

А. В. ЗАЙЦЕВ, С. В. КАНУШКИН

МЕТОДЫ И ТЕОРИЯ ОПТИМИЗАЦИИ



Тамбов

◆ Издательский центр ФГБОУ ВО «ТГТУ» ◆
2025

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

**Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тамбовский государственный технический университет»**

А. В. ЗАЙЦЕВ, С. В. КАНУШКИН

МЕТОДЫ И ТЕОРИЯ ОПТИМИЗАЦИИ

Утверждено Ученым советом университета
в качестве учебного пособия
для студентов 1 курса направления подготовки
15.04.06 «Мехатроника и робототехника»

Учебное электронное издание



Тамбов

◆ Издательский центр ФГБОУ ВО «ТГТУ» ◆
2025

УДК 517.997.5
ББК 22.161.83
3-12

Рецензенты:

Доктор технических наук, профессор, заслуженный деятель науки РФ,
советник генерального директора Акционерного общества
«Научно-производственный центр автоматики и приборостроения
имени академика Н. А. Пилюгина»

Г. Н. Румянцев

Доктор технических наук, профессор, профессор кафедры
«Информационные системы и защита информации» ФГБОУ ВО «ТГТУ»

В. В. Алексеев

Зайцев, А. В.

3-12 Методы и теория оптимизации [Электронный ресурс] : учебное пособие /
А. В. Зайцев, С. В. Канушкин. – Тамбов : Издательский центр ФГБОУ ВО
«ТГТУ», 2025. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Системные требования :
ПК не ниже класса Pentium IV ; RAM 512 Mb ; необходимое место на HDD
3,5 Mb ; Windows 7/8/10/11 ; дисковод CD-ROM ; мышь. – Загл. с экрана.
ISBN 978-5-8265-2948-5

Изложены принципы построения и теоретические основы оценки качества систем автоматического управления. Большое внимание уделено методам анализа и синтеза систем с учетом применения ЦВМ общего назначения. Приведены алгоритмы и программы в современной среде программирования. Особое внимание уделено автономным системам управления, в которых в качестве объекта управления используются беспилотные летательные аппараты. Сделан акцент на синтез алгоритмов управления в области пространства состояний на основе обобщенного квадратичного показателя качества.

Предназначено для студентов 1 курса направления подготовки 15.04.06 «Мехатроника и робототехника», изучающих теорию управления. Может быть полезно научным сотрудникам, а также специалистам, занимающимся оценкой, анализом и конструированием оптимальных систем автоматического управления динамическими объектами и технологическими процессами.

УДК 517.997.5
ББК 22.161.83

*Все права на размножение и распространение в любой форме остаются за разработчиком.
Незаконное копирование и использование данного продукта запрещено.*

ISBN 978-5-8265-2948-5

© Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тамбовский государственный технический университет» (ФГБОУ ВО «ТГТУ»), 2025

ВВЕДЕНИЕ

Комплексная автоматизация производства и создание автоматизированных и автоматических систем являются одним из главных и решающих средств для повышения эффективности и качества производства. К таким системам относятся, например, разработанные у нас и за рубежом системы управления полетом ракет различного класса, системы управления полетом самолетов, системы наведения подводных аппаратов, современные методы управления технологическими процессами.

Методы анализа и синтеза систем, развитые в теории управления, предусматривают выработку законов управления исходя из требований оптимизации системы по заданному критерию эффективности. Естественно, что кибернетические системы при их разработке, испытании, эксплуатации и применении должны создаваться на основе этих общих правил и законов.

К кибернетическим системам часто предъявляются специфические требования: повышенная готовность, высокая точность работы и надежность функционирования в сложных условиях обстановки, живучесть, простота обслуживания и ремонта, унификация и стандартизация отдельных устройств, блоков и узлов.

В книге рассматриваются главным образом методы анализа и синтеза систем автоматического управления (САУ). Современные САУ создаются на основе применения вычислительной техники и, в частности, цифровых вычислительных машин (ЦВМ). Применение ЦВМ в контуре управления САУ позволяет, как правило, создать эффективную систему, которая способна обеспечить надежное управление в сложных условиях обстановки. Вместе с тем анализ и синтез таких систем – очень трудоемкая задача, успешное решение которой, помимо интуиции разработчика, требует использования ЦВМ общего назначения. Поэтому в книге большое внимание уделяется применению ЦВМ для автоматизации процессов анализа и синтеза САУ и приводятся программы на алгоритмических языках, позволяющие реализовать эти процессы. Следует, однако, иметь в виду, что программы применимы в основном для анализа и синтеза отдельных САУ и не решают в полном объеме задачи синтеза сложных комплексных автоматизированных систем управления, где в качестве управляющей системы выступает человек (оператор).

1. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ КИБЕРНЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

1.1. ПРИНЦИП ДЕЙСТВИЯ КИБЕРНЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Кибернетическая система (рис. 1.1) состоит из пяти составных частей: объекта управления (управляемого процесса), управляющей системы (алгоритма управления), измерительной системы (датчиков характеристик процесса), задающей системы (программы) и контролирующей системы (алгоритмов контроля) [28]. Эти части связаны между собой и образуют два контура управления: основной контур с обратной связью через измерительную систему (блоки 2, 1, 3) и дополнительный контур (блоки 5, 4, 2, 1).

Основной контур обеспечивает работу кибернетической системы в процессе отработки сигналов R задающей системы и предназначен для поддержания значений выходных координат Y объекта в соответствии с требуемыми задающими сигналами R таким образом, чтобы ошибка $\varepsilon = R - X$ находилась в заданных пределах. Кроме того, основной контур должен быть устойчив и иметь требуемые показатели качества переходного процесса системы.

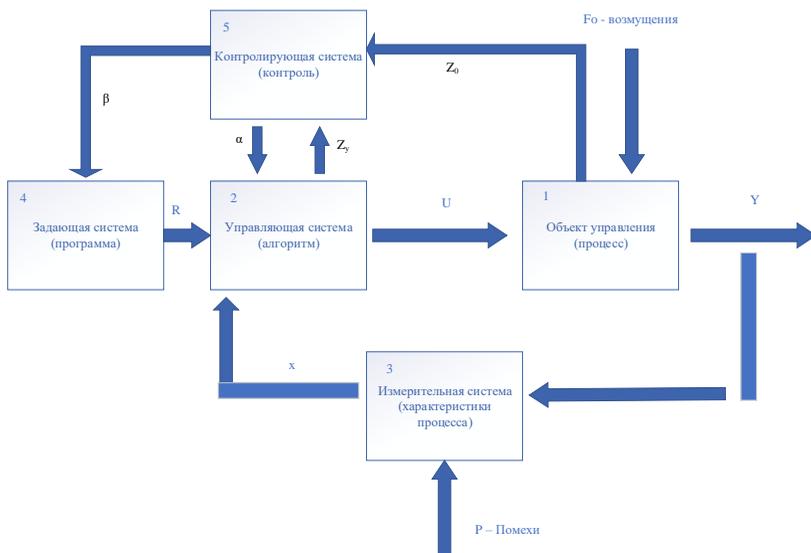


Рис. 1.1. Функциональная схема кибернетической системы

Дополнительный контур обеспечивает контроль работы системы. В случае каких-либо ненормальностей в ее работе он осуществляет перенастройку алгоритма задающей системы и изменение алгоритма управляющей системы в целях обеспечения нормального функционирования основного контура. Объектом управления может быть любое материальное тело или какой-либо физический процесс, например ракета, подводная лодка, самолет, температура и давление внутри замкнутого объема, процесс сгорания топлива в реакторе и т.д.

Измерительная система с помощью датчиков замеряет фактические значения выходных параметров объекта или процесса, которые независимо от их физического смысла называются выходными обобщенными координатами Y .

Управляющая система в соответствии с заложенными в нее алгоритмами управления выдает сигналы на силовые органы, которые в свою очередь обеспечивают необходимые воздействия U на объект. Таким образом, управляющие воздействия вырабатываются в соответствии с информацией, выдаваемой датчиками о фактических обобщенных выходных координатах объекта и требуемых их значениях, вырабатываемых задающей системой. Такой принцип управления носит название управления по отклонению и обеспечивает высокое качество работы кибернетической системы. Совокупность устройств, состоящая из датчиков, задающей и управляющей систем, называется регулятором.

В качестве управляющей системы могут быть применены, например, ЦВМ или какое-либо сочетание аппаратуры и человека. Задающая система в соответствии с заложенным в нее алгоритмом и исходными данными вырабатывает программу изменения требуемых значений R . Сигналы с задающего устройства, поступающие на управляющую систему, называются задающими воздействиями.

Для контроля за правильностью функционирования системы и перестройки алгоритма выработки управляющих и задающих воздействий служит контролирующая система. В случае возникновения неисправностей и отказов отдельных элементов контролирующая система в соответствии с фактическим состоянием параметров (Z_0 , Z_y) управления выдает корректирующий сигнал (α , β) в управляющую и задающую системы. Иерархический принцип построения системы обеспечивает ее повышенную надежность и живучесть. Важно отметить, что система работает при воздействии на объект случайных, заранее неизвестных внешних возмущений F_0 . Кроме того, на датчиках измерительной системы имеют место случайные помехи P , поэтому на выходе датчиков получим сигналы X , по которым можно определить приближенные значения выходных координат состояния объекта Y .

1.2. КЛАССИФИКАЦИЯ КИБЕРНЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Системы классифицируются по трем признакам: по назначению, виду динамических процессов и степени совершенства.

Все кибернетические системы делятся на два класса: автоматические и автоматизированные системы (рис. 1.2).

К первому классу относятся системы, функционирующие автоматически, без непосредственного участия человека (оператора) при выработке управляющих сигналов, например системы управления полетом беспилотного летательного аппарата (БПЛА).

Ко второму классу относятся системы, работающие при непосредственном участии человека (коллектива людей), например системы управления полетом самолета, изменением курса корабля и т.д.

В практике встречаются и комбинированные системы, когда одна и та же система в некоторых режимах функционирования может рассматриваться как автоматическая, а в других – как автоматизированная. Например, при отсутствии помех сопровождения радиолокационной цели осуществляется автоматически, а в сложной помеховой обстановке ее сопровождение берет на себя человек (оператор).

Следует иметь в виду, что теория автоматизированных систем развита в настоящее время еще недостаточно полно, так как поведение человека в системе пока что не удается адекватно описать математическими зависимостями с достаточной для практики степенью приближения к реальной действительности. В свою очередь автоматические и автоматизированные системы можно разделить на ряд подсистем. В частности, автоматические системы подразделяются на автоматы и системы автоматического управления (САУ).

Автоматы по назначению делятся на следующие типы: информационные, управления и контроля. Типичными представителями автоматов являются роботы и цифровые вычислительные машины. К простейшим автоматам относятся приборы контроля параметров окружающей среды, например загазованности, температуры и т.д.

Более сложным автоматом является устройство для распознавания образов – перцептрон. К такого рода автоматам относятся, например, читающие автоматы. Основным признаком автомата с точки зрения кибернетики является то обстоятельство, что его функционирование определяется конечным числом состояний, которые сменяют друг друга по вполне определенной программе.

