 5 = 0$	24.	$M_0(1; p - 3)$	$l: x - 5 = 0$
25.	$M_0(q; -1)$	$l: 2y - 1 = 0$	26.	$M_0(p - 8; 6)$	$l: y - 2 = 0$
27.	$M_0(0; p - 9)$	$l: x + 6 = 0$	28.	$M_0(-0, 5; p)$	$l: 2x - 5 = 0$
29.	$M_0(p - 4; 1)$	$l: y - 7 = 0$	30.	$M_0(q; 5, 5)$	$l: 2y - 3 = 0$

Задание 3.4. Приведите уравнение линии к каноническому виду и постройте ее. В первой и третьей колонках таблицы заданий 3.4 расположены номера вариантов.

Таблица 3.4

1.	$9x^2 + 4y^2 - 36x + 8y + 4 = 0$	2.	$4x^2 - 9y^2 + 24x - 18y - 9 = 0$
3.	$4x^2 + 25y^2 - 8x - 100y + 4 = 0$	4.	$5x^2 - 16y^2 - 32y = 0$
5.	$x^2 + 4y^2 - 8x - 16y = 0$	6.	$x^2 - 9y^2 + 4x + 13 = 0$
7.	$4x^2 + y^2 - 32x - 10y + 25 = 0$	8.	$x^2 - 3y^2 + 6x - 12y = 0$
9.	$5x^2 + y^2 - 10x - 4y - 1 = 0$	10.	$x^2 + 6y^2 + 12y - 3 = 0$
11.	$x^2 + y^2 - 2x + 10y + 1 = 0$	12.	$4x^2 + y^2 + 24x - 8y + 36 = 0$
13.	$9x^2 - 25y^2 - 54x - 100y = 44$	14.	$x^2 + y^2 + 14x - 8y + 29 = 0$
15.	$x^2 - 16y^2 + 10x + 96y - 103 = 0$	16.	$25x^2 + 4y^2 + 50x - 48y + 19 = 0$
17.	$9x^2 - 2y^2 + 54x + 12y + 45 = 0$	18.	$x^2 + y^2 - 10x + 2y - 23 = 0$
19.	$9x^2 + 5y^2 + 72x - 20y + 119 = 0$	20.	$x^2 - 4y^2 - 14x + 16y + 29 = 0$
21.	$x^2 + y^2 - 4x + 12y + 16 = 0$	22.	$16x^2 - 5y^2 + 32x + 30y + 51 = 0$
23.	$16x^2 + 9y^2 - 32x - 36y - 92 = 0$	24.	$x^2 - y^2 - 14x - 10y + 20 = 0$
25.	$x^2 + y^2 - 10x + 10y + 25 = 0$	26.	$x^2 + 9y^2 + 8x - 54y + 88 = 0$
27.	$x^2 - 25y^2 - 8x - 50y + 16 = 0$	28.	$x^2 + y^2 + 14x - 8y + 64 = 0$
29.	$16x^2 + y^2 - 24x + 6y + 9 = 0$	30.	$x^2 - 4y^2 + 8x + 8y - 4 = 0$

3.3. РАЗБОР РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ ВАРИАНТА № 30 ($p = 18, q = 1$)

Задание 3.1. Даны три вершины прямоугольной трапеции $ABCD$: $B(-2, -8)$, $C(10, 8)$ и $D(19, -3)$, $BC \parallel AD$, угол при вершине A равен 90° . Найдите уравнения стороны AB , средней линии трапеции, диагонали BD , длину высоты и угол между высотой и диагональю BD .

Решение. Отметим на координатной плоскости точки B , C и D , соединим отрезками точки B и C , C и D . Через точку D проведем прямую, параллельную BC , из точки B восстановим перпендикуляр до пересечения с этой прямой – получим точку A (рис. 3.11). Трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC построена. Трапеция прямоугольная:

$$\angle A = \angle B = 90^\circ.$$

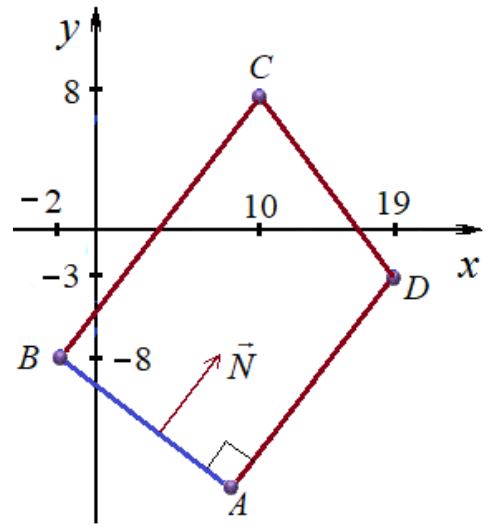


Рис. 3.11

Стороне AB принадлежит известная точка $B(-2, -8)$, а вектор $\overrightarrow{BC}$ ей перпендикулярен, т.е. является нормалью к прямой AB . Координаты вектора $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{BC} = \{10 + 2; 8 + 8\} = \{12; 16\} = 4\{3; 4\}.$$

В качестве нормали можно взять вектор $\vec{N} = \{3; 4\}$, который направлен также как вектор $\overrightarrow{BC}$, но в 4 раза короче (рис. 3.11). По формуле (3.1) составим уравнение прямой AB :

$$3(x + 2) + 4(y + 8) = 0.$$

Раскроем скобки, приведем подобные и получим общее уравнение прямой

$$AB: 3x + 4y + 38 = 0.$$

Средняя линия MP трапеции – отрезок, соединяющий середины боковых ребер AB и CD (рис. 3.12). Координаты вершин C и D даны в условии задачи. По формулам (3.6) находим координаты середины отрезка CD – точки P :

$$x_P = \frac{10 + 19}{2} = 14,5; \quad y_P = \frac{8 - 3}{2} = 2,5.$$

Кроме того, средняя линия параллельна основаниям трапеции, в частности основа-

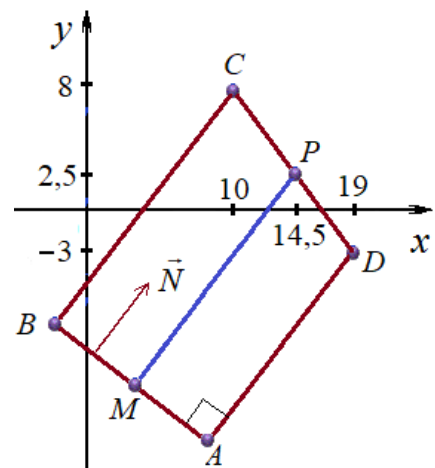


Рис. 3.12

нию BC , а, следовательно, вектору $\overrightarrow{BC}$ и вектору $\vec{N}$. Тогда вектор $\vec{N}$ является направляющим для прямой MP , и точка $P(14,5;2,5)$ принадлежит этой прямой. Составим каноническое уравнение прямой MP (формула (3.2)):

$$\frac{x-14,5}{3} = \frac{y-2,5}{4}.$$

Преобразуем каноническое уравнение прямой в общее уравнение. По свойству пропорции умножим члены пропорции «крест-накрест». Затем умножим обе части равенства на 2, для того чтобы избавиться от дробей, и приведем подобные:

$$4x - 58 = 3y - 7,5 \Leftrightarrow 8x - 116 = 6y - 15 \Leftrightarrow 8x - 6y - 101 = 0.$$

Получили общее уравнение прямой MP :

$$MP: 8x - 6y - 101 = 0.$$

Координаты концов диагонали BD (рис. 3.13) известны, поэтому составим уравнение прямой BD по двум точкам (формула (3.3)):

$$\frac{x+2}{19+2} = \frac{y+8}{-3+8}.$$

Преобразуем каноническое уравнение прямой BD к общему виду так же, как это было сделано для прямой MP :

$$\frac{x+2}{21} = \frac{y+8}{5} \Leftrightarrow 5x+10=21y+168 \Leftrightarrow 5x-21y-158=0.$$

Общее уравнение прямой BD принимает вид

$$BD: 5x - 21y - 158 = 0.$$

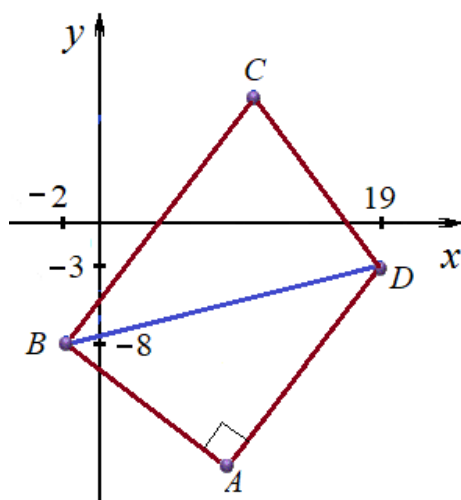


Рис. 3.13

Высотой трапеции является сторона AB , но известны только координаты точки B . Этого недостаточно для того, чтобы найти длину AB . С другой стороны, длина высоты – это расстояние между двумя основаниями трапеции или удвоенное расстояние от одного основания до средней линии MP , т.е. $2BM$ (рис. 3.12). Расстояние $BM = d$ можно найти как расстояние от точки $B(-2, -8)$ до прямой MP по формуле (3.5):

$$d = \frac{|8 \cdot (-2) - 6 \cdot (-8) - 101|}{\sqrt{8^2 + (-6)^2}} = \frac{69}{10} = 6,9.$$

Тогда длина высоты трапеции $ABCD$ в 2 раза больше, т.е. равна 13,8.

Пусть φ – угол между стороной AB (высотой трапеции) и диагональю BD (рис. 3.14). Уравнения прямых AB и BD известны, поэтому по первой из формул (3.4) найдем косинус угла между прямыми. Выпишем векторы нормалей к прямым:

$$\vec{N}_{AB} = \{3, 4\}, \quad \vec{N}_{BD} = \{5, -21\}.$$

По первой из формул (3.4) имеем

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{N}_{AB} \cdot \vec{N}_{BD}|}{|\vec{N}_{AB}| \cdot |\vec{N}_{BD}|} = \frac{|3 \cdot 5 + 4 \cdot (-21)|}{\sqrt{3^2 + 4^2} \cdot \sqrt{5^2 + (-21)^2}} = \frac{69}{5 \cdot \sqrt{466}}.$$

$$\text{Следовательно, } \angle ABD = \arccos \frac{69}{5\sqrt{466}}.$$

$$\text{Ответ: } AB: 3x + 4y + 38 = 0;$$

$$MP: 8x - 6y - 101 = 0;$$

$$BD: 5x - 21y - 158 = 0; \text{ длина высоты равна } 13,8; \angle ABD = \arccos \frac{69}{5\sqrt{466}}.$$

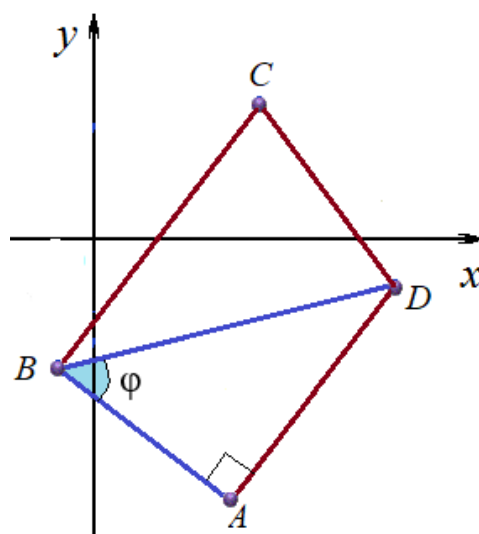


Рис. 3.14

Задание 3.2. В пирамиде $ABCD$, где $A(18, 1, 17)$, $B(7, 5, 2)$, $C(-2, 0, -7)$, $D(-2, -3, 5)$, найдите уравнения грани ABD , ребра AC , высоты CH , длину высоты CH , координаты основания H высоты пирамиды, угол между ребром AC и плоскостью ABD . Изобразите схематично пирамиду $ABCD$ и ее элементы.

Решение. Составим уравнение плоскости ABD (рис. 3.15) по трем точкам по формуле (3.8). В качестве первой точки возьмем ту,

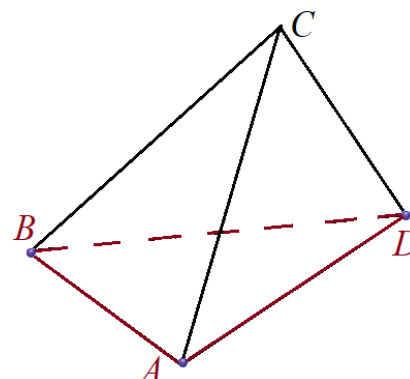


Рис. 3.15

координаты которой меньше, – точку D , в качестве второй точку A , в качестве третьей точку B :

$$\begin{vmatrix} x+2 & y+3 & z-5 \\ 18+2 & 1+3 & 17-5 \\ 7+2 & 5+3 & 2-5 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+2 & y+3 & z-5 \\ 20 & 4 & 12 \\ 9 & 8 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскроем определитель по правилу треугольника:

$$\begin{aligned} -12(x+2) + 108(y+3) + 160(z-5) - (36 \cdot (z-5) - 60(y+3) + 96(x+2)) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -108(x+2) + 168(y+3) + 124(z-5) &= 0. \end{aligned}$$

Разделим обе части равенства на « -4 » и раскроем скобки:

$$27(x+2) - 42(y+3) - 31(z-5) = 0,$$

$$(ABD): 27x - 42y - 31z + 83 = 0.$$

Получили общее уравнение плоскости – грани ABD .

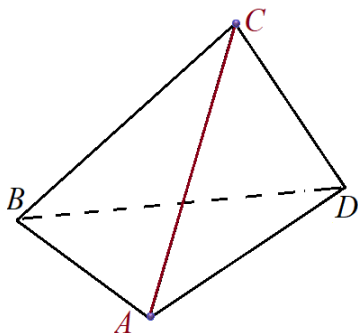


Рис. 3.16

Ребро AC лежит на прямой, которую тоже можно обозначить AC . Известны две точки $A(18,1,17)$ и $C(-2,0,-7)$ (рис. 3.16), принадлежащие прямой, поэтому составляем уравнение прямой по двум точкам (формула (3.12)), выбирая в качестве первой точки точку C :

$$\frac{x+2}{-2-(-2)} = \frac{y-0}{0-0} = \frac{z+7}{-7-7} \Leftrightarrow \frac{x+2}{20} = y = \frac{z+7}{24}.$$

Получили канонические уравнения прямой:

$$AC: \frac{x+2}{20} = y = \frac{z+7}{24}.$$

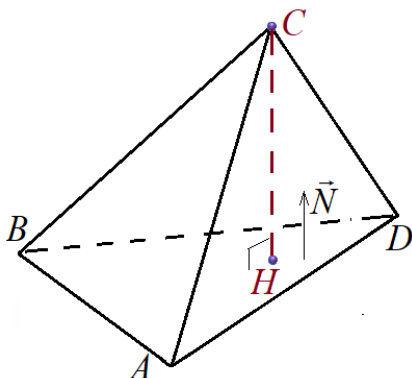


Рис. 3.17

Высота CH лежит на прямой, перпендикулярной грани ABD (основание пирамиды $ABCD$) и проходящей через точку $C(-2,0,-7)$ (рис. 3.17). Нормаль $\vec{N}$ к плоскости ABD является направляющим вектором прямой CH . Координаты нормали – это коэффициенты при переменных x , y и z в уравнении плоскости ABD , т.е. $\vec{N} = \{27, -42, -31\}$.

Имея направляющий вектор $\vec{S}_h = \vec{N}$ и точку C на прямой, составим канонические уравнения прямой CH (формула (3.10)):

$$CH: \frac{x+2}{27} = \frac{y}{-42} = \frac{z+7}{-31}.$$

Длина высоты CH равна расстоянию от точки C до плоскости ABD . По формуле (3.9) находим это расстояние:

$$CH = d = \frac{|27 \cdot (-2) - 42 \cdot 0 - 31 \cdot (-7) + 83|}{\sqrt{27^2 + (-42)^2 + (-31)^2}} = \frac{246}{\sqrt{3454}} \approx 4,19.$$

Вычислили расстояние с точностью до сотых.

Найдем координаты точки H – основания высоты CH пирамиды. Эта точка является точкой пересечения прямой CH и плоскости ABD (рис. 3.17). Для того чтобы ее найти, перейдем от канонических уравнений прямой CH к параметрическим. Коэффициент пропорциональности в канонических уравнениях прямой CH обозначим t и выразим x , y и z через t :

$$CH: \frac{x+2}{27} = \frac{y}{-42} = \frac{z+7}{-31} = t \Leftrightarrow CH: \begin{cases} x = 27t - 2, \\ y = -42t, \\ z = -31t - 7. \end{cases}$$

Подставим выражения $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ из системы параметрических уравнений прямой в уравнение плоскости ABD :

$$27(27t - 2) - 42(-42t) - 31(-31t - 7) + 83 = 0.$$

Имеем линейное уравнение с неизвестным t , его решением является

$$t = -\frac{246}{3454} = -\frac{123}{1727}.$$

При таком значении параметра t прямая CH имеет общую точку с плоскостью ABD – точку H . Подставим это значение t в параметрические уравнения прямой CH :

$$x = 27 \cdot \left(-\frac{123}{1727}\right) - 2 = -\frac{6775}{1727} \approx -3,92,$$

$$y = -42 \cdot \left(-\frac{123}{1727}\right) = \frac{5166}{1727} \approx 2,99,$$

$$z = -31 \cdot \left(-\frac{123}{1727} \right) - 7 = -\frac{8276}{1727} \approx -4,79.$$

Таким образом, найдены приближенные значения координат основания высоты CH пирамиды: $H(-3,92; 2,99; -4,79)$.

Синус угла между прямой AC и плоскостью ABD (рис. 3.18) можно найти по формуле (3.13). Для этого понадобятся вектор $\vec{N} = \{27, -42, -31\}$ нормали

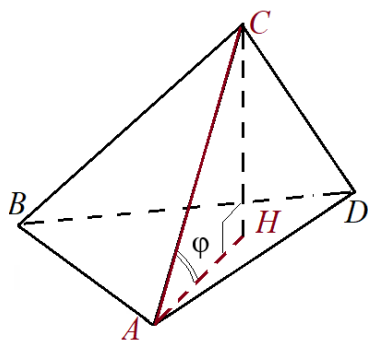


Рис. 3.18

к плоскости ABD и направляющий вектор $\vec{S}$ прямой AC , заимствованный из канонических уравнений прямой (координаты вектора $\vec{S}$ расположены в знаменателе дробей канонических уравнений прямой AC):

$$\vec{S} = \{20, 1, 24\}.$$

По формуле (3.13) имеем

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{N} \cdot \vec{S}|}{|\vec{N}| \cdot |\vec{S}|} = \frac{|27 \cdot 20 - 42 \cdot 1 - 31 \cdot 24|}{\sqrt{27^2 + (-42)^2 + (-31)^2} \cdot \sqrt{20^2 + 1^2 + 24^2}} \approx 0,13.$$

Следовательно, приближенное значение искомого угла

$$\angle \varphi \approx \arcsin 0,13.$$

Ответ: $(ABD): 27x - 42y - 31z + 83 = 0$; $AC: \frac{x+2}{20} = y = \frac{z+7}{24}$;

$CH: \frac{x+2}{27} = \frac{y}{-42} = \frac{z+7}{-31}$; $CH \approx 4,19$; $H(-3,92; 2,99; -4,79)$; $\angle \varphi \approx \arcsin 0,13$.

Задание 3.3. Составьте уравнение линии на плоскости, каждая точка которой равноудалена от точки $M_0(1; 5; 5)$ и прямой $l: 2y - 3 = 0$. Сделайте чертеж.

Решение. Линией, каждая точка которой равноудалена от фиксированной точки и от фиксированной прямой, является парабола. Точка M_0 является ее фокусом, а прямая l – директрисой. Прежде всего следует выбрать вид уравнения, один из четырех, а для этого необходимо знать, какая прямая является

осью параболы, и куда направлены ее ветви. Ось параболы проходит через фокус перпендикулярно директрисе, поэтому изобразим на координатной плоскости фокус $M_0(1;5,5)$ и директрису:

$$l: 2y - 3 = 0 \text{ или } l: y = 1,5$$

(рис. 3.19). Поскольку ветви параболы направлены в сторону, противоположную директрисе, т.е. вверх, то уравнение параболы имеет вид

$$(x - x_0)^2 = 2\rho(y - y_0). \quad (3.17)$$

Осталось найти три числа: x_0 , y_0 и ρ . Здесь x_0 и y_0 – координаты вершины A параболы. Вершина расположена на оси параболы, следовательно, $x_0 = 1$. Вершина расположена посередине между фокусом и директрисой (рис. 3.19), поэтому по формуле (3.6) получаем

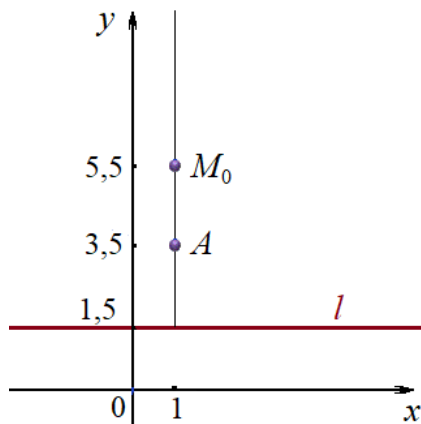


Рис. 3.19

$$y_0 = \frac{5,5 + 1,5}{2} = 3,5.$$

Итак, вершина найдена: $A(1;3,5)$. Параметр параболы ρ равен расстоянию от фокуса до директрисы. Из геометрических соображений (рис. 3.19) имеем

$$\rho = 5,5 - 1,5 = 4.$$

Подставим все найденные числа в уравнение (3.17) и получим каноническое уравнение искомой параболы:

$$(x - 1)^2 = 8(y - 3,5).$$

Парабола однозначно определяется тремя точками, одна из них уже есть – это вершина $A(1;3,5)$. Еще координаты двух точек можно легко получить, присвоив ординате y такое значение, при котором в правой части уравнения получался квадрат целого числа. Например, при $y = 5,5$ в правой части получаем произведение $8 \cdot 2 = 16$. Тогда

$$(x - 1)^2 = 8(5,5 - 3,5) \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3, \\ x = 5. \end{cases}$$

Таким образом, на высоте $y = 5,5$ находятся две точки с целыми абсциссами, симметричные относительно оси параболы: $C(-3; 5,5)$ и $C'(5; 5,5)$. Для более точного построения возьмем еще две точки. Если $y = 8$, тогда в правой части уравнения получаем число $8 \cdot 4,5 = 36$ и находим еще две точки:

$$(x-1)^2 = 8(8-3,5) \Leftrightarrow (x-1)^2 = 36 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5, \\ x = 7. \end{cases}$$

Дополнительные точки: $B(-5; 8)$ и $B'(7; 8)$. Отмечаем все пять точек на координатной плоскости, соединяем их плавной кривой и продолжаем ветви параболы вверх (рис. 3.20).

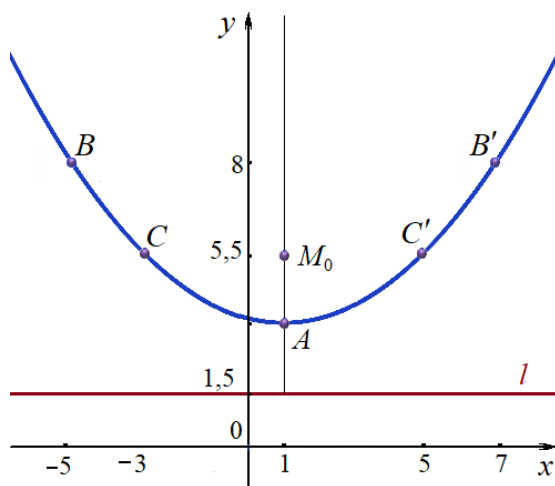


Рис. 3.20

Ответ: $(x-1)^2 = 8(y-3,5)$; чертеж параболы на рис. 3.20.

Задание 3.4. Приведите уравнение линии

$$x^2 - 4y^2 + 8x + 8y - 4 = 0$$

к каноническому виду и постройте ее.

Решение. Приведем уравнение линии к каноническому виду. Для этого сгруппируем переменные и выделим полный квадрат. Напомним формулы сокращенного умножения – квадрата разности и квадрата суммы:

$$(c-d)^2 = c^2 - 2cd + d^2, \quad (c+d)^2 = c^2 + 2cd + d^2.$$

Сгруппируем переменные в две скобки и вынесем коэффициент перед квадратом переменной за скобку:

$$(x^2 + 8x) - (4y^2 - 8y) - 4 = 0, \quad (x^2 + 8x) - 4(y^2 - 2y) - 4 = 0.$$

В первой скобке имеем первые два слагаемых из трех квадрата суммы, т.е. $c^2 = x^2$ и $2cd = 8x$, тогда $d = 4$. Поэтому в первой скобке до полного квадрата не хватает $d^2 = 16$. Прибавим и вычтем, для того чтобы выражение не изменилось, число 16 в первой скобке. Аналогично рассуждая, во второй скобке можно получить квадрат разности, если прибавить число 1. Преобразуем выражения в скобках, выделим полный квадрат и свернем его:

$$\begin{aligned}(x^2 + 8x + 16 - 16) - 4(y^2 - 2y + 1 - 1) - 4 &= 0, \\ ((x^2 + 8x + 16) - 16) - 4((y^2 - 2y + 1) - 1) - 4 &= 0, \\ ((x + 4)^2 - 16) - 4((y - 1)^2 - 1) - 4 &= 0.\end{aligned}$$

Раскроем внешние скобки, приведем подобные и перенесем свободный член в правую часть равенства:

$$(x + 4)^2 - 16 - 4(y - 1)^2 + 4 - 4 = 0, \quad (x + 4)^2 - 4(y - 1)^2 = 16.$$

В правой части в каноническом уравнении должно быть число 1, поэтому разделим обе части равенства на 16, получим $\frac{(x + 4)^2}{16} - \frac{(y - 1)^2}{4} = 1$ – каноническое уравнение гиперболы (3.15). Знак минус находится перед квадратом переменной y , поэтому расположению гиперболы на координатной плоскости соответствует рис. 3.8. По уравнению линии определим параметры гиперболы. Координаты центра: $x_0 = -4$, $y_0 = 1$. Оси гиперболы:

$$a = \sqrt{16} = 4, \quad b = \sqrt{4} = 2.$$

Перейдем к построению, алгоритм которого приведен в пункте 3.1.3. Отметим центр C : $x_0 = -4$, $y_0 = 1$. Через центр проводим оси симметрии гиперболы – прямые, параллельные координатным осям (рис. 3.21). На горизонтальной оси от центра откладываем влево и вправо расстояние, равное $a = 4$, получаем две точки с абсциссами -8 и 0 (вторая точка оказалась на координатной оси Oy). Эти точки $A(-8;1)$ и $A'(0;1)$ лежат на действительной оси и являются вершинами гиперболы. На вертикальной оси от центра откладываем вверх и вниз расстояние $b = 2$, получаем две точки с ординатами -1 и 3 . Через отмеченные таким образом четыре точки на осях симметрии проводим прямые, параллельные координатным осям – получаем базовый прямоугольник. Затем строим диагонали прямоуголь-

ника, продолжая их за прямоугольник, – асимптоты гиперболы (рис. 3.21). Гипербола находится вне базового прямоугольника, проходит через вершины A и A' и сколь угодно близко подходит к асимптотам при неограниченном удалении точек гиперболы от центра.

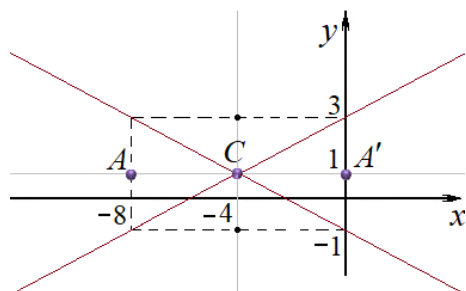


Рис. 3.21

Для уточнения построения найдем дополнительные точки. Здесь найти точки с рациональными координатами сложнее, поэтому произведем приближенные вычисления. При $y = 3$ имеем точки гиперболы, абсциссы которых равны

$$\frac{(x+4)^2}{16} - \frac{(3-1)^2}{4} = 1 \Leftrightarrow (x+4)^2 = 32 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4\sqrt{2} - 4 \approx 1,6, \\ x = -4\sqrt{2} - 4 \approx -9,6. \end{cases}$$

Учитывая симметрию относительно горизонтальной оси, точки с такими же абсциссами лежат на гиперболе на высоте $y = -1$. Итак, имеем четыре дополнительные точки $B(-9,6; 3)$, $B'(1,6; 3)$, $D(-9,6; -1)$ и $D'(1,6; -1)$. Через найденные три точки A , B и D строим левую ветвь гиперболы, приближая ее части к асимптотам по мере удаления от центра. Аналогично через точки A' , B' и D' строим правую ветвь гиперболы (рис. 3.22).