Системы автоматического управления по виду задающих сигналов подразделяются на программные и следящие. В следящих систе-

мах закон изменения задающих воздействий заранее неизвестен и воздействия, как правило, носят случайный характер.

Примером такой системы может служить радиолокационная станция слежения за самолетом в целях определения параметров его полета. Программная САУ, в противоположность следящей, отрабатывает заранее известное задающее воздействие. Например, система управления ракетой класса «земля–земля» осуществляет разворот продольной оси по углу тангажа в соответствии с заранее заданной программой разворота на активном участке траектории полета.

Отметим, что в некоторых случаях САУ может содержать какой-либо автомат. Примером такой системы является система управления БПЛА с бортовой цифровой вычислительной машиной. В данном случае БЦВМ (автомат) выступает в качестве управляющей системы.

Автоматизированные системы по назначению делятся на подсистемы: автоматизированные информационные системы (АИС), автоматизированные системы управления (АСУ) и автоматизированные системы контроля (АСК).

В свою очередь каждая из этих подсистем подразделяется по назначению на отдельные виды, как это показано на рис. 1.2.

Автоматизированная информационно-поисковая система (ИПС) предназначена для сбора, сортировки, хранения информации и выдачи различных справок и сведений по запросам пользователя.

Информационно-вычислительная система (ИВС), помимо сбора и обработки информации, производит необходимые расчеты в целях выдачи рекомендаций и вариантов лицу, принимающему решения (ЛПР). Автоматизированная информационная система обучения (ИСО) в соответствии с поставленной задачей по обучению обеспечивает последовательный процесс обучения без непосредственного участия преподавателя.

Простейшими примерами таких систем являются различного рода тренажеры. Более сложные ИСО имеют в своем составе ЦВМ со специально разработанными программами обучения [28].

АСУ служат для управления процессами и имеют различное назначение. К таким системам относятся, например, системы управления сложными организационно-техническими комплексами, транспортом, связью, системы управления производственными процессами и т.д.

Наконец, АСК по признаку функционирования бывают: непрерывного действия, периодического действия и пояснений не требуют. Допусковые АСК обеспечивают подачу сигнала тревоги в тот момент, когда какой-либо параметр контролируемого процесса выйдет из заданного допуска.

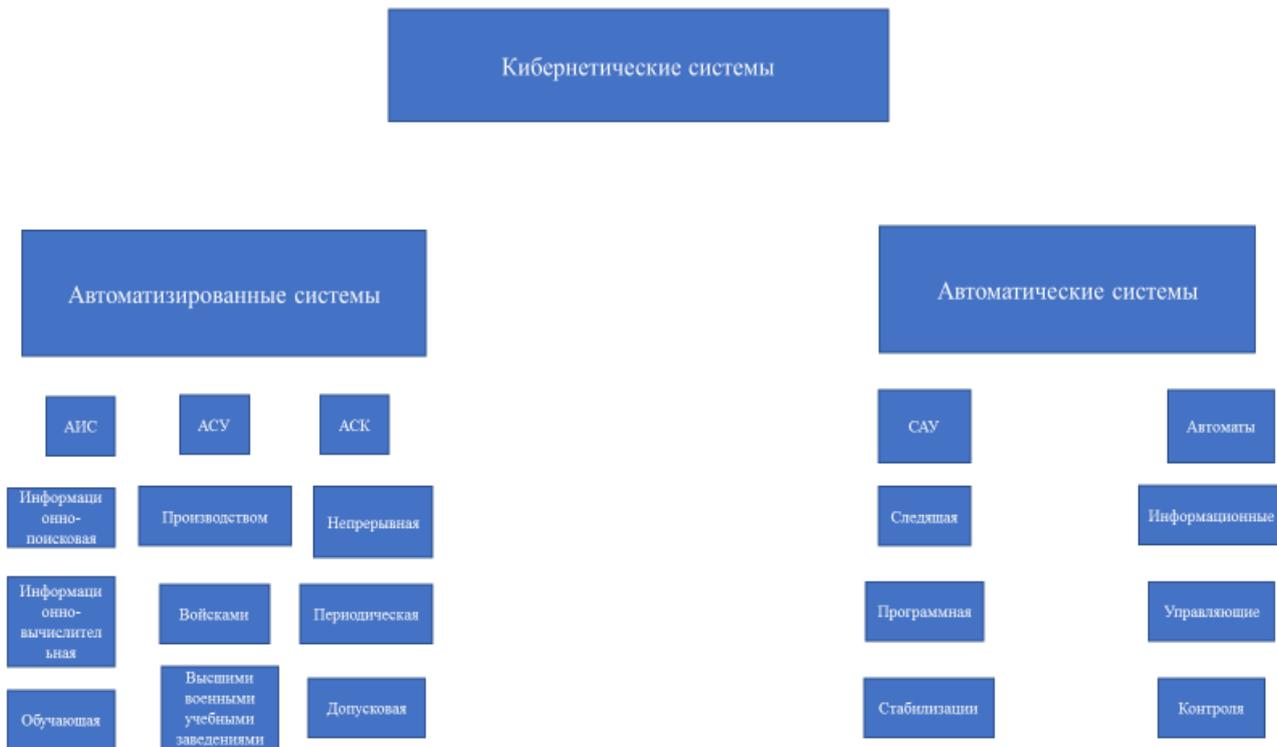


Рис. 1.2. Классификация кибернетических систем

Совершенство совокупности подсистем АИС, АСУ, АСК, САУ и автоматов обеспечивает комплексную автоматизацию управления целой отраслью. Такая «система систем» носит название «большой системы». Теория «больших систем» интенсивно разрабатывается и развивается в настоящее время и предназначена для решения проблемы эффективности применения систем.

Оптимизация кибернетической системы является центральной проблемой, которая подлежит решению при создании новых комплексов. В основу решения этой проблемы положены два принципа: принцип оптимальности Беллмана и принцип максимума Понтрягина. Реализация этих принципов при синтезе конкретных САУ осуществляется методами: частотными, динамического программирования, пространства состояний и другими.

Для применения того или иного метода необходимо четко представлять классификацию САУ по динамическим и структурным признакам (рис. 1.3). Данная классификация содержит пять характерных признаков. По каждому признаку системы делятся на два типа, исключая друг друга.

По динамическому признаку САУ подразделяются на линейные и нелинейные. Следует иметь в виду, что в силу ограничений, которые накладываются на управляющие воздействия и диапазоны работы датчиков, все системы в той или иной степени являются нелинейными. Однако, если отклонения выходных координат в процессе работы САУ находятся в заданных пределах и процессы в системе описываются линейными дифференциальными и линейными разностными уравнениями, система может рассматриваться как линейная.



Рис. 1.3. Классификация САУ по динамическим и структурным признакам

По характеру происходящих в них процессов САУ делятся на непрерывные и дискретные. В первом случае датчики измеряют выходные координаты объекта непрерывно, и управляющая система также непрерывно вырабатывает управляющие воздействия на объект. Во втором случае система работает в прерывистом режиме. Датчики измеряют выходные координаты периодически, либо сигналы на выходе датчиков периодически прерываются, и управляющие сигналы на выходе системы управления носят также прерывистый характер. К дискретным системам относится, например, любая САУ с ЦВМ в контуре управления, так как по принципу действия ЦВМ может воспринимать и выдавать сигналы только в дискретные моменты времени.

По характеру обрабатываемого задающего воздействия системы подразделяются на программные и следящие. Этот признак классификации был рассмотрен ранее.

По числу независимых управляющих воздействий САУ делятся на одномерные и многомерные. В первом случае на объект может действовать только один управляющий сигнал, тогда как во втором случае таких сигналов может быть несколько.

По числу контуров управления системы бывают одноконтурные и многоконтурные. В первом случае в системе измеряется датчиком только одна выходная координата и организуется только одна основная обратная связь от объекта к управляющей системе. Во втором случае с помощью датчиков измеряется несколько выходных координат и организуется несколько обратных связей к управляющей системе. Число контуров в системе определяется количеством датчиков. Контурные могут быть внутренними и внешними. Часто многоконтурную систему с внутренними контурами приводят к одноконтурной структуре с одним внешним контуром путем сворачивания внутренних контуров.

С точки зрения анализа и синтеза САУ верхний ряд классификации (рис. 1.3) определяет наиболее простую САУ. В первом случае система характеризуется как нелинейная, дискретная, следящая, многомерная и многоконтурная, тогда как во втором – она линейная, непрерывная, программная, одномерная и одноконтурная.

Приведенная выше классификация хотя и охватывает все типы САУ, однако не полностью описывает все их свойства. В частности, по этой классификации затруднительно достаточно полно охарактеризовать степень совершенства системы. Поэтому рассмотрим дополнительно классификацию по этому признаку (рис. 1.4).



Рис. 1.4. Классификация САУ по степени организации и совершенства

Простейшими системами по степени совершенства являются разомкнутые САУ, однако они, как уже упоминалось, часто неработоспособны. Более совершенны замкнутые системы, т.е. системы с обратной связью. В них управляющее воздействие вырабатывается по отклонениям действительных выходных координат от требуемых. Принцип действия замкнутой САУ подробно рассматривался в параграфе 1.1.

Следующим, более высоким уровнем организации обладают самонастраивающиеся САУ, в которых осуществляется перестройка параметров алгоритма управления без перестройки структуры самого алгоритма. Перестройка параметров производится в процессе работы САУ в соответствии с изменением заранее выбранных показателей качества работы. Функциональная схема самонастраивающейся САУ содержит контролируемую систему, а структурная схема дополняется контуром самонастройки.

Если в самонастраивающейся САУ осуществляется поиск экстремального значения показателя качества и поддержание процессов вблизи этого экстремального уровня в условиях действия случайных внешних возмущений и помех, то такая система называется экстремальной.

Еще более совершенной и сложнее организованной является самонастраивающаяся САУ, в которой перестраиваются не только параметры алгоритма управления, но и его структура. Такая система обладает свойством приспособляемости к изменяющимся условиям внешней среды и называется адаптивной.

На шестом уровне степени совершенства и организации помещены самообучающиеся САУ, в которых в соответствии с выбранной стратегией обучения вырабатываются оптимальные алгоритмы управления по заданным показателям качества. Конечно, такая система, прежде чем она сможет эффективно работать, затратит некоторое время на выработку управляющего алгоритма, т.е. на самообучение. Вместе с тем в случае непредвиденного изменения внешних условий работы или внутренней структуры объекта система «обучается» заново и, таким образом, приспосабливается к этим изменениям. Отметим, что теория таких САУ в настоящее время разработана еще недостаточно, а сами системы далеки от практической реализации.

Самой высокой степенью совершенства и организации обладают самоорганизующиеся (синергетические) САУ, которые не только вырабатывают в процессе функционирования оптимальный алгоритм, но и выбирают стратегию обучения в соответствии с заложенной в них целевой функцией. Однако технические системы такого типа в настоящее время, по-видимому, не разработаны, и это дело достаточно далекого будущего.

1.3. МЕТОД ПАРАМЕТРОВ СОСТОЯНИЯ

Метод параметров состояния применяется для анализа и синтеза сложных дискретных многомерных и многоконтурных линейных САУ.

Метод параметров состояния имеет преимущества перед ранее рассмотренными, так как удобен для автоматического анализа и синтеза САУ с помощью ЦВМ общего назначения. В настоящее время этот метод интенсивно развивается и может быть применен для анализа и синтеза дискретных многоконтурных и многомерных САУ с нелинейными алгоритмами управления и линейным объектом.

В основу метода параметров состояния положено понятие об обобщенном n -мерном фазовом пространстве. Сущность метода состоит в преобразовании исходной системы дифференциальных уравнений объекта в линейную систему алгебраических уравнений, которая записывается в векторно-матричном виде и носит название уравнения параметров состояния. Уравнение объекта запишем в векторно-матричном виде

$$\dot{Y} = BY + AU + CF, \quad (1.1)$$

где U – вектор управляющих воздействий, постоянный на периоде дискретности T_0 , размерности l ; F – вектор возмущающих воздействий,

постоянный на периоде дискретности T_0 , размерности g ; остальные векторы и матрицы имеют тот же смысл, что и в уравнении.

Решение уравнения (1.1) в квадратурах имеет вид

$$Y(t) = \exp \int_{t_1}^t B dt \left\{ Y(t_1) + \int_{t_1}^t \left[\exp(-\int_{t_1}^t B du) \right] [AU + CF] d\tau \right\}, \quad (1.2)$$

где t_1 – момент начала интегрирования; t – текущее время; $Y(t_1)$ – начальное значение вектора Y .

Найдем уравнение, связывающее начальное состояние объекта с конечным состоянием на каждом периоде дискретности. Для этого приравняем $t_1 = kT_0, t = t_2 = (k+1)T_0, k = 0, 1, 2, \dots$ и, учитывая, что $U[kT_0]$ и $F[kT_0]$ – постоянные величины на периоде дискретности T_0 , получим

$$Y[(k+1)T_0] = \Phi(T_0)Y[kT_0] + H(T_0)U[kT_0] + \Gamma(T_0)F[kT_0], \quad (1.3)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots,$$

где

$$\Phi(T_0) = \exp \int_{kT_0}^{(k+1)T_0} B dt = \exp B T_0, \quad (1.4)$$

$$H(T_0) = \int_0^{T_0} \Phi(\tau) A d\tau, \quad (1.5)$$

$$\Gamma(T_0) = \int_0^{T_0} \Phi(\tau) C d\tau. \quad (1.6)$$

Аргумент в круглых скобках матриц $\Phi(T_0), H(T_0), \Gamma(T_0)$ подчеркивает тот факт, что в общем случае значения элементов матриц зависят от величины периода дискретности T_0 .

Уравнение (1.3) называется уравнением параметров состояния. Отличительной его особенностью является то, что оно рекуррентное.

Если известны матрицы $\Phi(T_0), H(T_0)$ и $\Gamma(T_0)$, а также заданы управляющие воздействия $U[kT_0]$ и возмущения $F[kT_0], k = 0, 1, 2, \dots$ и, кроме того, известно начальное состояние $Y[0]$, то по уравнению (1.3) нетрудно определить значения выходного вектора $Y[(k+1)T_0]$ состояния объекта для моментов времени $T_0, 2T_0, 3T_0, \dots$. При этом нет необходимости на каждом шаге дискретности решать заново систему дифференциальных уравнений (1.1).

Основная трудность получения уравнения (1.3) состоит в определении матриц $\Phi(T_0), H(T_0)$ и $\Gamma(T_0)$. Рассмотрим физический смысл этих матриц. Матрица $\Phi(t_0)$ называется матрицей перехода. Ее элементы есть не что иное, как значения функции веса объекта, взятые в момент времени $t = T_0$ после подачи дельта-функции на различные

входы объекта в момент $t_1 = 0$. В развернутом виде $\Phi(T_0)$ можно записать так:

$$\Phi(T_0) = \|\omega_{ji}(T_0)\|_{(n \times n)}. \quad (1.7)$$

Здесь численное значение $\omega_{ji}(T_0)$ определяет выход i -й координаты вектора Y в момент $t = T_0$ при подаче дельта-функции на j -й вход в момент $t = 0$. Поясним это на примере объекта, структурная схема которого состоит из трех последовательно соединенных интегрирующих звеньев без обратных связей. При подаче дельта-функции $\delta_1(t)$ на первый вход (сумматор 1) на выходе интегрирующего звена спустя T_0 секунд получим $y_1(T_0) = \omega_{11} = 1$. Остальные выходные координаты равны нулю: $y_2(T_0) = \omega_{21} = 0$, $y_3(T_0) = \omega_{31} = 0$. При подаче второй дельта-функции $\delta_2(t)$ на второй вход (сумматор 2) получим $y_2(T_0) = \omega_{22} = 1$, $y_1(T_0) = \omega_{12} = T_0$, $y_3(T_0) = \omega_{32} = 0$. Аналогично при подаче дельта-функции $\delta_3(t)$ на третий вход (сумматор 3) получим

$$y_3(T_0) = \omega_{33} = 1, \quad y_2(T_0) = \omega_{23} = T_0, \quad y_1(T_0) = \omega_{13} = \frac{T_0^2}{2}.$$

Таким образом, для данного примера имеем

$$\Phi(T_0) = \begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ 0 & \omega_{22} & \omega_{23} \\ 0 & 0 & \omega_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & T_0 & T_0^2/2 \\ 0 & 1 & T_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (1.8)$$

Матрица $H(T_0)$ называется матрицей значений переходных процессов. Ее элементы есть не что иное, как значения переходных характеристик объекта по соответствующим выходным координатам при подаче на входы объекта единичных ступенчатых функций $1(t)$ спустя T_0 секунд. В развернутом виде матрица имеет вид

$$H(T_0) = \|h_{ji}\|_{(n \times n)}. \quad (1.9)$$

Матрица $H(T_0)$ связана с матрицей $\Phi(T_0)$, соотношением (1.5).

Аналогичный смысл имеет матрица $\Gamma(T_0)$, только на входе объекта в этом случае имеют место единичные ступенчатые возмущающие воздействия $F1(t)$. По уравнению параметров состояния (1.3) можно построить структурно-матричную схему объекта.

Через $Ee^{-T_0 p}$ обозначим диагональную матрицу с элементами задержки сигнала на величину периода T_0

$$Ee^{-T_0 p} = \begin{vmatrix} e^{-T_0 p} & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & e^{-T_0 p} & 0 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots & e^{-T_0 p} \end{vmatrix}_{(n \times n)}. \quad (1.10)$$

Для сложных объектов высокого порядка аналитическое определение матриц $\Phi(T_0)$, $H(T_0)$ и $\Gamma(T_0)$ представляет трудную задачу. Для определения $\Phi(T_0)$ можно воспользоваться формулой обратного преобразования Лапласа

$$\Phi(T_0) = L^{-1}\{[E_P - B]^{-1}\}_{\tau=T_0}. \quad (1.11)$$

Для определения $H(T_0)$ и $\Gamma(T_0)$ можно воспользоваться формулами (1.13) и (1.14). Однако на практике при $n > 3$ обычно используют для определения $\Phi(T_0)$, $H(T_0)$ и $\Gamma(T_0)$ ЦВМ общего назначения.

Запишем формулы (1.4), (1.5) и (1.6) в виде матричных рядов

$$\Phi(T_0) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B^i T_0^i}{i!}, \quad (1.12)$$

$$H(T_0) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{B^i T_0^{i+1}}{(i+1)!} \right) A, \quad (1.13)$$

$$\Gamma(T_0) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{B^i T_0^{i+1}}{(i+1)!} \right) C. \quad (1.14)$$

Количество членов матричных рядов, которые необходимо просуммировать, зависит от величины периода дискретности T_0 и значений элементов матриц B , A , C . Для вычисления элементов матриц $\Phi(T_0)$, $H(T_0)$ и $\Gamma(T_0)$ на ЦВМ разработана специальная программа. По этой программе для определения матриц ЦВМ затрачивается несколько минут даже для объектов высокого порядка. Поэтому получение матриц уравнения параметров состояния с помощью ЦВМ весьма эффективно.

Рассмотрим вопросы оценки свойств дискретной многоконтурной и многомерной САУ. Пусть задана структурно-матричная схема и необходимо оценить устойчивость системы. Прежде всего преобразуем уравнения объекта в уравнение параметров состояния (1.3).

Пусть уравнение для определения управляющих воздействий имеет вид

$$U[kT_0] = B(T)Y_{np}[kT_0] - Y[kT_0], \quad (1.15)$$

где $B(T)$ – матрица алгоритма выработки управляющих воздействий размерности $l \times n$. После подстановки формулы (1.15) в уравнение (1.3) получим

$$Y[(k+1)T_0] = \Phi_3(T_0, T)Y[kT_0] + H(T_0)B(T)Y_{np}[kT_0] + \Gamma(T_0)F[kT_0], \quad (1.16)$$

где

$$\Phi_3(T_0, T) = \Phi(T_0) - H(T_0)B(T). \quad (1.17)$$

Выражение $\Phi_3(T_0, T)$ не что иное, как матрица перехода замкнутой дискретной САУ.

Равенство (1.16) является уравнением параметров состояния замкнутой дискретной системы. Оно позволяет определить все выходные координаты состояний объекта в дискретных точках $T_0, 2T_0, 3T_0, \dots$ оси времени при любых заданных начальных значениях $Y[0]$ и заданных последовательностях $Y_{np}[kT_0]$ и $F[kT_0]$.

Для оценки устойчивости данной дискретной САУ можно найти распределение корней характеристического уравнения. Для этого возьмем z -преобразование от правой и левой частей уравнения (1.16):

$$Y[z] = \Phi_{30}[z]Y_{np}[z] + \Phi_{3F}[z]F[z], \quad (1.18)$$

где

$$\Phi_{30}[z] = [E_z - \Phi_3(T_0, T)]^{-1}H(T_0)B(T), \quad (1.19)$$

$$\Phi_{3F}[z] = [E_z - \Phi_3(T_0, T)]^{-1}\Gamma(T_0). \quad (1.20)$$

Матрицу $\Phi_{30}[z]$ можно в развернутом виде записать так:

$$\Phi_{30}[z] = \begin{vmatrix} \Phi_{11}[z] & \Phi_{12}[z] & \dots & \Phi_{1n}[z] \\ \Phi_{21}[z] & \Phi_{22}[z] & \dots & \Phi_{2n}[z] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Phi_{n1}[z] & \Phi_{n2}[z] & \dots & \Phi_{nn}[z] \end{vmatrix}, \quad (1.21)$$

где $\Phi_{ij}[z]$, $i = 1, 2, 3, \dots, n, j = 1, 2, 3, \dots, n$, представляют собой дроби, которые имеют полиномы по z в числителе и знаменателе. Например, $\Phi_{ij}[z]$ можно записать так:

$$\Phi_{ij}[z] = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0}. \quad (1.22)$$

Знаменатели всех $\Phi_{ij}[z]$ будут одинаковые и являются характеристическим полиномом замкнутой дискретной САУ. Его можно получить, если определить детерминант матрицы

$$\|E_z - \Phi_{30}(T_0, T)\|. \quad (1.23)$$

Приравняем детерминант к нулю. Тогда получим характеристическое уравнение замкнутой системы

$$\det[E_z - \Phi_{30}(T_0, T)] = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 = 0. \quad (1.24)$$

Следовательно, для суждения об устойчивости дискретной многоконтурной и многомерной САУ необходимо по формуле (1.24) определить характеристическое уравнение, а затем найти его корни.