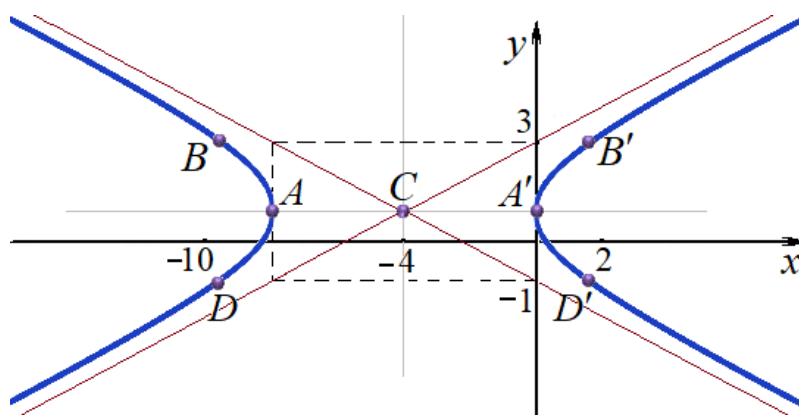


Рис. 3.22

Учитывая двухстороннюю симметрию гиперболы, достаточно построить половину одной ветви, а затем зеркально отразить вниз относительно горизонтальной оси симметрии и влево относительно вертикальной оси.

Ответ: $\frac{(x+4)^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$; чертеж гиперболы на рис. 3.22.

4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Дифференциальное исчисление – раздел математического анализа, начало которому положили в конце XVII века труды немецкого математика Готфрида Вильгельма Лейбница, посвященные исследованию функций. Основным понятием дифференциального исчисления является понятие производной. Производная функции в данной точке – это число, которое характеризует скорость изменения функции в точке.

4.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ФОРМУЛЫ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

4.1.1. Правила дифференцирования

Операция нахождения производной называется *дифференцированием* функции. Если в точке x_0 существует производная $f'(x_0)$, то говорят что функция *дифференцируема* в точке x_0 . Функция называется *дифференцируемой на интервале* (a,b) , если она дифференцируема во всех точках этого интервала. Принимая определенные значения в каждой точке x интервала (a,b) , производная $f'(x)$ также является функцией, определенной на интервале (a,b) . Обозначения производной функции $y = f(x)$:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x).$$

При нахождении производных пользуются готовой таблицей и правилами дифференцирования.

Таблица производных

- | | | |
|---|---|--|
| 1. $C' = 0, C = \text{const};$ | 6. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$ | 11. $(\ln x)' = \frac{1}{x};$ |
| 2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1};$ | 7. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$ | 12. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$ |

$$\begin{array}{lll}
3. \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}; & 8. \quad (a^x)' = a^x \ln a; & 13. \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \\
4. \quad (\sin x)' = \cos x; & 9. \quad (e^x)' = e^x; & 14. \quad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}; \\
5. \quad (\cos x)' = -\sin x; & 10. \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}; & 15. \quad (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.
\end{array}$$

Правила дифференцирования

1. Пусть $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые функции, $C = \text{const}$. Тогда

$$(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x); \quad (4.1)$$

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x), \quad (C \cdot u(x))' = C \cdot u'(x); \quad (4.2)$$

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)} \right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}, \text{ если } v(x) \neq 0. \quad (4.3)$$

2. Производная сложной функции. Если функция $u(x)$ дифференцируема в точке x , функция $f(y)$ дифференцируема в точке $y = u(x)$, тогда для производной сложной функции $f(u(x))$ справедлива формула

$$(f(u(x)))' = f'(u(x)) \cdot u'(x). \quad (4.4)$$

Если нужно найти производную, то функцию $f(x)$ надо преобразовать, вообще говоря, в другую функцию $f'(x)$, используя таблицу производных и правила дифференцирования. Проще всего дифференцировать функции, полностью совпадающие с табличными, например:

$$(x^4)' = 4x^3, \quad \left(\sqrt[3]{x^2} \right)' = (x^{2/3})' = \frac{2}{3} x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}},$$

$$(4^x)' = 4^x \ln 4, \quad (\log_5 x)' = \frac{1}{x \ln 5}.$$

Если аналитическое выражение для функции $f(x)$ содержит арифметические действия (сложение, вычитание, умножение или деление), то пользуемся первым правилом дифференцирования. Например:

$$(2\cos x + 3x^2 + 5)' = 2(\cos x)' + 3(x^2)' + (5)' = -2\sin x + 6x.$$

Здесь, кроме табличных производных, использованы формула (4.1) и вторая из формул (4.2). Первая из формул (4.2) позволяет дифференцировать произведение функций:

$$\begin{aligned} ((1+x^2) \cdot \operatorname{arctg} x)' &= (1+x^2)' \cdot \operatorname{arctg} x + (1+x^2) \cdot (\operatorname{arctg} x)' = \\ &= 2x \cdot \operatorname{arctg} x + (1+x^2) \cdot \frac{1}{1+x^2} = 2x \cdot \operatorname{arctg} x + 1. \end{aligned}$$

По формуле (4.3) находим производную частного:

$$\left(\frac{\ln x}{x^3}\right)' = \frac{(\ln x)' \cdot x^3 - \ln x \cdot (x^3)'}{x^6} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^3 - \ln x \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{x^2 - \ln x \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{1 - 3\ln x}{x^4}.$$

Основная сложность при дифференцировании функций заключается в применении формулы (4.4) – производной сложной функции, наиболее востребованной. Для того чтобы ею воспользоваться, надо понимать, на какие функции распадается сложная функция. Каждая внутренняя функция является аргументом некоторой внешней функции – получаем своеобразную «матрешку». Находим производную внешней составляющей функции, не меняя ее аргумент, а затем переходим к следующей функции, которая является аргументом внешней, как бы отбрасываем внешнюю куклу «матрешки». Затем все эти производные умножаются. Например, функция

$$\sin^3(5x+3) = (\sin(5x+3))^3$$

состоит из трех функций: внешняя функция – степенная u^3 ; ее аргументом и одновременно следующей функцией (куклой «матрешки») является синус $u = \sin v$; третьей функцией является аргумент синуса – $v = 5x + 3$. Таким образом, при дифференцировании получаем

$$\begin{aligned} (\sin^3(5x+3))' &= 3(\sin(5x+3))^2 \cdot (\sin(5x+3))' = \\ &= 3\sin^2(5x+3) \cdot \cos(5x+3) \cdot (5x+3)' = 15\sin^2(5x+3)\cos(5x+3). \end{aligned}$$

4.1.2. Техника дифференцирования

Для некоторых классов функций существуют специальные приемы и формулы в дополнение к рассмотренным выше, позволяющие находить производные этих функций.

1. *Логарифмическое дифференцирование.* При дифференцировании показательно-степенной функции $y = (f(x))^{g(x)}$, а также функции, представляющей собой произведение (или частное) большого количества сомножителей (больше двух), применяют специальный прием. Сначала обе части уравнения логарифмируют, в результате по свойствам логарифма показатель степени становится сомножителем, а логарифм произведения (частного) распадается в сумму маленьких логарифмов. Затем обе части равенства дифференцируют.

Покажем описанный прием на примере. Найдем производную функции $y = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$. Сначала логарифмируем обе части уравнения:

$$\ln y = \ln(\sin x)^{\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} x \cdot \ln(\sin x).$$

Здесь, конечно, предполагается, что все действия правомерны. Затем дифференцируем обе части равенства, учитывая при этом, что $y = y(x)$ – переменная y зависит от переменной x :

$$\frac{d(\ln y)}{dx} = \frac{d(\operatorname{tg} x \cdot \ln(\sin x))}{dx} \Leftrightarrow \frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \ln(\sin x) + \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x;$$

выражаем y' :

$$y' = y \cdot \left(\frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x} + 1 \right),$$

а затем подставляем вместо переменной y ее аналитическое выражение:

$$y' = (\sin x)^{\operatorname{tg} x} \cdot \left(\frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x} + 1 \right).$$

2. *Дифференцирование неявно заданных функций.* Функция $y(x)$ задана неявно, если она задана уравнением $F(x, y) = 0$. Это уравнение при некоторых условиях на функцию F определяет одну или несколько функций $y(x)$. При

этом переменную y из уравнения либо выразить не удастся, либо выражение ее приводит к такой громоздкой совокупности, что гораздо проще находить производную $y'(x)$, используя уравнение $F(x, y) = 0$. Техника дифференцирования неявно заданной функции: дифференцируем обе части уравнения $F(x, y) = 0$ по переменной x , учитывая, что y зависит от x , а затем выражаем производную y' .

Например, найдем таким способом производную функции $y(x)$, заданной неявно уравнением $2x^3 - y^3 + e^{xy} = 5$. Дифференцируем обе части уравнения:

$$\frac{d(2x^3 - y^3 + e^{xy})}{dx} = \frac{d5}{dx} \Leftrightarrow 6x^2 - 3y^2 y' + e^{xy}(y + xy') = 0.$$

Преобразуем уравнение и выражаем y' :

$$3y^2 y' - xe^{xy} y' = 6x^2 + ye^{xy}, \quad y' = \frac{6x^2 + ye^{xy}}{3y^2 - xe^{xy}}.$$

3. *Дифференцирование функций, заданных параметрически.* При решении технических, экономических и других задач зачастую функции $y(x)$ задаются параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in T,$$

роль параметра t в которых играет время. Если функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы на множестве T , то дифференцируема и функция $y(x)$, где $x = x(t)$, $t \in T$, производная которой находится по формуле

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}. \quad (4.5)$$

Найдем производную dy/dx функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = e^{-t} \cos t, \\ y = e^{-t} \sin t. \end{cases}$$

Сначала найдем производные по переменной t функций $x(t)$ и $y(t)$.

Имеем производные произведения, первая из формул (4.2):

$$x'(t) = -e^{-t} \cos t - e^{-t} \sin t, \quad y'(t) = -e^{-t} \sin t + e^{-t} \cos t.$$

Затем по формуле (4.5) составляем искомую производную:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-e^{-t} \sin t + e^{-t} \cos t}{-e^{-t} \cos t - e^{-t} \sin t} = \frac{\sin t - \cos t}{\sin t + \cos t}.$$

4.2. ЗАДАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задание 4.1. Найдите производные $y' = \frac{dy}{dx}$ функций, заданных в

табл. 4.1. Функции в заданиях (а), (б) и (в) дифференцируются с помощью таблицы производных и правил дифференцирования. Для функций задания (г) применяется логарифмическое дифференцирование, задания (д) – производная неявно заданной функции, задания (е) – производная параметрически заданной функции. В первой колонке таблицы заданий 4.1 – номер варианта.

Таблица 4.1

1.	а) $y = (x-1) \cdot (x^2 + x + 1)$; г) $y = (1+x^2)^{\sin 3x}$;	б) $y = \frac{\ln 3 \cdot \sin x}{e^x}$; д) $x^2 + y^2 - \sin(2x + 3y) = 0$;	в) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$; е) $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3. \end{cases}$
2.	а) $y = \frac{x^5 - 1}{x - 1}$; г) $y = \frac{(2x+1)(x-1)^5 \sqrt{1+x}}{\sqrt[5]{x^2+1}}$;	б) $y = e^x \cdot (3x^2 - 6x + 6)$; д) $\ln(y - 2x) = x^3 y^2$;	в) $y = \arcsin \sqrt{\frac{x}{1 - \ln^3 x}}$; е) $\begin{cases} x = t^2 \sin t, \\ y = t^2 \cos t. \end{cases}$
3.	а) $y = e^{x^2} \cdot \arccos 3x$; г) $y = (1+x^2)^{\ln x}$;	б) $y = \frac{1+x^3-x^6}{\sqrt{x^3}}$; д) $2x + xy^2 = \operatorname{tg}(y+x)$;	в) $y = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}})$; е) $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \ln(1-t^2). \end{cases}$
4.	а) $y = \sin^3(5x) \cdot \cos^2(3x)$; г) $y = \frac{(x^2-1) \cdot \sqrt[3]{1-x}}{x \cdot \sqrt{x-1}}$;	б) $y = \frac{\ln^2 x}{x^3}$; д) $x^2 y + x = \arcsin y$;	в) $y = 3^{\operatorname{tg}(2x^2+5)}$; е) $\begin{cases} x = (t+1)/t, \\ y = (t-1)/t. \end{cases}$

5.	$a) y = (x^3 + x + 3) \cdot e^{2x};$ $z) y = (1 + x^3)^{2x};$	$b) y = \frac{\ln 2 \cdot \cos x - \sin x}{2^x};$ $d) \operatorname{tg} \frac{y}{x} = 2x + 3y;$	$e) y = \ln \operatorname{arctg} x^2;$ $e) \begin{cases} x = \sqrt{2t - t^2}, \\ y = \arcsin(t - 1). \end{cases}$
6.	$a) y = (\sin x - 2 \sin^2 x) \cdot \cos x;$ $z) y = \frac{\cos x \cdot \sqrt{1 + x^2}}{\sqrt[3]{3 - x} \cdot \sqrt{x - 1}};$	$b) y = 4 \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x^2}};$ $d) yx - 2x^2 = \operatorname{arctg} y;$	$e) y = \ln(1 + 2^{x^2});$ $e) \begin{cases} x = t^2 5^t, \\ y = t^3 5^{2t}. \end{cases}$
7.	$a) y = x \cdot \ln \sqrt{1 + x^2};$ $z) y = (\operatorname{tg} x)^{x^2};$	$b) y = \frac{4 \sin x}{\cos^2 x};$ $d) e^x + e^y = 3^{xy};$	$e) y = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{\sqrt{2}}{x};$ $e) \begin{cases} x = t^3 + 8t^2, \\ y = t^5 - 2t^3. \end{cases}$
8.	$a) y = (3x + 1)^3 \cdot 3^x;$ $z) y = \frac{(1 + x) \sqrt{2 + x^2} \cdot \sqrt[3]{3 + x^3}}{\sqrt[5]{3x - 1}};$	$b) y = \frac{1 + x - x^2}{\sqrt{x}};$ $d) 2x \ln y = x^2 + y;$	$e) y = \operatorname{tg} \arccos\left(\frac{1}{x}\right);$ $e) \begin{cases} x = \cos t, \\ y = t - \sin t. \end{cases}$
9.	$a) y = e^{2x} \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{2x} \right);$ $z) y = (1 + x^3)^{\ln(x^3 + 1)};$	$b) y = \frac{\sin x - x \cos x}{x \sin x + \cos x};$ $d) y \sin x = \cos(x - y);$	$e) y = \left(\arcsin \sqrt[3]{3^x} \right)^5;$ $e) \begin{cases} x = \ln \sqrt{\frac{1 - t}{1 + t}}, \\ y = \sqrt{1 - t^2}. \end{cases}$
10.	$a) y = (2x - 1)^4 \cdot (x + 2)^5;$ $z) y = \frac{(x + 1)^2 \cdot \sqrt[5]{2x - 3}}{(x + 5)^4 \sqrt{2x - 4}};$	$b) y = e^{\operatorname{tg} x} - \frac{\ln x}{\sqrt{1 - x^2}};$ $d) x^3 + y^3 = 3x \cos y;$	$e) y = \operatorname{arctg} 2^{\sin x};$ $e) \begin{cases} x = 3 \cos^2 t, \\ y = 2 \sin^3 t. \end{cases}$
11.	$a) y = (x - 1) \cdot e^{-x^2};$ $z) y = \left(\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} \right)^x;$	$b) y = \ln 2 - \frac{x^2 + \sqrt{x}}{3x - 1};$ $d) x^4 + y^4 = x^2 y^2;$	$e) y = \ln \operatorname{arccotg} \frac{x}{\sin x};$ $e) \begin{cases} x = \sqrt{1 - t^2}, \\ y = \frac{t}{\sqrt{1 - t^2}}. \end{cases}$