Для определения показателей качества системы по частотным характеристикам разомкнутой САУ необходимо перейти от $\Phi_{ij}[z]$ к $W_{ij}[z]$. С этой целью разомкнем обратную связь по какой-либо i -й выходной координате и найдем $W_{ij}[z]$ для j -го входа по формуле

$$W_{ii}[z] = \frac{\Phi_{ii}[z]}{1 - \Phi_{ii}[z]}, \quad (1.25)$$

где полагаем $i = j$. После этого строится частотная характеристика или псевдочастотная характеристика по $W_{ij}[z]$ и оцениваются запасы системы по фазе и амплитуде так же, как и для одноконтурной дискретной САУ.

Рассмотрим вопрос о построении областей устойчивости. Приравняв $Y_{пр}[kT_0]$ и $F[kT_0] = 0$, получим

$$Y[(k+1)T_0] = \Phi_3(T_0, T)Y[kT_0]. \quad (1.26)$$

Если принять последовательно $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$, то получим систему из N уравнений. После подстановки предыдущих уравнений в последующие будем иметь

$$Y[NT_0] = \Phi_3^N(T_0, T)Y[0]. \quad (1.27)$$

Для асимптотически устойчивой дискретной последовательности выходных координат Y должно выполняться условие

$$\lim_{m \rightarrow \infty} Y[(N+m)T_0] = \lim_{m \rightarrow \infty} \Phi_3^{N+m}(T_0, T)Y[0] = 0, \quad (1.28)$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$ – целые положительные числа; $N = \left[\frac{n}{l} \right] + 1$ – целая часть числа n ; l – размерность вектора управления U .

Поскольку условие (1.28) должно выполняться для устойчивой системы при любых начальных условиях $Y[0]$, норма матрицы $\Phi_3^{N+m}(T_0, T)$ должна быть убывающей. Если норма матрицы постоянная, то система находится на границе устойчивости. Если она увеличивается, то система неустойчива.

Для практического определения границы устойчивости по какому-либо параметру C_k объекта или регулятора или по параметру T_0 можно вычислять квадратичную норму матрицы

$$|\Phi_3^{(N+m)}(T_0, T, C_k)| = \sqrt{\sum_{i,j} |w_{ij}|^2}; \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (1.29)$$

Параметр C_k изменяется с определенным шагом ΔC_k и по формуле (1.29) отыскивается граничное значение $C_{k_{гр}}$, при котором норма матрицы начинает увеличиваться. Аналогично строится область устойчивости по двум и более параметрам.

Для определения точности работы устойчивой многоконтурной САУ в установившемся режиме при действии постоянных возмущений положим $Y_{пр} = 0, F[kT_0] = F_{уст} = \text{const}$. Для установившегося режима $Y = 0$, поэтому можно получить

$$BY_{уст} + AU_{уст} + CF_{уст} = 0, \quad (1.30)$$

$$U_{уст} = -B(T)Y_{уст}. \quad (1.31)$$

Подставим формулу (1.30) в выражение (1.31) и после простейших преобразований получим

$$Y_{уст} = -[B - AB(T)]^{-1}CF_{уст}. \quad (1.32)$$

Еще одна формула для определения установившихся значений может быть получена, если воспользоваться теоремой о конечном значении:

$$Y_{уст} = \lim_{k \rightarrow \infty} Y[kT_0] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} (\Phi_{z0}[z]Y_{пр}[z] + \Phi_{zF}[z]F[z]). \quad (1.33)$$

Оценка свойств дискретной многоконтурной САУ в данном разделе из методических соображений была произведена для случая простейшего алгоритма управления. Однако аналогично может быть рассмотрена и дискретная САУ с более сложным алгоритмом управления.

1.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ АЛГОРИТМА УПРАВЛЕНИЯ МНОГОКОНТУРНОЙ ДИСКРЕТНОЙ САУ

Рассмотрим задачу синтеза оптимальной по минимуму числа шагов в переходном процессе дискретной многоконтурной САУ. Запишем уравнение параметров состояния объекта без учета действия внешних возмущений

$$Y[(k+1)T_0] = \Phi(T_0)Y[kT_0] + H(T_0)U(kT_0). \quad (1.34)$$

Уравнение датчиков системы имеет вид

$$X = DY, \quad (1.35)$$

где D – неособая матрица размерности $(n \times n)$.

$$a(T_0) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{B^i T_0^{i+1}}{(i+1)!} \right) A. \quad (1.40)$$

Преобразовав систему уравнений (1.39), получим

$$\begin{aligned} & [a(T_0), \Phi^{-1}(T_0)a(T_0), \Phi^{-2}(T_0)a(T_0), \dots, \Phi(T_0)^{-(n-1)}a(T_0)]X, \\ & X \|u_1[0], u_1[T_0], \dots, u_1[(n-1)T_0]\|' = -Y[0]. \end{aligned}$$

Обозначив матрицу, стоящую в квадратных скобках, через $G_{(n \times n)}^{(n)}(T_0)$, получим

$$\|u_1[0], u_1[T_0], \dots, u_1[(n-1)T_0]\|' = -[G_{(n \times n)}^{(n)}(T_0)]^{-1}Y[0]. \quad (1.41)$$

Из формулы следует, что решение существует только в том случае, если матрица $G_{(n \times n)}^{(n)}(T_0)$ – неособая. Неособенность этой матрицы соответствует случаю полной управляемости дискретной САУ. В более общем случае, когда $1 \leq l \leq n$, формула (1.41) примет вид

$$\|U'[0], U'[T_0], \dots, U'[(N-1)T_0]\|' = -[G_{(n \times n)}^{(n)}(T_0)]^{-1}Y[0], \quad (1.42)$$

где

$$G_{(n \times n)}^{(n)}(T_0) = [a(T_0), \Phi^{-1}(T_0)a(T_0), \dots, \Phi^{-(N-1)}(T_0)a(T_0)]. \quad (1.43)$$

Нетрудно заметить, что управляющие сигналы можно определить на все N шагов дискретности вперед по известному начальному состоянию $Y[0]$. Это соответствует разомкнутой САУ, а такая система неработоспособна. Поэтому определим алгоритм управления для замкнутой САУ по найденному выше алгоритму разомкнутой САУ исходя из принципа оптимальности.

По начальному состоянию $Y[0]$ в соответствии с формулой (1.42) на первом шаге получим

$$U^{(1)}[0] = -B(T_0)Y^{(1)}[0], \quad (1.44)$$

где матрица $B(T_0)$ содержит l первых строк матрицы $[G_{(n \times n)}^{(n)}(T_0)]^{-1}$ и имеет вид

$$B(T_0) = \left\| \begin{array}{cccc} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{l1} & \beta_{l2} & \dots & \beta_{ln} \end{array} \right\|. \quad (1.45)$$

В результате первого шага объект перейдет в состояние $Y[T_0]$, но независимо от того, каким путем вектор Y перешел в это новое состояние, управление на втором шаге равно $U[T_0]$. Однако состояние объекта после первого шага можно снова считать начальным и определить $U^{(2)}[0]$ по формуле (1.44) как

$$U^{(2)}[0] = -B(T_0)Y^{(2)}[0]. \quad (1.46)$$

Очевидно, что на основе принципа оптимальности имеют место равенства $U^{(2)}[0] = U[T_0]$ и $Y^{(2)}[0] = Y[T_0]$. Следовательно, справедлива формула

$$U[T_0] = -B(T_0)Y[T_0]. \quad (1.47)$$

Продолжая эту процедуру до N -го шага, получим алгоритм для определения управляющих сигналов в замкнутой системе вида

$$U[kT_0] = -B(T_0)Y[kT_0]; \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (1.48)$$

Отметим, что если система одномерная ($l = 1$), то матрица $B(T_0)$ вырождается в первую строку коэффициентов алгоритма управления вида

$$B(T_0) = \|\beta_{11}(T_0), \beta_{12}(T_0), \dots, \beta_{1n}(T_0)\|. \quad (1.49)$$

Оценка свойств дискретной САУ, оптимальной по минимуму числа шагов дискретности, показывает, что данная система не является грубой по отношению к отклонениям коэффициентов объекта от номинальных значений. Поэтому на практике приходится отказаться от оптимального алгоритма. Возможны два подхода к его уточнению.

Первый из них состоит в том, что вначале, исходя из требуемого быстродействия системы, выбирается период дискретности T :

$$T = \frac{T_p}{N+1}, \quad (1.50)$$

где T_p – время регулирования. Затем определяется матрица $B(T)$ алгоритма управления исходя из критерия минимума числа шагов. Далее выбирают фактический период дискретности T_0 в пределах $(0,1 \dots 0,7)T$, оставляя коэффициенты $B(T)$ неизменными. В этом случае уравнение параметров состояния объекта имеет вид равенства (1.34), а уравнения для выработки управляющих сигналов имеет вид

$$U[kT_0] = -B(T)Y[kT_0]; \quad k = 0, 1, 2, \dots, \infty. \quad (1.51)$$

Процессы в замкнутой САУ становятся плавными, а система остается, как правило устойчивой.

Второй подход состоит в том, что для синтеза используется обобщенный квадратичный показатель качества, весовые коэффициенты которого находятся на основе матрицы $B(T)$.

1.5. СИНТЕЗ ДИСКРЕТНОЙ САУ, ОПТИМАЛЬНОЙ ПО ОБОБЩЕННОМУ КВАДРАТИЧНОМУ ПОКАЗАТЕЛЮ КАЧЕСТВА

В общем случае обобщенный квадратичный показатель качества дискретной многоконтурной и многомерной САУ можно записать в виде [28]

$$I_N = \sum_{k=0}^N Y[kT_0]QY[kT_0] + U[kT_0]RU[kT_0], \quad (1.52)$$

где N – число шагов дискретности переходного процесса, на которых оценивается качество САУ; Q – матрица весовых коэффициентов типа $(n \times n)$; R – матрица весовых коэффициентов при управляющих воздействиях типа $(l \times l)$.

Обычно постановка задачи синтеза формулируется следующим образом: найти алгоритм для определения управляющих сигналов $U[kT_0]$, $k = 0, 1, 2, \dots, m$ при заданных значениях величин N, T_0 при известных элементах матриц Q и R исходя из минимума показателя качества вида (1.52).

Известно [28], что решение этой задачи приводит к нестационарному алгоритму управления, который трудно реализовать на практике даже с помощью ЦВМ. Кроме того, при таком подходе к синтезу дискретной САУ остается открытым вопрос о выборе величины периода дискретности T_0 и элементов матриц Q и R . Поэтому вначале покажем, как определить эти величины исходя из обычных показателей качества системы, таких как быстродействие, точность по отношению к возмущающим воздействиям и выполнение условия грубости. Ограничимся случаем одного шага дискретности ($N = 1$), что приводит к стационарному линейному алгоритму для выработки управляющих воздействий. Кроме того, из методических соображений рассмотрим случай одномерной системы ($l = 1$). С учетом этих ограничений обобщенный показатель качества будет иметь вид

$$I_1 = Y[kT_0]QY[kT_0] + ru_1^2[kT_0]; \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (1.53)$$

Нетрудно видеть, что I_1 есть приращение величины показателя качества вида (1.53) на одном шаге дискретности.

$$I_1[kT_0] = I_N[kT_0] - I_N[(k-1)T_0]. \quad (1.54)$$

Потребуем, чтобы это приращение на каждом шаге было минимальным

$$\min_{u[kT_0]} I_1[kT_0] = \min_{u[kT_0]} \{I_N[kT_0] - I_N[(k-1)T_0]\}. \quad (1.55)$$

Можно показать, что оптимальный алгоритм управления в данном случае имеет вид

$$u_1[kT_0] = -B(T_0)Y[kT_0], \quad (1.56)$$

где

$$B(T_0) = [H'(T_0)QH(T_0) + r]^{-1} H'(T_0)Q\Phi(T_0). \quad (1.57)$$

Следовательно, задача синтеза оптимальной дискретной САУ сводится к определению величин T_0 , r и элемента матрицы Q . Задача выбора элементов матрицы Q решается исходя из заданного быстродействия дискретной САУ.

Ранее было установлено, что в случае синтеза дискретной САУ по критерию минимума числа шагов время регулирования определяется формулой (1.50), где для нашего случая надо принять $N = n$. Задаваясь определенным значением T_p , найдем максимально возможный период дискретности системы

$$T_m = \frac{T_p}{n+1}. \quad (1.58)$$

Далее решаем задачу синтеза по критерию минимума числа шагов, как это было показано в разд. 1.3, для случая $T = T_m$. Найдем матрицу алгоритма управления $B(T_m)$, которую в дальнейшем будем обозначать $B^0(T_m)$.

По формуле (1.57) проверим, выполняется ли требуемая точность работы САУ в установившемся режиме при заданных постоянных внешних возмущениях $F_{уст}$.

$$|Y_{уст}| < Y_{уст.доп} \quad (1.59)$$

В случае, если условие не выполняется, необходимо уменьшить T_m и найти новую матрицу $B(T_m)$ с тем, чтобы обеспечить не только заданное быстродействие САУ, но и требуемую точность.

Теперь нетрудно найти элементы матрицы Q , используя формулу (1.53), в которой примем $r = 0$:

$$B^0(T_m) = [H'(T_m)QH(T_m)]^{-1} H'(T_m)Q\Phi(T_m). \quad (1.60)$$

В этом уравнении неизвестными являются элементы матрицы Q . Не нарушая общность дальнейших рассуждений, будем искать матрицу Q в диагональном виде:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & q_{nn} \end{pmatrix}_{(n \times n)}. \quad (1.61)$$

Для решения уравнения (1.60) в явном виде умножим левую и правую части этого уравнения на $[H'(T_m)QH(T_m)]$:

$$[H'(T_m)QH(T_m)]B^0(T_m) = H'(T_m)Q\Phi(T_m). \quad (1.62)$$

Осуществив операцию транспортирования левой и правой частей этого уравнения, получим

$$B^{0'}(T_m)H'(T_m)Q'H(T_m) = \Phi'(T_m)Q'H(T_m). \quad (1.63)$$

Введем обозначение

$$Q_h = Q'H(T_m) \quad (1.64)$$

и представим этот вектор как $Q_h = H^d(T_m)Q^C$, где $H^d(T_m)$ – диагональная матрица. Тогда получим

$$[B^{0'}(T_m)H'(T_m) - \Phi'(T_m)]H^d(T_m)Q^C = 0, \quad (1.65)$$

где Q^C – вектор-столбец.

Можно показать, что определитель матрицы условий

$$A = [B^{0'}(T_m)H'(T_m) - \Phi'(T_m)]H^d(T_m) \quad (1.66)$$

равен нулю и система уравнений (1.65) дает $(n - 1)$ уравнений для определения $(n - 1)$ значений диагональных элементов матрицы Q^C : $q_{ii}, i = 2, 3, \dots, n$. Матрицу условий (1.66) можно записать в виде совокупности векторов

$$A = \|A_1 A_2 \dots A_n\|. \quad (1.67)$$

Поскольку первый элемент вектора Q^C равен единице, то систему уравнений с учетом формулы (1.67) можно записать так:

$$A_2 q_{22} + A_3 q_{33} + \dots + A_n q_{nn} = -A_1. \quad (1.68)$$

Следует иметь в виду, что для обеспечения устойчивости системы по критерию Ляпунова элементы $q_{ii}, i = 2, 3, \dots, n$ должны быть больше нуля или равны нулю. В этом случае матрица Q будет положительной полуопределенной.

Далее определим величины r и T_0 . Обратимся к исходному матричному уравнению. Из всей совокупности ранее найденных коэффициентов

матрицы $B^0(T_m)$ выберем такой, который определяет точность работы системы по отношению к возмущениям в установившемся режиме. Пусть это будет коэффициент β_{11} . Обозначим его через β_{11}^* и будем полагать неизменным при дальнейшей процедуре отыскания r и T_0 .

Из всей совокупности уравнений возьмем первое и, приравняв в нем $\beta_{11} = \beta_{11}^*$, найдем функцию

$$r(T) = f(\beta_{11}^*, H(T), Q, \Phi(T)). \quad (1.69)$$

По физическому смыслу показателя качества вида коэффициент r должен быть положительным. Кроме того, с точки зрения экономии энергии управления желательно выбрать наибольшее возможное его значение. Заметим, что при $T = 0$ и $T = T_m$ $r = 0$. Следовательно, если существует $r > 0$, то на отрезке $0 < T < T_m$ существует и положительный максимум функции $r(T)$.

Для определения этого максимума возьмем частотную производную по T и приравняем ее к нулю

$$\frac{\partial r(T)}{\partial T} = \frac{\partial f(\beta_{11}^*, H(T), Q, \Phi(T))}{\partial T} = 0. \quad (1.70)$$

При дополнительном условии $r > 0$ получим

$$\max r(T) = r_m(T_0). \quad (1.71)$$

Таким образом, будут найдены одновременно величины $r = r_m$ и $T = T_0$.

Наконец, после подстановки найденных значений Q , r_m и T_0 в формулу найдем искомые коэффициенты алгоритма управления $B(T_0)$, обеспечивающие минимум показателя качества при выполнении заданного быстродействия, точности и грубости.

Для иллюстрации методики синтеза рассмотрим пример. В качестве объекта регулирования представлены два интегрирующих звена, соединенные последовательно. На объект действует постоянное внешнее возмущение $f_1 = 1$. Задано быстродействие системы в переходном процессе, которое определяется временем регулирования $T_p = 1,5$ с. В установившемся режиме отклонение $y_{1уст,доп}$ при действии возмущения $f_1 = 1$ не должно превышать 0,1 (рис. 1.5).

Необходимо найти элементы матрицы алгоритма управления $B(T_0) = \|\beta_{11}(T_0), \beta_{12}(T_0)\|$ и период дискретности T_0 исходя из минимума обобщенного квадратичного показателя качества вида.

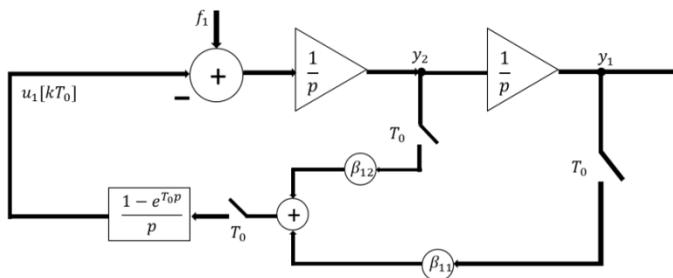


Рис. 1.5. Структурная схема дискретной САУ второго порядка

Для решения поставленной задачи найдем T_m . Поскольку $n = 2$, а $T_p = 1,5$ с, то получим $T_m = 0,5$ с. Далее найдем матрицу $B^0(T_m)$ для дискретной САУ, оптимальной по минимуму числа шагов дискретности. С этой целью вначале определим матрицы $\Phi(T_m)$, $H(T_m)$, $a(T_m)$ уравнения параметров состояния:

$$\Phi(T_m) = \begin{Bmatrix} 1 & T_m \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}; \quad H(T_m) = \begin{Bmatrix} T_m^2 \\ T_m \end{Bmatrix}; \quad a(T_m) = \begin{Bmatrix} -T_m^2 \\ 2 \\ T_m \end{Bmatrix}.$$

Далее найдем $G_{(2 \times 2)}^{(2)}(T_m)$:

$$G_{(2 \times 2)}^{(2)}(T_m) = [a(T_m), \Phi(T_m)^{-1}a(T_m)] = \begin{Bmatrix} -\frac{T_m^2}{2} & -\frac{3T_m^2}{2} \\ T_m & T_m \end{Bmatrix}.$$

Обратим матрицу $G_{(2 \times 2)}^{(2)}$, найдем ее первую строку и получим матрицу $B^0(T_m)$:

$$[G_{(2 \times 2)}^{(2)}]^{-1} = \begin{Bmatrix} 1 & 3 \\ \frac{T_m^2}{2} & \frac{2T_m^2}{2} \\ 1 & 1 \\ \frac{T_m^2}{2} & -\frac{2T_m^2}{2} \end{Bmatrix}; \quad B^0(T_m) = \begin{Bmatrix} 1 & 3 \\ \frac{1}{T_m^2} & \frac{3}{2T_m} \end{Bmatrix} = \|4,3\|.$$

Теперь найдем установившиеся значения:

$$Y_{уст} = \begin{Bmatrix} y_{1уст.доп} \\ y_{2уст.доп} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_{11}^0 & \beta_{12}^0 \end{Bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} f_1 = \begin{Bmatrix} f_1 \\ \beta_{11} \\ 0 \end{Bmatrix},$$

где $y_{1уст.доп} = 0,25$; $y_{2уст.доп} = 0$.

Следовательно, условие $y_{\text{уст.доп}} \leq 0,1$ не выполняется и необходимо выбрать меньшее значение T_m . Поскольку $y_{\text{уст}} = f_1/\beta_{11}^0$, необходимо иметь $\beta_{11}^0 = 10$ исходя из соотношения $\beta_{11}^0(T_m) = \frac{1}{T_m^2}$, находим $T_m = 0,316$ с.