12.	$a) y = (1 - x^2) \cdot \cos^2 x + e^4 ;$ $z) y = \frac{(2 - x^3) \cdot \sin x \cdot e^{\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x+7} \cdot \sqrt[5]{(x+7)^4}} ;$	$b) y = \frac{10x^4 - 3x^2}{(3x^2 - 1)^2} ;$ $d) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln(x^2 + y^2) ;$	$e) y = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}} ;$ $e) \begin{cases} x = t^2 e^{-t}, \\ y = t^3 e^t. \end{cases}$
13.	$a) y = x^4 \cdot \sqrt[3]{(x^2 + 5)^2} ;$ $z) y = (\operatorname{arctg} x)^{\ln x} ;$	$b) y = \frac{\arcsin(x/2)}{\sqrt{4 - x^2}} ;$ $d) x \cdot e^y = y \cdot e^x ;$	$e) y = \ln(1 + 2^{\sin^2 x}) ;$ $e) \begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 4 \sin^2 t. \end{cases}$
14.	$a) y = \left(\frac{2}{3}\right)^x \left(\frac{x}{2}\right)^3 ;$ $z) y = \frac{(2 - x^4) \cdot \sqrt{1 + x^2}}{(x + 2)^4 \cdot \sqrt[3]{1 + x^3}} ;$	$b) y = \sqrt{3 + 5x} - \frac{x}{\sqrt{x - 3}} ;$ $d) \ln(2x + y) = x - y ;$	$e) y = \arcsin e^{-\operatorname{tg} x} ;$ $e) \begin{cases} x = \ln \cos t, \\ y = \frac{1}{\sin^2 t}. \end{cases}$
15.	$a) y = \frac{e^{2x}(2x - 1)}{4} ;$ $z) y = (5 + x^4)^{\operatorname{ctg} 2x} ;$	$b) y = \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}} ;$ $d) x^2 \sin y + y^2 \cos x = x ;$	$e) y = \log_2 \operatorname{arctg} e^{-2x} ;$ $e) \begin{cases} x = 2t + t^2, \\ y = t^5 - 5t. \end{cases}$
16.	$a) y = e^{2x} \cdot \cos \sqrt{x} ;$ $z) y = \frac{\sin x \cdot \sqrt{1 + x^2}}{e^{5x} \cdot \sqrt[3]{1 + x^3}} ;$	$b) y = \frac{(x - 1)^2}{(x + 3)^3} ;$ $d) x^5 + y^5 = 5 \operatorname{tg}(xy) ;$	$e) y = \log_5 \ln \arcsin \sqrt{1 - e^{2x}} ;$ $e) \begin{cases} x = \sqrt{t^2 + 1}, \\ y = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}). \end{cases}$
17.	$a) y = (2x + 5) \cdot \sin(2x) ;$ $z) y = (\sin x)^{\cos x} ;$	$b) y = \frac{x + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}} ;$ $d) \ln x + \ln y = xy ;$	$e) y = \operatorname{arctg}^3(e^{2x} + e^{-2x}) ;$ $e) \begin{cases} x = t^2 2^t, \\ y = t 4^t. \end{cases}$
18.	$a) y = e^{3x} \cdot \sin 5x ;$ $z) y = \frac{\sqrt[3]{(2x + 1)^5 (x - 1)x^4}}{5^{2x+3} \cdot \sqrt[4]{x^3 + x}} ;$	$b) y = \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}} ;$ $d) \sin(xy) + \cos(xy) = x ;$	$e) y = \log_2 \arccos 2^{-x^2} ;$ $e) \begin{cases} x = t^4 + 2t^2, \\ y = 4t^3 + 3t^4. \end{cases}$

19.	$a) y = \frac{x^4}{4} \cdot \left(\ln^2 x - \frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{8} \right);$ $б) y = \frac{2x}{1-x^2};$ $в) y = \operatorname{arccotg} \sqrt{e^{2x} - 1};$ $г) y = (1 - \sqrt{x})^{\cos 2x};$ $д) \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2^x;$ $е) \begin{cases} x = \arccos t, \\ y = \ln(1+t^2). \end{cases}$
20.	$a) y = (x^3 + x) \cdot e^{-2x^2};$ $б) y = \frac{x + \ln 2}{\sqrt{x+1}};$ $в) y = \ln(\sin^2 x + \cos x^2);$ $г) y = \sqrt{\frac{(x+5)^3(2x-1)^5}{x \cdot \sqrt{1-x} \cdot \sin x}};$ $д) \operatorname{arctg} \frac{x}{y} = x^2 y;$ $е) \begin{cases} x = (t^2 - t^3) \sqrt{7^t}, \\ y = t^2 7^t. \end{cases}$
21.	$a) y = (3x^2 + 1) \cdot \operatorname{arctg}(\sqrt{3}x);$ $б) y = \left(\frac{x-3}{x+1} \right)^3;$ $в) y = \ln(5x^3 - e^{-\sin x});$ $г) y = \sqrt[3]{x} + 2;$ $д) \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 5xy;$ $е) \begin{cases} x = \sqrt{e^t + 1}, \\ y = \ln(1 + e^t). \end{cases}$
22.	$a) y = e^{2x} \cdot \ln(\cos x);$ $б) y = \frac{x^2 + e}{x-4};$ $в) y = \sqrt{5^{\operatorname{tg} x} + \sin(\cos x)};$ $г) y = 3^x \cdot \frac{\sqrt[5]{5x-1} \cdot (2x-5)^4}{7\sqrt{x^2-1} \cdot x^{11}};$ $д) \arcsin(y-x) = \frac{y}{x};$ $е) \begin{cases} x = \operatorname{arctg} e^t, \\ y = \sqrt{e^t + 1}. \end{cases}$
23.	$a) y = (2x-7) \cdot \operatorname{arctg}(e^x);$ $б) y = \frac{x-x^2}{(x-2)^3};$ $в) y = \ln(e^{5x} + \sqrt{e^{10x} - 1});$ $г) y = (\arccos)^x;$ $д) e^x \sin y = e^y \cos x;$ $е) \begin{cases} x = (1 + \cos^2 t)^2, \\ y = \frac{\cos t}{\sin^2 t}. \end{cases}$
24.	$a) y = (x^2 + 5x) \cdot \sqrt[3]{e^{5x}};$ $б) y = \frac{\lg(3+x) + 7}{(3+x)^2};$ $в) y = \arcsin(\cos^2 x + 3^x);$ $г) y = \frac{\sqrt[4]{(x+5)^3(2x+5)}}{x^5 \cdot \sqrt[7]{x^7 - 1} \cdot (x+5)};$ $д) x^3 + \ln y = x^2 e^y;$ $е) \begin{cases} x = \frac{1+t}{t}, \\ y = \frac{t-1}{t}. \end{cases}$
25.	$a) y = 2^{x+5} \sin(2x-1);$ $б) y = \frac{\sqrt{x^3-1}}{x};$ $в) y = \sqrt[3]{\ln \operatorname{arctg} e^{2x}};$ $г) y = (\ln x)^x;$ $д) 3x - y = \operatorname{tg}(x+3y);$ $е) \begin{cases} x = \frac{1+t}{t^3}, \\ y = \frac{3}{2t^2} + \frac{2}{t}. \end{cases}$

26.	а) $y = \operatorname{tg} x \cdot \sqrt[3]{1+x^2}$;	б) $y = \frac{x^3 + x^2 + 1}{(x+1)^2}$;	в) $y = \log_5 \operatorname{lnarctg}\left(\frac{1}{x}\right)$;
	з) $y = \sqrt[3]{\frac{(x+1)^3(2x^2-1)}{x^2 \cdot \sqrt{1+x}}} \cdot e^{2x-1}$;	д) $e^{\frac{x}{y}} = \left(\frac{x}{y}\right)^2$;	е) $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$
27.	а) $y = (x^3 + x^2) \cdot \ln(2^x + 3^x)$;	б) $y = \frac{x^4 - x + 2}{\sqrt[3]{x+2}}$;	в) $y = \operatorname{arctg} \cos^3 \sqrt{x}$;
	з) $y = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$;	д) $\sin^2(x-3y) = 1 - \cos(xy)$;	е) $\begin{cases} x = \arcsin \sqrt{t}, \\ y = \sqrt{1+\sqrt{t}}. \end{cases}$
28.	а) $y = (x^2 + 3x) \cdot e^{x^2}$;	б) $y = \frac{x^3 + 4x - 3}{(x+1)^4}$;	в) $y = e^{\operatorname{arctg}(5x^2-3)}$;
	з) $y = \frac{e^{x^2} \sqrt[5]{(x+1)^3(x-3)}}{\sqrt[3]{x^2+1} \cdot (x+2)^8}$;	д) $\sin(xy) + \operatorname{tg}(x-y) = x$;	е) $\begin{cases} x = 2^t \cos t^2, \\ y = 2^t \sin t^2. \end{cases}$
29.	а) $y = \cos(3x) \cdot \sqrt{\sin x}$;	б) $y = \frac{\sqrt{2x^2-3}}{(5x-2)^4}$;	в) $y = \sqrt[3]{\ln \log_3(e^x + e^{-x})}$;
	з) $y = (1+4x^2)^{\operatorname{arctg} 2x}$;	д) $(x-y)^2(x+2y)^3 = e$;	е) $\begin{cases} x = t - t^2, \\ y = \sqrt{2t-1}. \end{cases}$
30.	а) $y = \sin(2x) \cdot (2x+5)^3$;	б) $y = 5^{\frac{x+3}{(x-1)^2}}$;	в) $y = \log_3^2 \operatorname{tg}\left(e^{x^2-5x+1}\right)$;
	з) $y = \frac{x^3 \cdot \sqrt[5]{e^{-x}(2x-3)^4}}{(x-1)^5 \cdot (x^2+1)^3}$;	д) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4xy$;	е) $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \operatorname{arctg} t. \end{cases}$

4.3. РАЗБОР РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ ВАРИАНТА № 30

Задание 4.2. Найдите производные функций:

$$\begin{aligned}
 \text{а) } y &= \sin(2x) \cdot (2x+5)^3; & \text{б) } y &= 5^{\frac{x+3}{(x-1)^2}}; & \text{в) } y &= \log_3^2 \operatorname{tg}\left(e^{x^2-5x+1}\right); \\
 \text{з) } y &= \frac{x^3 \cdot \sqrt[5]{e^{-x}(2x-3)^4}}{(x-1)^5 \cdot (x^2+1)^3}; & \text{д) } \sqrt{x} + \sqrt{y} &= 4xy; & \text{е) } \begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \operatorname{arctg} t. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Решение.

а) Имеем производную произведения двух функций, для дифференцирования которого применяется первая из формул (4.2). При этом каждый сомножитель является сложной функцией, поэтому сначала дифференцируем внешнюю функцию и умножаем на производную внутренней функции. Первый сомножитель синус дифференцируем по формуле 4 таблицы производных, второй – степень, дифференцируем по формуле 2.

$$\begin{aligned} y' &= (\sin(2x))' \cdot (2x+5)^3 + \sin(2x) \cdot ((2x+5)^3)' = \\ &= \cos(2x) \cdot (2x)' \cdot (2x+5)^3 + \sin(2x) \cdot 3(2x+5)^2 (2x+5)' . \end{aligned}$$

Осталось продифференцировать линейные выражения вида $ax+b$, производная которых, согласно правилам дифференцирования, равна

$$(ax+b)' = a .$$

Затем умножаем константы и выносим общий множитель за скобку:

$$\begin{aligned} y' &= 2\cos(2x) \cdot (2x+5)^3 + 6\sin(2x) \cdot (2x+5)^2 = \\ &= 2(2x+5)^2 ((2x+5) \cdot \cos(2x) + 3\sin(2x)) . \end{aligned}$$

б) Здесь сложная функция, внешняя в которой является показательной и дифференцируется по формуле 8 таблицы производных:

$$y' = 5^{\frac{x+3}{(x-1)^2}} \ln 5 \cdot \left(\frac{x+3}{(x-1)^2} \right)' .$$

Внутренняя функция представляет собой дробь, производная которой берется по правилу дифференцирования частного (4.3):

$$y' = 5^{\frac{x+3}{(x-1)^2}} \ln 5 \cdot \frac{(x+3)' \cdot (x-1)^2 - (x+3) \cdot ((x-1)^2)'}{(x-1)^4} .$$

Кроме производной линейного выражения вида $ax+b$, в знаменателе дроби степенная функция $(x-1)^2$, производную которой нужно брать по формуле 2 таблицы производной. Основанием степени является линейное выражение, производная которого равна 1, поэтому

$$\left((x-1)^2\right)' = 2(x-1) \cdot (x-1)' = 2(x-1) \cdot 1 = 2(x-1).$$

Таким образом, производная частного дает следующее выражение:

$$y' = 5^{\frac{x+3}{(x-1)^2}} \ln 5 \cdot \frac{(x-1)^2 - (x+3) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}.$$

Далее в числителе дроби выносим за скобку общий множитель, сокращаем, приводим подобные и получаем

$$y' = 5^{\frac{x+3}{(x-1)^2}} \ln 5 \cdot \frac{(x-1) \cdot (x-1-2x-6)}{(x-1)^4} = -5^{\frac{x+3}{(x-1)^2}} \ln 5 \cdot \frac{x+7}{(x-1)^3}.$$

в) Данная функция является сложной функцией: суперпозицией (функции, составляющие сложную) пяти функций: степенной функции, в основании которой логарифм, его внутренней функцией является тангенс, внутренней функцией которого в свою очередь является экспонента, показатель которой (внутренняя функция экспоненты) квадратный трехчлен. Поэтому сначала дифференцируем степенную функцию по формуле 2 таблицы производных:

$$y' = 2 \log_3 \operatorname{tg}\left(e^{x^2-5x+1}\right) \cdot \left(\log_3 \operatorname{tg}\left(e^{x^2-5x+1}\right)\right)'.$$

Затем находим производную логарифма (с сохранением аргумента) по формуле 10 таблицы производных:

$$y' = 2 \log_3 \operatorname{tg}\left(e^{x^2-5x+1}\right) \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}\left(e^{x^2-5x+1}\right) \ln 3} \cdot \left(\operatorname{tg}\left(e^{x^2-5x+1}\right)\right)'.$$

Следующий сомножитель – производная тангенса (формула 6 таблицы производных):

$$y' = 2 \log_3 \operatorname{tg}\left(e^{x^2-5x+1}\right) \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}\left(e^{x^2-5x+1}\right) \ln 3} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(e^{x^2-5x+1}\right)} \cdot \left(e^{x^2-5x+1}\right)',$$

далее производная экспоненты (формула 9 таблицы производных):

$$y' = 2 \log_3 \operatorname{tg}\left(e^{x^2-5x+1}\right) \cdot \frac{\cos\left(e^{x^2-5x+1}\right)}{\sin\left(e^{x^2-5x+1}\right) \ln 3} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(e^{x^2-5x+1}\right)} \cdot e^{x^2-5x+1} \cdot (x^2-5x+1)'.$$

Осталось продифференцировать квадратичную функцию, производная которой, согласно правилам дифференцирования (производная суммы, степенной функции, вынесение постоянного множителя за знак производной), равна

$$(x^2 - 5x + 1)' = 2x - 5.$$

Подставляем последний множитель и формируем более компактную запись выражения:

$$\begin{aligned} y' &= 4 \log_3 \operatorname{tg}(e^{x^2-5x+1}) \cdot \frac{1}{\sin(2e^{x^2-5x+1}) \ln 3} \cdot e^{x^2-5x+1} \cdot (2x-5) = \\ &= 4 \log_3 \operatorname{tg}(e^{x^2-5x+1}) \cdot \frac{(2x-5) \cdot e^{x^2-5x+1}}{\sin(2e^{x^2-5x+1}) \ln 3}. \end{aligned}$$

з) Функцию этого задания можно представить в виде произведения большого количества функций:

$$y = \frac{x^3 \cdot \sqrt[5]{e^{-x}(2x-3)^4}}{(x-1)^5 \cdot (x^2+1)^3} = x^3 \cdot e^{-\frac{x}{5}} \cdot (2x-3)^{\frac{4}{5}} \cdot (x-1)^{-5} \cdot (x^2+1)^{-3},$$

поэтому применяем логарифмическое дифференцирование. Логарифмируем обе части равенства, используя свойства логарифма

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c, \quad \log_a b^k = k \log_a b,$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$. Здесь эти формулы применяются формально, ограничения на аргументы не проверяются. Итак,

$$\ln y = 3 \ln x - \frac{x}{5} \ln e + \frac{4}{5} \ln(2x-3) - 5 \ln(x-1) - 3 \ln(x^2+1).$$

Затем дифференцируем обе части равенства, воспринимая логарифм переменной y как сложную функцию $\ln y(x)$ и преимущественно используя производную натурального логарифма (формула 11 таблицы производных):

$$\begin{aligned} \frac{d(\ln y)}{dx} &= \frac{d}{dx} \left(3 \ln x - \frac{x}{5} \ln e + \frac{4}{5} \ln(2x-3) - 5 \ln(x-1) - 3 \ln(x^2+1) \right), \\ \frac{1}{y} \cdot y' &= \frac{3}{x} - \frac{1}{5} + \frac{4}{5(2x-3)} \cdot (2x-3)' - \frac{5}{x-1} (x-1)' - \frac{3}{x^2+1} (x^2+1)'. \end{aligned}$$

Здесь учтено равенство $\ln e = 1$, использовано правило дифференцирования суммы функций (4.1) и вынесение за знак производной постоянного множителя (вторая из формул (4.2)). Следует обратить внимание на то, что в третьем, четвертом и пятом слагаемых имеем производные сложных функций: аргументы логарифма являются линейными или квадратичными функциями. Далее выражаем y' , для этого умножаем обе части равенства на y :

$$y' = y \cdot \left(\frac{3}{x} - \frac{1}{5} + \frac{8}{5(2x-3)} - \frac{5}{x-1} - \frac{6x}{x^2+1} \right).$$

Подставляем вместо переменной y ее исходное аналитическое выражение и окончательно получаем

$$y' = \frac{x^3 \cdot \sqrt[5]{e^{-x}} (2x-3)^4}{(x-1)^5 \cdot (x^2+1)^3} \cdot \left(\frac{3}{x} + \frac{11-2x}{5(2x-3)} - \frac{5}{x-1} - \frac{6x}{x^2+1} \right).$$

д) Функция $y(x)$ задана неявно, поэтому найдем производную по правилу дифференцирования неявно заданной функции: дифференцируем обе части уравнения, учитывая, что $y = y(x)$. Тогда

$$\frac{d(\sqrt{y})}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y'$$

и по правилу дифференцирования произведения двух функций

$$\frac{d(4xy)}{dx} = 4 \frac{d(xy)}{dx} = 4 \left(\frac{dx}{dx} \cdot y + x \cdot \frac{dy}{dx} \right) = 4(1 \cdot y + x \cdot y').$$

Итак,

$$\begin{aligned} \frac{d(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{dx} &= \frac{d(4xy)}{dx}, \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y' &= 4(1 \cdot y + x \cdot y'). \end{aligned}$$

Перенесем в левую часть равенства слагаемые, содержащие множитель y' , и вынесем y' за скобку, а все остальные слагаемые – в правую часть:

$$y' \cdot \left(4x - \frac{1}{2\sqrt{y}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 4y.$$

Приведем выражения в скобках и правой части равенства к общему знаменателю и выразим y' :

$$y' \cdot \frac{8x\sqrt{y}-1}{2\sqrt{y}} = \frac{1-8y\sqrt{x}}{2\sqrt{x}},$$

$$y' = \frac{2\sqrt{y} \cdot (1-8y\sqrt{x})}{2\sqrt{x} \cdot (8x\sqrt{y}-1)} = \frac{\sqrt{y}-8y\sqrt{xy}}{8x\sqrt{xy}-\sqrt{x}}.$$

Производная неявно заданной функции найдена. Заметим, что аналитическое выражение производной содержит не только аргумент x , но и переменную (функцию) y .

е) Функция $y(x)$ задана параметрически, находим производную по формуле (4.5). Для этого сначала дифференцируем функции $x(t)$ и $y(t)$ по переменной t , используя правило дифференцирования сложной функции. При дифференцировании $x(t)$ производную натурального логарифма (формула 11 таблицы производных) умножаем на производную квадратичной функции. При дифференцировании $y(t)$ используем формулу 14 таблицы производных. Итак, имеем:

$$x'(t) = \frac{1}{t^2+1} \cdot (t^2+1)' = \frac{2t}{t^2+1}, \quad y'(t) = 1 - \frac{1}{t^2+1} = \frac{t^2}{t^2+1}.$$

По формуле (4.5) находим отношение этих производных:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{t^2}{t^2+1} \cdot \frac{t^2+1}{2t} = \frac{t}{2}.$$

Производная dy/dx зависит также от параметра t , но с учетом зависимости $x = \ln(1+t^2)$ получаем связь между производной dy/dx и переменной x .

Ответ: а) $y' = 2(2x+5)^2((2x+5) \cdot \cos(2x) + 3\sin(2x))$;

$$б) y' = -5^{\frac{x+3}{(x-1)^2}} \ln 5 \cdot \frac{x+7}{(x-1)^3}; \quad в) y' = 4 \log_3 \operatorname{tg}\left(e^{x^2-5x+1}\right) \cdot \frac{(2x-5) \cdot e^{x^2-5x+1}}{\sin\left(2e^{x^2-5x+1}\right) \ln 3};$$

$$г) y' = \frac{x^3 \cdot \sqrt[5]{e^{-x}(2x-3)^4}}{(x-1)^5 \cdot (x^2+1)^3} \cdot \left(\frac{3}{x} + \frac{11-2x}{5(2x-3)} - \frac{5}{x-1} - \frac{6x}{x^2+1} \right);$$

$$д) y' = \frac{\sqrt{y}-8y\sqrt{xy}}{8x\sqrt{xy}-\sqrt{x}}; \quad е) \frac{dy}{dx} = \frac{t}{2}.$$

5. ОФОРМЛЕНИЕ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Контрольная работа выполняется в отдельной тетради. На титульной странице располагается следующая информация: фамилия, имя и отчество студента (полностью); условное обозначение учебной группы, например, БВТ241з; наименование дисциплины «Высшая математика»; номер варианта и значения параметров p и q .

Решения всех заданий должны быть верные, полные и обоснованные. Все преобразования и вычисления следует приводить в решении задачи. В заданиях по геометрии необходимы чертежи или рисунки, дополнительные построения должны быть описаны, используемые уравнения обоснованы (указаны векторы и точки, участвующие в создании уравнения). Полнота решения задачи не означает, что решение должно быть слишком подробным с объяснением простейших шагов. Ниже приведен пример оформления решения варианта № 30 контрольной работы. Решение каждого задания начинается с формулировки условия и вопроса задачи. Результат должен быть выделен либо в виде ответа, либо просто подчеркнут.

Пример оформления решения заданий

варианта № 30 контрольной работы ($p = 18$, $q = 1$)

Задание 1.1. Проверьте, верно ли равенство $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$,

$$\text{где } A = \begin{pmatrix} 31 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 17 & 3 & 2 \\ -5 & 18 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Найдем матрицу левой части равенства.

$$A + B = \begin{pmatrix} 31 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 17 & 3 & 2 \\ -5 & 18 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 6 & 4 \\ 16 & 6 & 4 \\ -4 & 14 & -5 \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned} (A + B)^2 &= \begin{pmatrix} 33 & 6 & 4 \\ 16 & 6 & 4 \\ -4 & 14 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 33 & 6 & 4 \\ 16 & 6 & 4 \\ -4 & 14 & -5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 33 \cdot 33 + 6 \cdot 16 - 4 \cdot 4 & 33 \cdot 6 + 6 \cdot 6 + 4 \cdot 14 & 33 \cdot 4 + 6 \cdot 4 - 4 \cdot 5 \\ 16 \cdot 33 + 6 \cdot 16 - 4 \cdot 4 & 16 \cdot 6 + 6 \cdot 6 + 4 \cdot 14 & 16 \cdot 4 + 6 \cdot 4 - 4 \cdot 5 \\ -4 \cdot 33 + 14 \cdot 16 + 5 \cdot 4 & -4 \cdot 6 + 14 \cdot 6 - 5 \cdot 14 & -4 \cdot 4 + 14 \cdot 4 + 5 \cdot 5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1169 & 290 & 136 \\ 608 & 188 & 68 \\ 112 & -10 & 65 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Найдем матрицу в правой части равенства.

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 31 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 17 & 3 & 2 \\ -5 & 18 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 31 \cdot 2 + 4 \cdot 17 - 3 \cdot 5 & 31 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 3 \cdot 18 & 31 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 0 \\ -1 \cdot 2 + 3 \cdot 17 - 2 \cdot 5 & -1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 18 & -1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 0 \\ 1 \cdot 2 - 4 \cdot 17 + 5 \cdot 5 & 1 \cdot 2 - 4 \cdot 3 - 5 \cdot 18 & 1 \cdot 1 - 4 \cdot 2 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 115 & 128 & 39 \\ 39 & 43 & 5 \\ -41 & -100 & -7 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$2AB = 2 \cdot \begin{pmatrix} 115 & 128 & 39 \\ 39 & 43 & 5 \\ -41 & -100 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 230 & 256 & 78 \\ 78 & 86 & 10 \\ -82 & -200 & -14 \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 31 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 31 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 31 \cdot 31 - 4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 & 31 \cdot 4 + 4 \cdot 3 - 3 \cdot 4 & 31 \cdot 3 + 4 \cdot 2 - 3 \cdot 5 \\ -1 \cdot 31 - 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & -1 \cdot 4 + 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 & -1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 - 2 \cdot 5 \\ 1 \cdot 31 + 4 \cdot 1 - 5 \cdot 1 & 1 \cdot 4 - 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 & 1 \cdot 3 - 4 \cdot 2 + 5 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 960 & 124 & 86 \\ -32 & -3 & -7 \\ 30 & 12 & 20 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 17 & 3 & 2 \\ -5 & 18 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 17 & 3 & 2 \\ -5 & 18 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 2 \cdot 17 - 1 \cdot 5 & 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 18 & 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 0 \\ 17 \cdot 2 + 3 \cdot 17 - 2 \cdot 5 & 17 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 18 & 17 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 0 \\ -5 \cdot 2 + 18 \cdot 17 + 0 & -5 \cdot 2 + 18 \cdot 3 + 0 & -5 \cdot 1 + 18 \cdot 2 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 28 & 6 \\ 75 & 79 & 23 \\ 296 & 44 & 26 \end{pmatrix};$$

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 960 & 124 & 86 \\ -32 & -3 & -7 \\ 30 & 12 & 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 230 & 256 & 78 \\ 78 & 86 & 10 \\ -82 & -200 & -14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 33 & 28 & 6 \\ 75 & 79 & 23 \\ 296 & 44 & 26 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 960 + 230 + 33 & 124 + 256 + 28 & 86 + 78 + 6 \\ -32 + 78 + 75 & -3 + 86 + 79 & -7 + 10 + 23 \\ 30 - 82 + 296 & 12 - 200 + 44 & 20 - 14 + 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1223 & 408 & 170 \\ 121 & 162 & 26 \\ 244 & -144 & 32 \end{pmatrix}.$$

Сравним матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1169 & 290 & 136 \\ 608 & 188 & 68 \\ 112 & -10 & 65 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1223 & 408 & 170 \\ 121 & 162 & 26 \\ 244 & -144 & 32 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2}}.$$

Задание 1.2. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 7 \\ 4 & 8 & 0 \end{vmatrix}$.

Решение.

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 7 \\ 4 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 3 \cdot 7 \cdot 4 + 8 \cdot 1 \cdot 8 - (8 \cdot 2 \cdot 4 + 7 \cdot 7 \cdot 8 + 0) = 148 - 456 = \underline{\underline{-308}}.$$

Задание 1.3. Выясните, существует ли обратная матрица A^{-1} для

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 18 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

и найдите ее, если она существует. Выполните проверку результата вычислений с помощью равенства

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E, \text{ где } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 18 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -9 + 36 - 4 - 3 - 36 - 12 = -28 \neq 0.$$

Матрица имеет обратную A^{-1} .