Таким образом, получим

$$B^0(T_m) = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 3 \\ T_m^2 & 2T_m \end{array} \right\| = \|10 \quad 4,75\|.$$

Найдем элементы матрицы Q :

$$Q = \left\| \begin{array}{cc} q_{11} & 0 \\ 9 & q_{22} \end{array} \right\|; \quad q_{11} = 1.$$

Это позволит нам получить матрицу A :

$$A = \left[\left\| \begin{array}{c} 1 \\ T_m^2 \\ 3 \\ 2T_m \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} T_m^2 \\ T_m^2 \\ 2 \\ 2 \end{array} \right\| \quad T_m \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ T_m & 1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} T_m^2 & 0 \\ 2 & T_m \end{array} \right\| \right] = \left\| \begin{array}{cc} -\frac{T_m^2}{4} & 1 \\ -\frac{T_m^3}{8} & \frac{T_m}{2} \end{array} \right\|.$$

Таким образом, имеем

$$A_1 = \left\| \begin{array}{c} -\frac{T_m^2}{4} \\ -\frac{T_m^3}{8} \end{array} \right\|; \quad A_2 = \left\| \begin{array}{c} 1 \\ \frac{T_m}{2} \end{array} \right\|.$$

Следовательно, получим

$$\left\| \begin{array}{c} 1 \\ T_m \\ 2 \end{array} \right\| q_{22} = \left\| \begin{array}{c} T_m^2 \\ 4 \\ T_m^3 \\ 8 \end{array} \right\|,$$

откуда

$$q_{22} = \frac{T_m^2}{4} = 2,5 \cdot 10^{-2}.$$

Найдем функцию $r(T)$. Учитывая, что $\beta_{11}^* = 10$, получим

$$r(T) = -0,25T^4 + 0,25T^2.$$

Возьмем частную производную по T и приравняем ее к нулю:

$$\frac{\partial r(T)}{\partial T} = -T_0^3 + 0,05T_0 = 0.$$

Откуда получим $T_0 = 0,223$.

Теперь окончательно найдем оптимальные значения элементов матрицы $B(T_0)$:

$$B(T_0) = \|\beta_{11}^* \beta_{12}\| = \|10 \quad 4,46\|.$$

Проверим выполнение заданного быстродействия переходного процесса. Положим, начальные условия $y_1[0] = 1, y_2[0] = 0$. По уравнению параметров состояния, приняв $F[kT_0] = 0$, с учетом алгоритма управления, получим переходный процесс.

Переходный процесс заканчивается примерно за пять периодов дискретности T_0 , т.е. $T_p = 1,115$ с, что удовлетворяет требованию $T_p \leq 1,5$ с (рис. 1.6).

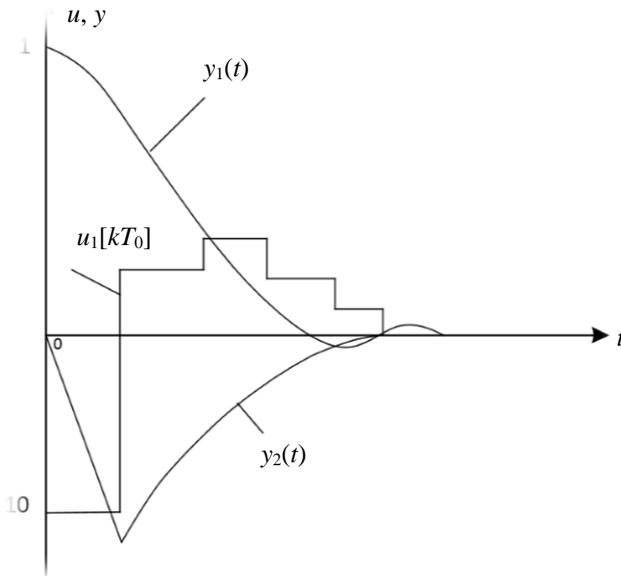


Рис. 1.6. Переходный процесс дискретной САУ, оптимальной по квадратичному показателю качества

1.6. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Вариационную задачу можно приближенно заменить задачей нахождения экстремума функции $I(t_1, t_2, \dots, t_N)$ от N переменных [27]. Последнее вытекает из того, что в функционале общего вида

$$I = \int_{t_0}^T F(y, u, t) dt \quad (1.72)$$

функцию управления $u(t)$ можно представить в виде ломаной линии с вершинами $u_0 = u(t_0)$, $u_1 = u(t_0 + \Delta t)$, ..., $u_N = u(t_0) + N\Delta t$.

Это дает возможность записать функционал как сумму

$$I = \sum_{i=0}^N F(y_i, u_i, t_i) \Delta t, \quad (1.73)$$

где $t_i = t_0 + i\Delta t$.

При увеличении N отыскание экстремума функции $I(t_0, \dots, t_N)$ будет все точнее соответствовать решению исходной задачи. Нахождение экстремума I одновременно по всем u_i называют одношаговым вычислительным процессом. Известно, что вычисление всей совокупности оптимальных значений $u(t_i)$, где $i = 1, 2, 3, \dots, N$, для функции многих переменных I затруднительно.

Поэтому заслуживают внимания методы, в которых $u(t_i)$ находят по заданному критерию шаг за шагом в многошаговом вычислительном процессе. Математическим аппаратом многошаговых вычислительных процессов является динамическое программирование, созданное при участии Р. Беллмана в 50-х годах XX века. Слово «программирование» связано с тем, что метод дает возможность получить определенный алгоритм (программу) для оптимального управления. «Динамическим» программирование называется потому, что оно может быть использовано для оптимизации процессов, в которых важную роль играют время и порядок выполнения операций.

Пусть необходимо в фазовом пространстве перевести изображающую точку из состояния Y_0 в состояние Y_T , которое будем считать фиксированным, за минимально возможное время. Начальные точки Y_0 могут быть различными. Время, в течение которого происходит оптимальный переход из некоторой промежуточной точки Y в конечную точку Y_T , обозначим через $t_{\text{оп}}(Y)$. Этот переход производится под воздействием оптимального управления $U_{\text{оп}}(t)$. Для САУ, оптимальной по быстрдействию, время $t_{\text{оп}}(Y)$ наименьшее из возможных.

Предположим, что началу движения объекта из точки Y_0 соответствует время t_0 и он попадает в точку Y по некоторой произвольной траектории, в момент t . Дальнейшее движение из точки Y до точки Y_T будет проходить по оптимальной траектории за время $t_{\text{оп}}(Y)$. Полное время движения объекта из точки Y_0 в точку Y_T составит $t - t_0 + t_{\text{оп}}(Y)$ и, очевидно, будет больше (или равно) времени движения $t_{\text{оп}}(Y_0)$ объекта между этими же точками по оптимальной траектории:

$$t_{\text{оп}}(Y_0) \leq t - t_0 + t_{\text{оп}}(Y). \quad (1.74)$$

Если управление оптимально, то соотношение (1.74) принимает форму $t_{\text{оп}}(Y_0) = t - t_0 + t_{\text{оп}}(Y)$ и представляет собой математическую формулировку основного принципа динамического программирования, называемого принципом оптимальности. Принцип оптимальности имеет следующую формулировку: оптимальный процесс обладает тем свойством, что каковы бы ни были первоначальное состояние и решение в данный момент, последующие решения должны составлять оптимальный процесс относительно состояния, получившегося в результате первого решения. Это означает, что в каждый текущий момент необходимо принимать решение, которое позволяет получить наилучшие результаты за оставшееся время.

Рассмотрим использование метода динамического программирования для синтеза алгоритма управления дискретной САУ. При определении оптимального закона управления будем исходить из квадратичного показателя качества общего вида.

Пусть дана линейная система, объект которой описывается векторно-матричным управлением с постоянными коэффициентами:

$$\dot{Y}(t) = BY(t) + AU(t). \quad (1.75)$$

Уравнение параметров состояния для этой системы имеет вид

$$\begin{aligned} Y[(k+1)T] &= \Phi(T)Y[kT] + H(T)U[kT], \\ H(T) &= \Phi(T)a(T). \end{aligned} \quad (1.76)$$

Обозначения переменных и коэффициентов в уравнениях (1.75) и (1.76) тождественны обозначениям, принятым ранее при изложении метода параметров состояния.

Для получения скалярного оптимального управления $U[kT]$ необходимо минимизировать функционал общего вида

$$I_N = \sum_{k=1}^N \{Y[kT]QY[kT] + rU^2[(k-1)T]\}, \quad (1.77)$$

где Q – заданная симметричная матрица веса ошибки регулирования; r – весовой коэффициент затрат энергии на управление; N – число шагов регулирования; T – период дискретности; k – номер периода дискретности.

Минимальное значение функционала I_N обозначим через $f_N[Y[0]]$:

$$f[Y[0]] = \min_{\substack{U[0] \\ \vdots \\ U[T] \\ \vdots \\ U[(N-1)T]}} \sum_{k=1}^N \{Y'[kT]QY[kT] + rU^2[(k-1)T]\}. \quad (1.78)$$

Это минимальное значение критерия (1.77) за все N шагов для заданного граничного значения вектора регулируемых координат $Y[0]$. Выражение для минимального значения показателя качества (1.78) для последних $N-j$ шагов имеет вид

$$f_{N-j}[Y[jT]] = \min_{\substack{U[jT] \\ \vdots \\ U[(N-1)T]}} \sum_{k=j+1}^N \{Y'[kT]QY[kT] + rU^2[(k-1)T]\}. \quad (1.79)$$

Представим значение функционала (1.78) для последних $N-j$ шагов как его значение на j -м шаге плюс его оптимальное значение на остальных $N-(j+1)$ шагах:

$$Y'[(j+1)T]QY[(j+1)T] + rU^2[jT] + f_{N-(j+1)}\{Y[(j+1)T]\}. \quad (1.80)$$

Теперь, используя принцип оптимальности, представим минимальное значение функционала за $N-j$ шагов с учетом выражения (1.80) в следующей форме:

$$f_{N-1}[Y[jT]] = \min_{U[jT]} \{Y'[(j+1)T]QY[(j+1)T] + rU^2[jT] + f_{N-(j+1)}[Y[(j+1)T]]\}. \quad (1.81)$$

Предложим, что $f_0[Y[NT]] = 0$, тогда в попятном движении от конца фазовой траектории $Y[N]$ к началу можно, оптимизируя на каждом шаге только по одному значению $U[jT]$ данного шага, найти все значения f_j :

$$f_1[Y[(N-1)T]] = \min_{U[(N-1)T]} \{Y'[NT]QY[NT] + rU^2[(N-1)T]\} \\ \dots \dots \dots \\ f_N[Y[0]] = \min_{U[0]} \{Y'[T]QY[T] + rU^2[0] + f_{N-1}[Y[T]]\}. \quad (1.82)$$

Поскольку функционал (1.77) есть квадратичная форма от Y , то и f_{N-j} и $f_{N-(j+1)}$ можно представить как квадратичные формы:

$$\begin{aligned} f_{N-j}[Y[jT]] &= Y'[jT]P[(N-j)T]Y[jT]; \\ f_{N-(j+1)}[Y[(j+1)T]] &= Y'[(j+1)T]P[(N-(j+1)T)]Y[(j+1)T], \end{aligned} \quad (1.83)$$

где P – симметричная матрица размером $n \times n$.