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A},$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 18 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 36 = 45, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 18 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(6 - 18) = 12,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 3 = -7, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -(6 + 2) = -8,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 1 = -4, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 18 \end{vmatrix} = 36 - 3 = 33, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 18 \end{vmatrix} = -(-18 - 2) = 20,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 4 = -7,$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 45 & -8 & 33 \\ 12 & -4 & 20 \\ -7 & 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{28} \begin{pmatrix} 45 & -8 & 33 \\ 12 & -4 & 20 \\ -7 & 0 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -45/28 & 8/28 & -33/28 \\ -12/28 & 4/28 & -20/28 \\ 7/28 & 0 & 7/28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -45/28 & 2/7 & -33/28 \\ -3/7 & 1/7 & -5/7 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Проверка результатов вычислений:

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -45/28 & 2/7 & -33/28 \\ -3/7 & 1/7 & -5/7 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 18 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{45}{28} + \frac{4}{7} - \frac{33}{28} & -\frac{90}{28} + \frac{6}{7} - \frac{66}{28} & -\frac{45}{28} + \frac{36}{7} - \frac{99}{28} \\ \frac{3}{7} + \frac{2}{7} - \frac{5}{7} & -\frac{6}{7} + \frac{3}{7} + \frac{10}{7} & -\frac{3}{7} + \frac{18}{7} - \frac{15}{7} \\ -\frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{4} & \frac{2}{4} + 0 - \frac{2}{4} & \frac{1}{4} + 0 + \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{28}{28} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{4} \end{pmatrix} = E.$$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 18 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -45/28 & 2/7 & -33/28 \\ -3/7 & 1/7 & -5/7 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{45}{28} - \frac{6}{7} + \frac{1}{4} & -\frac{2}{7} + \frac{2}{7} + 0 & \frac{33}{28} - \frac{10}{7} + \frac{1}{4} \\ -\frac{90}{28} - \frac{3}{7} + \frac{18}{4} & \frac{4}{7} + \frac{3}{7} + 0 & -\frac{66}{28} - \frac{15}{7} + \frac{18}{4} \\ -\frac{45}{28} + \frac{6}{7} + \frac{3}{4} & \frac{2}{7} - \frac{2}{7} + 0 & -\frac{33}{28} + \frac{10}{7} + \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{28}{28} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{28}{28} \end{pmatrix} = E.$$

$$\underline{\underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} -45/28 & 2/7 & -33/28 \\ -3/7 & 1/7 & -5/7 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} .}}$$

Задание 1.4. Дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = -1, \\ 5x + 4y - 2z = 7, \\ 3x + 7y - 5z = 18. \end{cases}$$

Найдите решение системы:

- 1) по формулам Крамера;
- 2) матричным методом, предварительно записав систему в матричном виде.

Решение.

1) Систему можно решить по формулам Крамера, если ее главный определитель не равен нулю.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 5 & 4 & -2 \\ 3 & 7 & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot (-5) + 2 \cdot (-2) \cdot 3 + (-4) \cdot 5 \cdot 7 -$$

$$- (-4) \cdot 4 \cdot 3 - 1 \cdot (-2) \cdot 7 - 2 \cdot 5 \cdot (-5) = -20 - 12 - 140 + 48 + 14 + 50 = -60 \neq 0.$$

Можно решить по формулам Крамера.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 7 & 4 & -2 \\ 18 & 7 & -5 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 4 \cdot (-5) + 2 \cdot (-2) \cdot 18 + (-4) \cdot 7 \cdot 7 -$$

$$- (-4) \cdot 4 \cdot 18 - (-1) \cdot (-2) \cdot 7 - 2 \cdot 7 \cdot (-5) = 20 - 72 - 196 + 288 - 14 + 70 = 96,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 5 & 7 & -2 \\ 3 & 18 & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 \cdot (-5) + (-1) \cdot (-2) \cdot 3 + (-4) \cdot 5 \cdot 18 -$$

$$- (-4) \cdot 7 \cdot 3 - 1 \cdot (-2) \cdot 18 - (-1) \cdot 5 \cdot (-5) = -35 + 6 - 360 + 84 + 36 - 25 = -294,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 18 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 18 + 2 \cdot 7 \cdot 3 + (-1) \cdot 5 \cdot 7 -$$

$$- (-1) \cdot 4 \cdot 3 - 1 \cdot 7 \cdot 7 - 2 \cdot 5 \cdot 18 = 72 + 42 - 35 + 12 - 49 - 180 = -138.$$

Далее применяем формулы Крамера:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{96}{-60} = -\frac{8}{5}, y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-294}{-60} = \frac{49}{10}, z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-138}{-60} = \frac{23}{10}.$$

$$\text{Ответ. } x = -\frac{8}{5}, y = \frac{49}{10}, z = \frac{23}{10}.$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 5 & 4 & -2 \\ 3 & 7 & -5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 18 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 5 & 4 & -2 \\ 3 & 7 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 18 \end{pmatrix} .}}$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{\Delta} \cdot \tilde{A} \cdot B = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \cdot B.$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = -20 + 14 = -6, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -(-25 + 6) = 19,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 35 - 12 = 23, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = -(-10 + 28) = -18,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -5 + 12 = 7, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -(7 - 6) = -1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 16 = 12, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -(-2 + 20) = -18,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 10 = -6,$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -6 & -18 & 12 \\ 19 & 7 & -18 \\ 23 & -1 & -6 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} X &= -\frac{1}{60} \cdot \begin{pmatrix} -6 & -18 & 12 \\ 19 & 7 & -18 \\ 23 & -1 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 18 \end{pmatrix} = -\frac{1}{60} \cdot \begin{pmatrix} -6 \cdot (-1) - 18 \cdot 7 + 12 \cdot 18 \\ 19 \cdot (-1) + 7 \cdot 7 - 18 \cdot 18 \\ 23 \cdot (-1) - 1 \cdot 7 - 6 \cdot 18 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{60} \cdot \begin{pmatrix} 6 - 126 + 216 \\ -19 + 49 - 324 \\ -23 - 7 - 108 \end{pmatrix} = -\frac{1}{60} \cdot \begin{pmatrix} 96 \\ -294 \\ -138 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 96/-60 \\ -294/-60 \\ -138/-60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8/5 \\ 49/10 \\ 23/10 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8/5 \\ 49/10 \\ 23/10 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x = -\frac{8}{5}, y = \frac{49}{10}, z = \frac{23}{10}.$

Задание 1.5. Решите системы методом Гаусса:

$$a) \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 11, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 4x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 11; \end{cases} \quad б) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$$

Решение.

$$a) \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 11, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 4x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 11. \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы.

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -4 & 11 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & -8 & 11 \end{array} \right) \cdot (-1) \cdot (-2) \begin{array}{c} \swarrow \\ \swarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -4 & 11 \\ 0 & -1 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \end{array} \right).$$

Ответ: решений нет.

$$б) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$$

Выпишем расширенную матрицу системы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -8 & 1 & 13 & 1 \end{pmatrix} \cdot (-5) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 40 & -5 & -65 & -5 \end{pmatrix} \cdot 8 \sim \begin{array}{c} \swarrow \\ \swarrow \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 41 & -3 \end{pmatrix}.$$

Составим ступенчатую систему:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 1, \\ -5x_2 + x_3 + 3x_4 = 1, \\ -3x_3 + 41x_4 = -3, \end{cases}$$

$$\underline{\underline{x_4 = C}}, \quad -3x_3 + 41C = -3 \Rightarrow \underline{\underline{x_3 = 1 + \frac{41}{3}C}},$$

$$-5x_2 + \left(1 + \frac{41}{3}C\right) + 3C = 1 \Rightarrow \underline{\underline{x_2 = \frac{10}{3}C}},$$

$$x_1 + 2 \cdot \frac{10}{3}C - 4C = 1 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 1 - \frac{8}{3}C}}, \quad C \in (-\infty; +\infty).$$

Задание 2.1. Даны три вектора: $\vec{a} = \{2; 7; 3\}$, $\vec{b} = \{3; 1; 8\}$ и $\vec{c} = \{2; -1; 1\}$ в пространстве.

1) Проверьте, образуют ли эти векторы базис и, если образуют, разложите вектор $\vec{d} = \{1; 18; -17\}$ по базису $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

2) Найдите, при каком значении λ вектор $\vec{a} + \lambda \vec{b}$ перпендикулярен вектору $\vec{c}$.

3) Найдите векторное произведение $(\vec{a} + 2\vec{b}) \times (\vec{c} - 3\vec{d})$.

Решение.

1) Проверим условие компланарности векторов:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 8 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 112 - 9 - (6 + 21 - 16) = 105 - 11 = 94 \neq 0.$$

Векторы не компланарны, поэтому образуют базис.

$$\vec{d} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 18 \\ -17 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 1, \\ 7\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 18, \\ 3\lambda_1 + 8\lambda_2 - \lambda_3 = -17. \end{cases}$$

$$\Delta = 94, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 18 & 1 & 1 \\ -17 & 8 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 51 + 288 - (-34 - 54 + 8) = 236 + 80 = 316,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 7 & 18 & 1 \\ 3 & -17 & -1 \end{vmatrix} = -36 - 238 + 3 - (108 - 7 - 34) = -271 - 67 = -338,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & 18 \\ 3 & 8 & -17 \end{vmatrix} = -34 + 162 + 56 - (3 - 357 + 288) = 184 + 66 = 250.$$

$$\lambda_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{316}{94} = \frac{158}{47}, \quad \lambda_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-338}{94} = -\frac{169}{47}, \quad \lambda_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{250}{94} = \frac{125}{47}.$$

$$\underline{\underline{\vec{d} = \frac{158}{47}\vec{a} - \frac{169}{47}\vec{b} + \frac{125}{47}\vec{c} .}}$$

2) Векторы перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

$$\vec{a} + \lambda \vec{b} = \{2; 7; 3\} + \lambda \{3; 1; 8\} = \{2 + 3\lambda; 7 + \lambda; 3 + 8\lambda\},$$

$$(\vec{a} + \lambda \vec{b}) \cdot \vec{c} = 2(2 + 3\lambda) - 1 \cdot (7 + \lambda) + 1 \cdot (3 + 8\lambda) = 10\lambda,$$

$$10\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\lambda = 0}}.$$

3) Векторное произведение векторов.

$$\vec{c} - 3\vec{d} = \{2; -1; 1\} - 3 \cdot \{1; 18; -17\} = \{-1; -55; 52\},$$

$$\vec{a} + 2\vec{b} = \{8; 9; 19\},$$

$$\begin{aligned}
(\vec{a} + 2\vec{b}) \times (\vec{c} - 3\vec{d}) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8 & 9 & 19 \\ -1 & -55 & 52 \end{vmatrix} = 468\vec{i} - 19\vec{j} - 440\vec{k} - \\
&- (-9\vec{k} + 416\vec{j} - 1045\vec{i}) = 1513\vec{i} - 435\vec{j} - 449\vec{k}. \\
\underline{\underline{(\vec{a} + 2\vec{b}) \times (\vec{c} - 3\vec{d}) = \{1513; -435; -449\}}}.
\end{aligned}$$

Задание 2.2.2. Даны четыре точки: $A(18, 1, 17)$, $B(7, 5, 2)$, $C(-2, 0, -7)$, $D(-2, -3, 5)$. Найдите:

- 1) угол DAC ;
- 2) площадь параллелограмма $ABMC$ и две его высоты (выполните рисунок);
- 3) объем пирамиды $ABCD$ и высоту, проведенную к грани ABC (выполните рисунок).

Решение.

- 1) Угол DAC образован векторами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AD} = \{-2 - 18; -3 - 1; 5 - 17\} = \{-20; -4; -12\},$$

$$\overrightarrow{AC} = \{-2 - 18; 0 - 1; -7 - 17\} = \{-20; -1; -24\}.$$

$$\cos \angle ADC = \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}.$$

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = -20 \cdot (-20) - 4 \cdot (-1) - 12 \cdot (-24) = 400 + 4 + 288 = 692.$$

$$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{(-20)^2 + (-4)^2 + (-12)^2} = 4\sqrt{5^2 + 1^2 + 3^2} = 4\sqrt{35},$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-20)^2 + (-1)^2 + (-24)^2} = \sqrt{400 + 1 + 576} = \sqrt{977}.$$

$$\cos \angle ADC = \frac{692}{4\sqrt{35} \cdot \sqrt{977}} = \frac{173}{\sqrt{34195}}.$$

$$\underline{\underline{\angle ADC = \arccos \frac{173}{\sqrt{34195}}}}$$

2) $BM \parallel AC$, $CM \parallel AB$, $ABMC$ – параллелограмм (рис. 5.1). Параллелограмм $ABMC$ образован векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

$$S = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|.$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \{7 - 18; 5 - 1; 2 - 17\} = \\ &= \{11; 4; -15\}.\end{aligned}$$

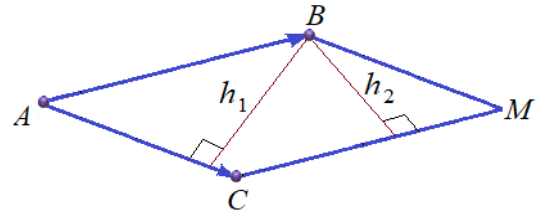


Рис. 5.1

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 11 & 4 & -15 \\ -20 & -1 & -24 \end{vmatrix} = -96\vec{i} + 300\vec{j} - 11\vec{k} - (-80\vec{k} - 264\vec{j} + 15\vec{i}) = \\ &= -111\vec{i} + 564\vec{j} + 69\vec{k} = 3(-37\vec{i} + 188\vec{j} + 23\vec{k}).\end{aligned}$$

$$S_{ABCM} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 3\sqrt{(-37)^2 + 188^2 + 23^2} = 3\sqrt{37242} = 9\sqrt{4138}.$$

$$\underline{\underline{S_{ABCM} = 9\sqrt{4138}.$$

$$h_1 \perp AC, h_2 \perp CM,$$

$$S = h_1 \cdot AC, S = h_2 \cdot CM \Rightarrow h_1 = \frac{S}{AC}, h_2 = \frac{S}{CM}.$$

$$|\overrightarrow{CM}| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{121 + 16 + 225} = \sqrt{362}, |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{977}.$$

$$\underline{\underline{h_1 = \frac{9\sqrt{4138}}{\sqrt{977}}}}, \underline{\underline{h_2 = \frac{9\sqrt{4138}}{\sqrt{362}} = \frac{9\sqrt{2069}}{\sqrt{181}}}}, \underline{\underline{h_2 = \frac{9\sqrt{2069}}{\sqrt{181}}}.$$

3) Пирамида $ABCD$ образована векторами $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ (рис. 5.2).

$$V = \frac{1}{6} |\overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC} \overrightarrow{AD}|.$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC} \overrightarrow{AD} &= \begin{vmatrix} 11 & 4 & -15 \\ -20 & -1 & -24 \\ -20 & -4 & -12 \end{vmatrix} = 132 + 1920 - 1200 - (-300 + 960 + 1056) = \\ &= 852 - 1716 = -864.\end{aligned}$$

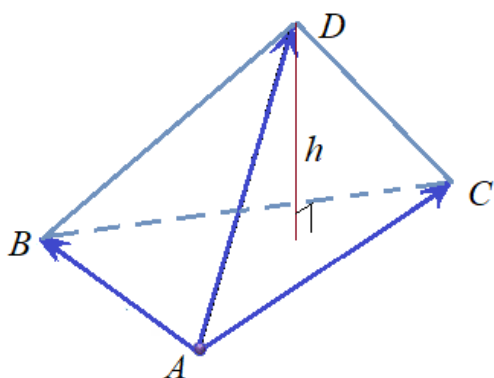


Рис. 5.2

$$V = \frac{1}{6} |-864| = \frac{864}{6} = 144.$$

$$\underline{\underline{V_{ABCD} = 144.}}$$

$$h \perp (ABC)$$

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h,$$

$$S_{ABC} = 0,5S = 4,5 \cdot \sqrt{4138}.$$

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h \Rightarrow 144 = \frac{4,5}{3} \sqrt{4138} \cdot h \Rightarrow \underline{\underline{h = \frac{96}{\sqrt{4138}}.}}$$

Задание 3.1.

Дано: $ABCD$ – трапеция, $BC \parallel AD$, $\angle A = \angle B = 90^\circ$, вершины: $B(-2, -8)$, $C(10, 8)$ и $D(19, -3)$.

Найти:

- 1) уравнение стороны AB ;
- 2) уравнение средней линии трапеции;
- 3) уравнение диагонали BD ;
- 4) длину AB , 5) $\angle ABD$.

Решение. Выполним чертеж трапеции $ABCD$ на координатной плоскости (рис. 5.3).

$$1) \overrightarrow{BC} \perp AB, \overrightarrow{BC} = \{10 + 2; 8 + 8\} = \{12; 16\} = 4\{3; 4\}.$$

$$\vec{N} = \{3, 4\} \parallel \overrightarrow{BC} \Rightarrow \vec{N} \perp AB.$$

Составим уравнение AB по вектору нормали $\vec{N} = \{3, 4\}$ и точке $B(-2, -8) \in AB$:

$$3(x + 2) + 4(y + 8) = 0,$$

$$3x + 6 + 4y + 32 = 0,$$

$$\underline{\underline{AB: 3x + 4y + 38 = 0.}}$$

2) MP – средняя линия трапеции (рис. 5.3), $P \in CD$, $CP = PD$.

$$x_P = \frac{10 + 19}{2} = 14,5; \quad y_P = \frac{8 - 3}{2} = 2,5.$$

$$\overrightarrow{BC} \parallel MP \Rightarrow \vec{N} \parallel MP.$$

Составим каноническое уравнение MP по направляющему вектору $\vec{N} = \{3, 4\}$ и точке $P(14,5; 2,5) \in MP$:

$$\frac{x - 14,5}{3} = \frac{y - 2,5}{4}.$$

$$4x - 58 = 3y - 7,5 \mid \times 2,$$

$$8x - 116 = 6y - 15,$$

$$\underline{\underline{MP: 8x - 6y - 101 = 0.}}$$

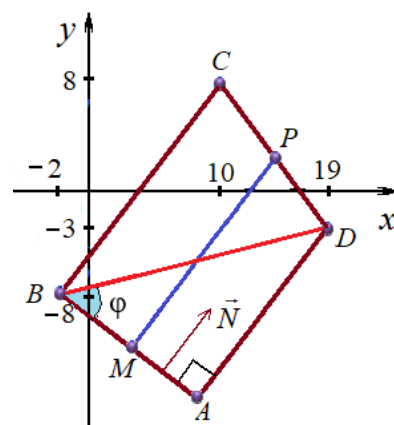


Рис. 5.3

3) Составим уравнение диагонали BD по двум точкам $B(-2, -8)$ и $D(19, -3)$:

$$\frac{x + 2}{19 + 2} = \frac{y + 8}{-3 + 8}, \quad \frac{x + 2}{21} = \frac{y + 8}{5},$$

$$5x + 10 = 21y + 168,$$

$$\underline{\underline{BD: 5x - 21y - 158 = 0.}}$$

4) AB – высота трапеции, $AB = 2 \cdot BM$. $BM = d$ – расстояние от точки $B(-2, -8)$ до прямой:

$$MP: 8x - 6y - 101 = 0.$$

$$d = \frac{|8 \cdot (-2) - 6 \cdot (-8) - 101|}{\sqrt{8^2 + (-6)^2}} = \frac{69}{10} = 6,9.$$

$$\underline{\underline{AB = 13,8.}}$$

5) $\angle ABD = \varphi$ – угол между AB и BD .

$$\vec{N}_{AB} = \{3, 4\}, \quad \vec{N}_{BD} = \{5, -21\}.$$

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{N}_{AB} \cdot \vec{N}_{BD}|}{|\vec{N}_{AB}| \cdot |\vec{N}_{BD}|} = \frac{|3 \cdot 5 + 4 \cdot (-21)|}{\sqrt{3^2 + 4^2} \cdot \sqrt{5^2 + (-21)^2}} = \frac{69}{5 \cdot \sqrt{466}}.$$

$$\underline{\underline{\angle ABD = \arccos \frac{69}{5\sqrt{466}}.}}$$

Задание 3.2.

Дано: $ABCD$ – пирамида с вершиной в точке C , $A(18,1,17)$, $B(7,5,2)$, $C(-2,0,-7)$, $D(-2,-3,5)$.

Найти:

- 1) уравнение грани ABD ;
- 2) уравнения ребра AC ;
- 3) уравнения высоты CH ;
- 4) длину CH ;
- 5) координаты точки H ;
- 6) угол между ребром AC и плоскостью ABD .

Решение. Сделаем рисунок пирамиды (5.4), выделим ее элементы.

1) Составим уравнение плоскости ABD по трем точкам $D(-2,-3,5)$, $A(18,1,17)$, $B(7,5,2)$:

$$\begin{vmatrix} x+2 & y+3 & z-5 \\ 18+2 & 1+3 & 17-5 \\ 7+2 & 5+3 & 2-5 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x+2 & y+3 & z-5 \\ 20 & 4 & 12 \\ 9 & 8 & -3 \end{vmatrix} = 0,$$

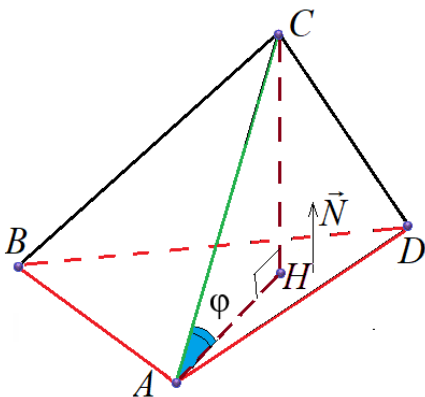


Рис. 5.4

$$\begin{aligned} & -12(x+2) + 108(y+3) + 160(z-5) - \\ & - (36 \cdot (z-5) - 60(y+3) + 96(x+2)) = 0, \end{aligned}$$

$$-108(x+2) + 168(y+3) + 124(z-5) = 0 \mid :(-4),$$

$$27(x+2) - 42(y+3) - 31(z-5) = 0,$$

$$\underline{\underline{(ABD): 27x - 42y - 31z + 83 = 0.}}$$

2) Составим уравнение прямой AC по двум точкам $A(18,1,17)$ и $C(-2,0,-7)$:

$$\frac{x+2}{18+2} = \frac{y-0}{1-0} = \frac{z+7}{17+7}.$$

$$\underline{\underline{AC: \frac{x+2}{20} = y = \frac{z+7}{24} .}}$$

3) Нормаль к плоскости ABD

$$\vec{N} = \{27, -42, -31\}$$

параллельна прямой CH . Составим канонические уравнения CH по направляющему вектору $\vec{N} = \{27, -42, -31\}$ и точке $C(-2,0,-7)$:

$$\underline{\underline{CH: \frac{x+2}{27} = \frac{y}{-42} = \frac{z+7}{-31} .}}$$

4) $CH = d$ – расстояние от точки C до плоскости ABD .

$$d = \frac{|27 \cdot (-2) - 42 \cdot 0 - 31 \cdot (-7) + 83|}{\sqrt{27^2 + (-42)^2 + (-31)^2}} = \frac{246}{\sqrt{3454}} \approx 4,19.$$

$$\underline{\underline{CH \approx 4,19.}}$$

5) Точка H – точка пересечения прямой

$$CH: \frac{x+2}{27} = \frac{y}{-42} = \frac{z+7}{-31}$$

и плоскости

$$(ABD): 27x - 42y - 31z + 83 = 0.$$

$$CH: \frac{x+2}{27} = \frac{y}{-42} = \frac{z+7}{-31} = t, \quad CH: \begin{cases} x = 27t - 2, \\ y = -42t, \\ z = -31t - 7. \end{cases}$$

$$27(27t - 2) - 42(-42t) - 31(-31t - 7) + 83 = 0,$$

$$729t - 54 + 1764t + 961t + 217 + 83 = 0, \quad 3454t + 246 = 0,$$

$$t = -\frac{246}{3454} = -\frac{123}{1727}.$$

$$x = 27 \cdot \left(-\frac{123}{1727} \right) - 2 = -\frac{6775}{1727} \approx -3,92 ,$$

$$y = -42 \cdot \left(-\frac{123}{1727} \right) = \frac{5166}{1727} \approx 2,99 ,$$

$$z = -31 \cdot \left(-\frac{123}{1727} \right) - 7 = -\frac{8276}{1727} \approx -4,79 .$$

$$\underline{\underline{H(-3,92; 2,99; -4,79)}}.$$

б) φ – угол между прямой AC и плоскостью ABD .

$$\vec{S}_{AC} = \{20, 1, 24\}, \quad \vec{N}_{ABD} = \{27, -42, -31\}.$$

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{N}_{ABD} \cdot \vec{S}_{AC}|}{|\vec{N}_{ABD}| \cdot |\vec{S}_{AC}|} = \frac{|27 \cdot 20 - 42 \cdot 1 - 31 \cdot 24|}{\sqrt{27^2 + (-42)^2 + (-31)^2} \cdot \sqrt{20^2 + 1^2 + 24^2}} \approx 0,13.$$

$$\underline{\underline{\angle \varphi \approx \arcsin 0,13.}}$$

Задание 3.3.

Дано: $M_0(1; 5,5)$ – фокус, $l: 2y - 3 = 0$ – директриса.

- 1) Найти уравнение параболы.
- 2) Сделать чертеж.

Решение.

1) Пусть m – ось параболы. $M_0 \in m$, $l \perp m$, $l: y = 1,5$ (рис. 5.5). Ветви параболы направлены вверх, ее уравнение

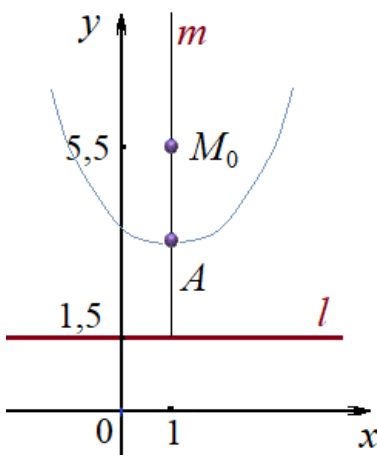


Рис. 5.5

$$(x - x_0)^2 = 2\rho(y - y_0).$$

$A(x_0; y_0)$ – вершина, $A \in m$, $x_0 = 1$,

$$y_0 = \frac{5,5 + 1,5}{2} = 3,5, \quad A(1; 3,5).$$

$$\rho = 5,5 - 1,5 = 4.$$

Каноническое уравнение искомой параболы

$$\underline{\underline{(x - 1)^2 = 8(y - 3,5)}}.$$

2) Дополнительные точки. Если $y = 5,5$, то

$$(x-1)^2 = 8(5,5 - 3,5), (x-1)^2 = 16,$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3, \\ x = 5. \end{cases}$$

$$C(-3; 5,5) \text{ и } C'(5; 5,5).$$

Если $y = 8$, то

$$(x-1)^2 = 8(8 - 3,5), (x-1)^2 = 36,$$

$$x^2 - 2x - 35 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5, \\ x = 7. \end{cases}$$

$$B(-5; 8) \text{ и } B'(7; 8).$$

Выполним чертеж параболы (рис. 5.6).

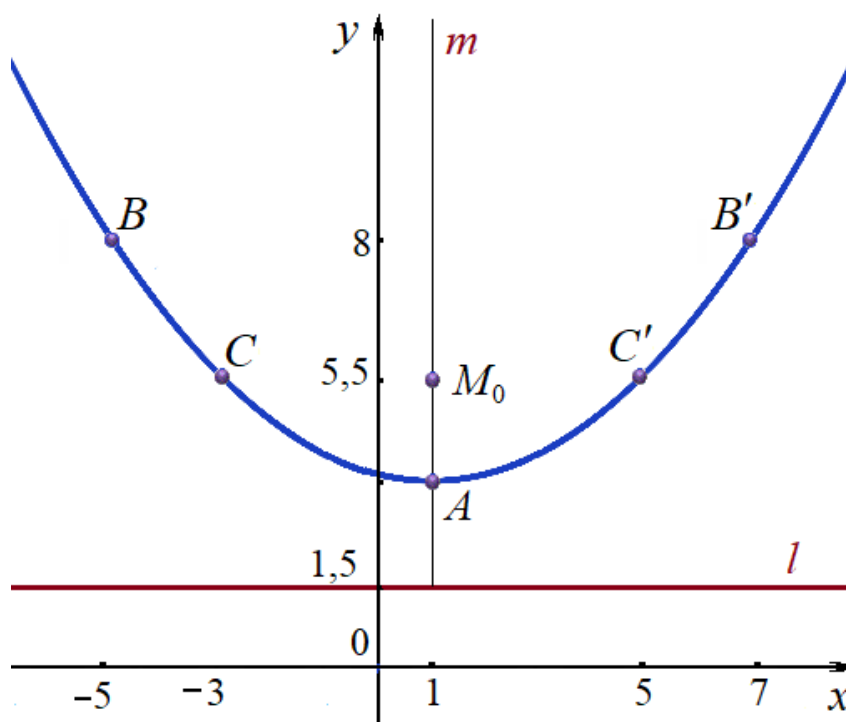


Рис. 5.6

Задание 3.4.

Дано: линия на плоскости задана уравнением $x^2 - 4y^2 + 8x + 8y - 4 = 0$.

- 1) Найти канонический вид уравнения.
- 2) Сделать чертеж.

Решение.