С учетом введенных обозначений функционал представим, подставляя $Y[(k+1)T]$, в следующей компактной форме [24]:

$$\begin{aligned} f_{N-j}[Y[jT]] &= Y'[jT]P[(N-j)T]Y[jT] = \min_{U[jT]} \{ [\Phi(T)Y[jT] + H(T) \times \\ &\times U[jT]]' S[(N-(j+1)T)] [\Phi(T)Y[jT] + H(T)U[jT]] + rU^2[jT] \}, \end{aligned} \quad (1.84)$$

где $S[(N-(j+1)T)] = Q + P[(N-(j+1)T)]$.

Из формулы следует, что минимизация правой части переменной $U[jT]$ может быть проведена с использованием процедуры дифференцирования:

$$\begin{aligned} 2[H'(T)S[(N-(j+1)T)]H(T) + r]U[jT] + H'[T]S[(N-(j+1)T)] \times \\ \times \Phi(T)Y[jT] + Y'[jT]\Phi'(T)S[(N-(j+1)T)]H(T) = 0. \end{aligned} \quad (1.85)$$

Так как матрица S представляет собой сумму двух симметричных матриц P и Q , то она также является симметричной, поэтому из выражения (1.84) получаем закон оптимального управления $B[(N-j)T]$:

$$\frac{U^0[jT]}{Y^0[jT]} = - \frac{H'(T)[Q + P[(N-(j+1)T)]\Phi(T)}{H'(T)[Q + P[(N-(j+1)T)]\Phi(T) + r} = B[(N-j)T]. \quad (1.86)$$

Таким образом, элементы матрицы $B[(N-j)T]$ меняются во времени, т.е. на каждом такте дискретности, поскольку меняются во времени элементы матрицы P . Так, если $j = N - 1$, то матрица управления на первом такте имеет вид

$$B(T) = - \frac{H'(T)Q\Phi(T)}{H'(T)QH(T) + r}, \quad (1.87)$$

где $P(0) = 0$, так как $f_0[Y[NT]] = 0$.

Далее, для $j = N - 2$ имеем

$$B(2T) = - \frac{H'(T)[Q + P(T)]\Phi(T)}{H'(T)[Q + P(T)]H(T) + r}. \quad (1.88)$$

Теперь запишем матрицу коэффициентов оптимального управления для j -го шага

$$B(jT) = -\frac{H'(T)[Q + P[(j-1)T]]\Phi(T)}{H'(T)[Q + P[(j-1)T]]H(T) + r}. \quad (1.89)$$

Для вычисления матриц $B(jT)$ необходимо найти рекуррентное соотношение для определения P -матриц. Заменяя управление $U^0[jT]$ по формуле (1.85):

$$U^0[jT] = B[(N-j)T]Y^0[jT],$$

найдем

$$\begin{aligned} Y'[jT]P[(N-j)T]Y[jT] &= Y'[jT]\{\Phi(T) + H(T)B[(N-j)T]\}' \times \\ &\times S\{[N-(j+1)T]\}\{\Phi(T) + H(T)B[(N-j)T]\}Y[jT] + \\ &+ rY'[jT]B'[(N-j)T]B[(N-j)T]Y[jT]. \end{aligned} \quad (1.90)$$

Сравнивая между собой левую и правую части формулы (1.90), получим рекуррентную формулу для определения вспомогательной матрицы P :

$$\begin{aligned} P[(N-j)T] &= \{\Phi(T) + H(T)B[(N-j)T]\}' \{Q + P[[N-(j+1)T]]\} \times \\ &\times \{\Phi(T) + H(T)B[(N-j)T]\} + rB'[(N-j)T]B[(N-j)T]. \end{aligned} \quad (1.91)$$

Используя поочередно формулы, последовательно находим матрицы $P(0)$, $B(T)$, $P(T)$, $B(2T)$... $B(NT)$, т.е. все матрицы оптимального закона управления, доставляющего минимум заданному функционалу в силу уравнения параметров состояния.

Рассмотрим пример расчета матриц оптимального закона управления дискретных САУ. Уравнение объекта регулирования имеет вид $y(t) = -cy(t) + du(t)$. Матрица весовых функций $\Phi(T)$ для этого объекта вычисляется по формуле

$$\Phi(T) = L^{-1}\{[pE - B]^{-1}\} = L^{-1}\left(\frac{1}{p+c}\right) = e^{-cT}.$$

Найдем коэффициент эффективности управляющих воздействий:

$$a(T) = \int_0^T \Phi(-\tau)A d\tau = \frac{d}{c}(e^{cT} - 1).$$

Для дальнейших расчетов необходимо получить матрицу $\mathbf{H}(T)$, которая в данном случае вырождается в коэффициент:

$$H(T) = \Phi(T)a(T) = e^{-cT} \frac{d}{c} (e^{cT} - 1) = \frac{d}{c} (1 - e^{-cT}).$$

Функционал представим в виде следующей квадратичной формы:

$$I_N = \sum_{k=1}^N \{Y^2[kT] + ru^2[(k-1)T]\},$$

т.е. матрица Q (в данном случае состоящая из одного коэффициента) равна единице. Известно, что $P(0) = 0$. Коэффициенты B оптимального алгоритма рассчитаем по формуле

$$B(T) = -\frac{H'(T)QH(T)}{H'(T)QH(T) + r} = -\frac{\frac{d}{c}(1 - e^{-cT})e^{-cT}}{\frac{d^2}{c^2}(1 - e^{-cT})^2 + r}.$$

Используя рекуррентное соотношение, определяем матрицу $P(T)$, после чего по формуле – матрицу $B(2T)$, и далее процесс вычислений для последующих шагов повторяется.

В том случае, когда объект регулирования описывается дифференциальным уравнением третьего порядка и выше, для расчетов коэффициентов матриц предпочтительнее использовать ЦВМ.

1.7. ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ УПРАВЛЕНИЯ

Идея метода была предложена академиком Л. С. Понтрягиным в 1959 г. в виде гипотезы и получила название принципа максимума Понтрягина. Важным преимуществом метода является то, что класс искомых экстремалей $U(t)$ включает кусочно-непрерывные функции, поэтому метод применим для большинства случаев, когда управление является ограниченной функцией.

Как и в методе динамического программирования, при применении принципа максимума решается задача отыскания управления $U(t)$, с помощью которого за время T система из положения $Y(t_0)$ переводится в положение $Y(T)$ с одновременным обеспечением экстремума функционала

$$I = \int_{t_0}^T F[Y(t), U(t), t] dt. \quad (1.92)$$

В число рассматриваемых фазовых координат системы включают новую координату $y_0(t)$, которая представляет собой текущее значение функционала (1.92):

$$y_0(t) = \int_{t_0}^t F[Y(t), U(t), t] dt. \quad (1.93)$$

Из соотношения получают дополнительное дифференциальное уравнение

$$\frac{dy_0(t)}{dt} = F[Y(t), U(t), t] = f_0[Y(t), U(t), t], \quad (1.94)$$

которое вместе с уравнениями неизменяемой части системы

$$y_i(t) = f_i[Y(t), U(t), t]; \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.95)$$

образует исходную систему уравнений задачи оптимизации.

Уравнения (1.94) и (1.95) можно представить в более компактном виде:

$$y_i = f_i[Y(t), U(t), t]; \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (1.96)$$

Для определения оптимального уравнения формируется функция H , которая получила название гамильтониана:

$$H = \sum_{i=0}^n \psi_i(t) f_i [Y(t), U(t), t]. \quad (1.97)$$

Эта функция включает в себя, кроме правых частей f_i исходных дифференциальных уравнений (1.96), вспомогательные функции $\psi_i(t)$. Функции $\psi_i(t)$ определяются из системы уравнений

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y_i}; \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (1.98)$$

Дифференцируя функцию H по ψ_i , найдем

$$\frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \psi_i}; \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (1.99)$$

С учетом введенных обозначений принцип максимума формулируется следующим образом: для оптимальности управления $U(t)$ необходимо существование такой ненулевой непрерывной функции $\psi(t) [\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_n(t)]$, соответствующей функциям $U(t)$ и $Y(t)$, чтобы при любом t из интервала $t_0 \leq t \leq T$ функция $H[\psi(t), Y(t), U(t)]$ переменного $U \in \Omega$ достигала в точке $U = U(t)$ максимума

$$\max_{u \in \Omega} = H[\psi(t), Y(t), U(t)], \quad (1.100)$$

где Ω – область, в которой задано управление $U(t)$.

Иначе управление, которое минимизирует (максимизирует) функционал, должно в каждый момент времени максимизировать (минимизировать) гамильтониан H , соответствующий уравнениям (1.97) и (1.99).

Опуская доказательство принципа максимума, приведем последовательность определения оптимального управления $U(t)$ по этому методу.

1. Все уравнения неизменяемой части системы записываются в форме Коши; к уравнению первого порядка приводится и функционал

$$y_i = f_i[U, Y, t]; i = 0, 1, \dots, n.$$

2. Вычисляется гамильтониан H по соотношению

$$H = \sum_{i=0}^n \psi_i(t) f_i [U, Y, t].$$

3. Определяется управление $U(t)$, которое доставляет максимум гамильтониану H , из следующих уравнений:

$$\frac{\partial H}{\partial v_j}; j = 0, 2, \dots, r, \quad (1.101)$$

где r – размерность вектора управления.

Когда максимум функции H достигается на границе допустимой области управления Ω , тогда для некоторых j равенство (1.101) может не выполняться. Поэтому более общей формулой для определения оптимального управления является соотношение

$$H^* = \max_{u(t) \in \Omega} H(Y, U, \psi, t).$$

В уравнении (1.100) содержится $2n + r + 2$ неизвестных: $n + 1$ функций $y_i(t)$; $n + 1$ функций $\psi_i(t)$; r функций $u_i(t)$.

4. Для управления неизвестных функций имеется $n + 1$ дифференциальных уравнений объекта; r уравнений (1.100); $n + 1$ уравнений (1.98) для определения функций $\psi_i(t)$. Из совместного решения всех перечисленных $2n + r + 2$ уравнений находится оптимальное управление $U(t)$.

Как видно из изложенного порядка решения задачи, нахождение экстремали $U(t)$ функционала (критерия качества) заменено более про-

стой задачей определения параметра U , который доставляет максимум функции H . Отсюда, собственно, и следует название метода «принцип максимума».