1) Преобразуем уравнение:

$$x^2 - 4y^2 + 8x + 8y - 4 = 0,$$

$$(x^2 + 8x) - (4y^2 - 8y) - 4 = 0,$$

$$(x^2 + 8x + 16 - 16) - 4(y^2 - 2y + 1 - 1) - 4 = 0,$$

$$((x + 4)^2 - 16) - 4((y - 1)^2 - 1) - 4 = 0,$$

$$(x + 4)^2 - 16 - 4(y - 1)^2 + 4 - 4 = 0,$$

$$(x + 4)^2 - 4(y - 1)^2 = 16,$$

Каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{(x + 4)^2}{16} - \frac{(y - 1)^2}{4} = 1.$$

2) Координаты центра: $x_0 = -4$, $y_0 = 1$, центр $C(-4; 1)$. Полуоси:

$$a = \sqrt{16} = 4, \quad b = \sqrt{4} = 2.$$

$A(-8; 1)$ и $A'(0; 1)$ – вершины гиперболы, l_1, l_2 – асимптоты. Дополни-

тельные точки: если $y = 3$, то

$$\frac{(x + 4)^2}{16} - \frac{(3 - 1)^2}{4} = 1, \quad (x + 4)^2 = 32,$$

$$x^2 + 8x - 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4\sqrt{2} - 4 \approx 1,6, \\ x = -4\sqrt{2} - 4 \approx -9,6. \end{cases}$$

$$B(-9,6; 3) \text{ и } B'(1,6; 3).$$

Учитывая симметрию относительно горизонтальной оси,

$$D(-9,6; -1) \text{ и } D'(1,6; -1).$$

Выполним чертеж гиперболы (рис. 5.7).

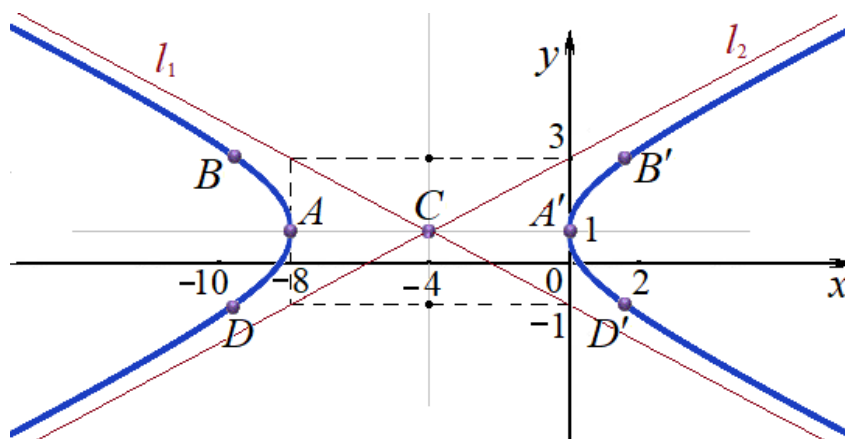


Рис. 5.7

Задание 4.1.

Найдите производные функций:

а) $y = \sin(2x) \cdot (2x + 5)^3$;

б) $y = 5^{\frac{x+3}{(x-1)^2}}$;

в) $y = \log_3^2 \operatorname{tg}(e^{x^2 - 5x + 1})$;

г) $y = \frac{x^3 \cdot \sqrt[5]{e^{-x}(2x-3)^4}}{(x-1)^5 \cdot (x^2+1)^3}$;

д) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4xy$;

е) $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \operatorname{arctg} t. \end{cases}$

Решение.

$$\begin{aligned} \text{а) } y' &= (\sin(2x))' \cdot (2x+5)^3 + \sin(2x) \cdot ((2x+5)^3)' = \\ &= \cos(2x) \cdot (2x)' \cdot (2x+5)^3 + \sin(2x) \cdot 3(2x+5)^2(2x+5)' = \\ &= 2\cos(2x) \cdot (2x+5)^3 + 6\sin(2x) \cdot (2x+5)^2 = \\ &= 2(2x+5)^2((2x+5) \cdot \cos(2x) + 3\sin(2x)). \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{y' = 2(2x+5)^2((2x+5) \cdot \cos(2x) + 3\sin(2x))}}$$

$$\begin{aligned}
\text{д) } y' &= 5^{\frac{x+3}{(x-1)^2}} \ln 5 \cdot \left(\frac{x+3}{(x-1)^2} \right)' = \\
&= 5^{\frac{x+3}{(x-1)^2}} \ln 5 \cdot \frac{(x+3)' \cdot (x-1)^2 - (x+3) \cdot ((x-1)^2)'}{(x-1)^4} = \\
&= 5^{\frac{x+3}{(x-1)^2}} \ln 5 \cdot \frac{(x-1)^2 - (x+3) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \\
&= 5^{\frac{x+3}{(x-1)^2}} \ln 5 \cdot \frac{(x-1) \cdot (x-1-2x-6)}{(x-1)^4} = -5^{\frac{x+3}{(x-1)^2}} \ln 5 \cdot \frac{x+7}{(x-1)^3}.
\end{aligned}$$

$$\underline{\underline{y' = -5^{\frac{x+3}{(x-1)^2}} \ln 5 \cdot \frac{x+7}{(x-1)^3};}}$$

$$\begin{aligned}
\text{е) } y' &= 2 \log_3 \operatorname{tg} \left(e^{x^2-5x+1} \right) \cdot \left(\log_3 \operatorname{tg} \left(e^{x^2-5x+1} \right) \right)' = \\
&= 2 \log_3 \operatorname{tg} \left(e^{x^2-5x+1} \right) \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \left(e^{x^2-5x+1} \right) \ln 3} \cdot \left(\operatorname{tg} \left(e^{x^2-5x+1} \right) \right)' = \\
&= 2 \log_3 \operatorname{tg} \left(e^{x^2-5x+1} \right) \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \left(e^{x^2-5x+1} \right) \ln 3} \cdot \frac{1}{\cos^2 \left(e^{x^2-5x+1} \right)} \cdot \left(e^{x^2-5x+1} \right)' = \\
&= 2 \log_3 \operatorname{tg} \left(e^{x^2-5x+1} \right) \cdot \frac{\cos \left(e^{x^2-5x+1} \right)}{\sin \left(e^{x^2-5x+1} \right) \ln 3} \cdot \frac{1}{\cos^2 \left(e^{x^2-5x+1} \right)} \cdot e^{x^2-5x+1} \cdot (x^2-5x+1)' = \\
&= 4 \log_3 \operatorname{tg} \left(e^{x^2-5x+1} \right) \cdot \frac{1}{\sin \left(2e^{x^2-5x+1} \right) \ln 3} \cdot e^{x^2-5x+1} \cdot (2x-5) = \\
&= 4 \log_3 \operatorname{tg} \left(e^{x^2-5x+1} \right) \cdot \frac{(2x-5) \cdot e^{x^2-5x+1}}{\sin \left(2e^{x^2-5x+1} \right) \ln 3}.
\end{aligned}$$

$$\underline{\underline{y' = 4 \log_3 \operatorname{tg} \left(e^{x^2-5x+1} \right) \cdot \frac{(2x-5) \cdot e^{x^2-5x+1}}{\sin \left(2e^{x^2-5x+1} \right) \ln 3};}}$$

$$c) y = \frac{x^3 \cdot \sqrt[5]{e^{-x}(2x-3)^4}}{(x-1)^5 \cdot (x^2+1)^3} = x^3 \cdot e^{-\frac{x}{5}} \cdot (2x-3)^{\frac{4}{5}} \cdot (x-1)^{-5} \cdot (x^2+1)^{-3},$$

применяем логарифмическое дифференцирование:

$$\ln y = 3 \ln x - \frac{x}{5} \ln e + \frac{4}{5} \ln(2x-3) - 5 \ln(x-1) - 3 \ln(x^2+1),$$

$$\frac{d(\ln y)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(3 \ln x - \frac{x}{5} \ln e + \frac{4}{5} \ln(2x-3) - 5 \ln(x-1) - 3 \ln(x^2+1) \right),$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{3}{x} - \frac{1}{5} + \frac{4}{5(2x-3)} \cdot (2x-3)' - \frac{5}{x-1} (x-1)' - \frac{3}{x^2+1} (x^2+1)',$$

$$y' = y \cdot \left(\frac{3}{x} - \frac{1}{5} + \frac{8}{5(2x-3)} - \frac{5}{x-1} - \frac{6x}{x^2+1} \right),$$

$$y' = \frac{x^3 \cdot \sqrt[5]{e^{-x}(2x-3)^4}}{(x-1)^5 \cdot (x^2+1)^3} \cdot \left(\frac{3}{x} + \frac{11-2x}{5(2x-3)} - \frac{5}{x-1} - \frac{6x}{x^2+1} \right);$$

д) Функция $y(x)$ задана неявно.

$$\frac{d(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{dx} = \frac{d(4xy)}{dx}, \quad \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y' = 4(1 \cdot y + x \cdot y'),$$

$$y' \cdot \left(4x - \frac{1}{2\sqrt{y}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 4y \Leftrightarrow y' \cdot \frac{8x\sqrt{y} - 1}{2\sqrt{y}} = \frac{1 - 8y\sqrt{x}}{2\sqrt{x}},$$

$$y' = \frac{2\sqrt{y} \cdot (1 - 8y\sqrt{x})}{2\sqrt{x} \cdot (8x\sqrt{y} - 1)} = \frac{\sqrt{y} - 8y\sqrt{xy}}{8x\sqrt{xy} - \sqrt{x}};$$

е) Функция $y(x)$ задана параметрически.

$$x'(t) = \frac{1}{t^2+1} \cdot (t^2+1)' = \frac{2t}{t^2+1}, \quad y'(t) = 1 - \frac{1}{t^2+1} = \frac{t^2}{t^2+1} \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{t^2}{t^2+1} \cdot \frac{t^2+1}{2t} = \frac{t}{2}, \quad \underline{\underline{\frac{dy}{dx} = \frac{t}{2}}}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Учебное пособие «Высшая математика для заочников» создано с целью помочь студентам освоить ключевые математические разделы, которые необходимы для успешного старта в вузовской программе. Основное внимание уделено темам, вызывающим наибольшие трудности у начинающих: линейная и векторная алгебра, аналитическая геометрия, а также основы дифференциального исчисления.

В процессе разработки пособия особое внимание было уделено не только теории, но и практической составляющей: каждый раздел сопровождается наглядными примерами и заданиями, аналогичными заданиям контрольной работы. Это позволяет студенту не просто понять материал, но и научиться применять его на практике – будь то при выполнении контрольной работы или подготовке к экзамену. В отдельной главе подробно описаны требования к оформлению контрольной работы и представлена сама работа, что избавляет студентов от лишних вопросов и помогает грамотно структурировать свою работу.

Пособие ориентировано в первую очередь на студентов заочной формы обучения, где особенно важно уметь учиться самостоятельно. С этой целью материал изложен достаточно доступно и последовательно. Понятная структура, логичное изложение и практическая направленность делают пособие удобным в использовании, особенно для тех, кто сталкивается с высшей математикой впервые после школы. В то же время учебное пособие может быть полезным и студентам очного отделения.

Авторы надеются, что данное пособие станет для студентов не просто сборником теорем, определений и формул, а настоящим помощником на пути к освоению сложной, но важной науки. Пусть оно станет опорой в учебе и первым шагом к формированию аналитического мышления, столь необходимого в любой профессиональной деятельности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Жуковская, Т. В.** Высшая математика в примерах и задачах [Электронный ресурс] : учебное пособие : в 2 ч. Ч. 1 / Т. В. Жуковская, Е. А. Молоканова, А. И. Урусов. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВО «ТГТУ», 2018.
2. **Кузьмина, Н. А.** Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учебное пособие / Н. А. Кузьмина. – Пермь : ИПЦ «Прокрость», 2019. – 328 с.
3. **Минькова, Р. М.** Векторная алгебра и аналитическая геометрия : учебное пособие / Р. М. Минькова. – Екатеринбург : ГОУ ВПО УГТУ–УПИ, 2006. – 42 с.
4. **Мышкис, А. Д.** Лекции по высшей математике : учебное пособие / А. Д. Мышкис. – СПб. : Лань, 2021. – 688 с.
5. **Применение** математических знаний в профессиональной деятельности. Пособие для саморазвития бакалавра : в 4 ч. Ч. 3. Математический анализ : учебное пособие / Н. П. Пучков, Т. В. Жуковская, Е. А. Молоканова и др. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2013. – 80 с.
6. **Задачник** по высшей математике для вузов : учебное пособие / В. Н. Земсков, С. Г. Кальней, В. В. Лесин, А. С. Поспелов. – СПб. : Лань, 2021. – 512 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА	5
1.1. Основные понятия, формулы и методы решения.....	5
1.1.1. Матрицы и определители	5
1.1.2. Операции над матрицами	7
1.1.3. Системы линейных уравнений. Методы решения.....	10
1.2. Задания для выполнения контрольной работы.....	14
1.3. Разбор решения заданий варианта № 30	22
2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА.....	37
2.1. Основные понятия и формулы	37
2.1.1. Пространство векторов.....	37
2.1.2. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов	39
2.2. Задания для выполнения контрольной работы.....	41
2.3. Разбор решения заданий варианта № 30	43
3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ.....	49
3.1. Основные понятия, формулы и методы решения.....	49
3.1.1. Прямая линия на плоскости	49
3.1.2. Плоскости и прямые в пространстве.....	51
3.1.3. Линии второго порядка	53
3.2. Задания для выполнения контрольной работы.....	58
3.3. Разбор решения заданий варианта № 30	62
4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ	73
4.1. Основные понятия, формулы и методы решения.....	73
4.1.1. Правила дифференцирования	74
4.1.2. Техника дифференцирования	76
4.2. Задания для выполнения контрольной работы	78
4.3. Разбор решения заданий варианта № 30	82
5. ОФОРМЛЕНИЕ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ	88
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	110
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	111

Учебное электронное издание

ЖУКОВСКАЯ Татьяна Владимировна
МОЛОКАНОВА Елена Анатольевна
ПРОТАСОВ Дмитрий Николаевич

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЗАОЧНИКОВ

Учебное пособие

В ДВУХ ЧАСТЯХ

ЧАСТЬ 1

Редактор Л. В. Комбарова
Графический и мультимедийный дизайнер Т. Ю. Зотова
Обложка, упаковка, тиражирование Л. В. Комбаровой

ISBN 978-5-8265-2895-2



Подписано к использованию 08.04.2025.

Тираж 50 шт. Заказ № 54

Издательский центр ФГБОУ ВО «ТГТУ»
392000, г. Тамбов, ул. Советская, д. 106, к. 14

Тел. 8(4752) 63-81-08.

E-mail: izdatelstvo@tstu.ru