Рассмотрим задачу об оптимальной по быстродействию системе стабилизации углового положения летательного аппарата относительно продольной оси. В этом случае уравнение объекта регулирования имеет вид

$$\frac{dy}{dt^2} = y = u$$

с ограниченным по модулю управлением

$$|u| \leq 1. \quad (1.102)$$

Введем фазовые координаты $y_1 = y$ и $y_2 = \dot{y}$ и запишем уравнение объекта в форме Коши:

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2; \quad \frac{dy_2}{dt} = u. \quad (1.103)$$

Функционал задачи есть не что иное, как время процесса регулирования

$$I = \int_0^T dt = T. \quad (1.104)$$

Поэтому дифференциальное уравнение, соответствующее функционалу (1.104), можно представить в форме

$$\frac{dy_0}{dt} = 1. \quad (1.105)$$

Используя соотношения, составим выражение для гамильтониана H :

$$H = \sum_{i=0}^2 \psi_i(t) f_i = \psi_0(t) + \psi_1(t) y_2 + \psi_2(t) u. \quad (1.106)$$

Максимальное значение функции H обеспечивается, если вычислять управление u по формуле

$$u = \text{sign} \psi_2(t), \quad (1.107)$$

т.е. при $\psi_2(t) > 0$ следует подавать на объект управляющее воздействие $u = +1$, а при $\psi_2(t) < 0$ управление переключить на $u = -1$. Запишем дифференциальные уравнения для определения функций $\psi_i(t)$:

$$\frac{d\psi_0}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y_0} = 0; \quad \frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y_1} = 0; \quad \frac{d\psi_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y_2} = -\psi_1. \quad (1.108)$$

Так как решения первых двух уравнений (1.108) представляют собой постоянные величины

$$\psi_0(t) = \text{const} = C_0; \quad \psi_1(t) = \text{const} = C_1,$$

то решение последнего уравнения имеет вид

$$\frac{d\psi_2}{dt} = -C_1; \quad \psi_2 = -C_1 t + C_2. \quad (1.109)$$

Функция $\psi_2 = C_2 - C_1 t$ при возрастании времени t от нуля до бесконечности изменяет знак не более одного раза. Поэтому оптимальное управление $u(t)$ будет представлять собой кусочно-постоянную функцию, состоящую из двух отрезков с ординатами $+1$, и -1 .

Следовательно, полученная оптимальная по быстродействию система представляет собой релейную САУ. Момент переключения управления с $u = +1$ на $u = -1$ определяется моментом изменения знака. При построении фазовых траекторий принимается, что управление имеет лишь значения $u = \pm 1$. Когда $u = +1$, изображающая

точка по параболическим фазовым траекториям $y_1 = \frac{y_2^2}{2} + C$ перемещается на фазовой плоскости снизу вверх, если $u = -1$ – изображающая

точка по параболическим фазовым траекториям $y_1 = -\frac{y_2^2}{2} + C$ движется сверху вниз.

Момент переключения t_s может вырабатываться также и с помощью ЦВМ. Найдем алгоритм такого устройства для рассматриваемого примера. Запишем уравнение линии переключения:

$$y_1 = -(\text{sign } y_2) \frac{y_2^2}{2} \quad \text{или} \quad y_1 + (\text{sign } y_2) \frac{y_2^2}{2} = 0,$$

и алгоритм, изменяющий знак управления u в зависимости от того, находится изображающая точка выше или ниже линии переключения на фазовой плоскости, может быть представлен следующим образом:

$$u = -\text{sign} \left[y_1 + (\text{sign } y_2) \frac{y_2^2}{2} \right].$$

Звено, вырабатывающее сигнал $\text{sign } y_2$, является обычным двухпозиционным реле с единичным уровнем выходного сигнала.

1.8. МЕТОД ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ БЕСПИЛОТНОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

1.8.1. Разработка метода программного управления

Покажем возможность формирования сигналов управления по имеющейся информации о векторе параметров состояния до момента прерывания и информации о требуемом состоянии, в которое надо перевести объект на момент восстановления функционирования СУ с учетом внешних возмущений, действующих на интервале $T_{\text{пр}}$.

Сформированное управление $u^*[kT]$ должно обеспечить перевод объекта из состояния с фазовыми координатами Y_0 в требуемое с координатами $Y_{\text{тр}}$ при выполнении условий обеспечения устойчивости и надежности.

В общем случае синтезируемый закон управления можно представить в следующем виде

$$u[kT] = \beta_{11} Y_1[kT] + \beta_{12} Y_2[kT] + \dots + \beta_{1n} Y_n[kT]. \quad (1.110)$$

Как известно [24], алгоритм для вычисления управляющих воздействий можно записать в виде:

$$\begin{bmatrix} u[0] \\ u[T] \\ \vdots \\ u[NT] \end{bmatrix} = -\sigma_{(n \times n)}^{(N)} Y[0]. \quad (1.111)$$

Фундаментальная матрица σ получается из уравнения

$$\sigma_{(n \times n)}^{(N)} = \begin{bmatrix} a(T); a(T)\Phi^{-1}(T); a(T)\Phi^{-2}(T); \dots; a(T)\Phi^{-(n-1)}(T) \end{bmatrix}. \quad (1.112)$$

В зависимости от числа независимых управляющих воздействий u из фундаментальной матрицы берут первые l строк, в которые и входят значения коэффициентов матрицы управления B_0 .

В общем случае матрица σ имеет размерность $n \times n$. Матрица B_0 может иметь N строк, но если число независимых управляющих воздействий равно единице, то при синтезе закона управления,

минимизирующего обобщенный квадратичный показатель качества вида

$$J_1 = \sum_{k=1}^N \left\{ Y^T[kT] Q Y[kT] + ru^2[(k-1)T] \right\}, \quad (1.113)$$

матрица B_0 принимает вид строки.

Вычисления управляющих воздействий на каждом шаге осуществляются перемножением вектора состояния $Y[kT]$ на матрицу $B_0(T)$. Это справедливо в том случае, если на каждом шаге известен вектор состояния. Но в рассматриваемом случае информация о векторе параметров состояния $Y[kT]$ на интервале $T_{\text{пр}}$ отсутствует. Известен лишь вектор $Y[0]$.

Таким образом, необходимо сформулировать управляющие воздействия в виде

$$u^* \left[kT^* \right] = B^* (T^*) Y[0]. \quad (1.114)$$

Данная постановка может быть справедлива при выполнении следующих допущений:

- на интервале $T_{\text{пр}}$ собственные параметры объекта отличаются от расчетных на величину не более допустимой;
- внешние возмущения, действующие на объект, могут быть идентифицированы и меняются по известному закону.

При выборе показателя качества остановимся на обобщенном квадратичном показателе по следующему принципу. Оценка свойств дискретной, оптимальной по минимуму числа шагов дискретности системы, показывает, что данная система не является грубой по отношению к отклонениям коэффициентов объекта от номинальных значений. Поэтому на практике отказываются от оптимального алгоритма. Одним из путей его уточнения является то, что для синтеза используется обобщенный квадратичный показатель, обеспечивающий требуемую грубость системы.

Итак, будем синтезировать алгоритм управления, минимизирующий показатель качества вида (1.113).

На первом этапе для упрощения процедуры синтеза будем считать, что возмущения равны нулю.

Преобразуем (1.113) с учетом того, что известен лишь вектор $Y[0]$, воспользовавшись уравнением параметров состояния [29]:

$$\begin{aligned}
Y[T] &= \Phi(T)Y[0] + H(T)u[0], \\
Y[2T] &= \Phi^2(T)Y[0] + \Phi(T)H(T)u[0] + H(T)u[T], \\
&\dots \\
Y[NT] &= \Phi^N(T)Y[0] + \sum_{k=0}^{N-1} \Phi^{N-(k+1)}(T)H(T)u[kT]. \quad (1.115)
\end{aligned}$$

Тогда (1.113) можно переписать с учетом (1.115) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
J_1 &= \left\{ \Phi^N(T)Y[0] + \sum_{k=0}^{N-1} \Phi^{N-(k+1)}(T)H(T)u[kT] \right\}^T \times \\
&\times Q \left\{ \Phi^N(T)Y[0] + \sum_{k=0}^{N-1} \Phi^{N-(k+1)}(T)H(T)u[kT] \right\} + ru^2[(N-1)T] + \dots + \\
&+ \{ \Phi(T)Y[0] + H(T)u[0] \}^T Q \{ \Phi(T)Y[0] + H(T)u[0] \} + ru^2[0] = \\
&= \left\{ Y^T[0]\Phi^{NT}(T) + \sum_{k=0}^{N-1} H^T(T)\Phi^{[N-(k+1)]T}(T)u[kT] \right\} \times \\
&\times Q \left\{ \Phi^N(T)Y[0] + \sum_{k=0}^{N-1} \Phi^{N-(k+1)}(T)H(T)u[kT] \right\} + ru^2[(N-1)T] + \dots + \\
&+ \{ Y^T[0]\Phi^T(T) + H^T(T)u[0] \} Q \{ \Phi(T)Y[0] + H(T)u[0] \} + ru^2[0] = \\
&= Y^T[0]\Phi^{NT}(T)Q\Phi^N(T)Y[0] + Y^T[0]\Phi^{NT}(T)Q \sum_{k=0}^{N-1} \Phi^{N-(k+1)}(T)H(T)u[kT] + \\
&+ \sum_{k=0}^{N-1} \Phi^{N-(k+1)}(T)H(T)u[kT] + \sum_{k=0}^{N-1} H^T(T)\Phi^{[N-(k+1)]T}(T)u[kT]Q\Phi^N(T)Y[0] + \\
&+ \sum_{k=0}^{N-1} H^T(T)\Phi^{[N-(k+1)]T}(T)u[kT]Q \sum_{k=0}^{N-1} \Phi^{N-(k+1)}(T)H(T)u[kT] + ru^2[(N-1)T] + \dots + \\
&+ Y^T[0]\Phi^T(T)Q\Phi(T)Y[0] + Y^T[0]\Phi^T(T)QH(T)u[0] + H^T(T)u[0]Q\Phi(T)Y[0] + \\
&+ H^T(T)u[0]QH(T)u[0] + ru^2[0] = \sum_{i=1}^N Y^T[0]\Phi^{iT}(T)Q\Phi^i(T)Y[0] + r \sum_{i=1}^N u^2[(i-1)T] + \\
&+ Y^T[0]\Phi^{NT}(T)Q \sum_{k=0}^{N-1} \Phi^{N-(k+1)}(T)H(T)u[kT] + \sum_{k=0}^{N-1} H^T(T)\Phi^{[N-(k+1)]T}(T)u[kT]Q \times \\
&\times Q \sum_{k=0}^{N-1} \Phi^{N-(k+1)}(T)H(T)u[kT] + \sum_{k=0}^{N-1} H^T(T)\Phi^{[N-(k+1)]T}(T)Qu[kT]\Phi^N(T)Y[0] + \dots + \\
&+ Y^T[0]\Phi^T(T)QH(T)u[0] + H^T(T)u[0]Q\Phi(T)Y[0] + H^T(T)u[0]QH(T)u[0]
\end{aligned} \quad (1.116)$$

Полученная система уравнений позволяет найти значения управляющих воздействий.

Преобразуем выражение (1.118) к более удобному виду на примере трехшагового алгоритма.

Обозначим второй член (1.117) через L . Тогда для $N = 3$ можно записать

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial u[0]} &= Y^T [0] \Phi^{3T}(T) Q \Phi^2(T) H(T) + Y^T [0] \Phi^{2T}(T) Q \Phi(T) H(T) + \\ &+ Y^T [0] \Phi^T(T) Q H(T); \\ \frac{\partial L}{\partial u[T]} &= Y^T [0] \Phi^{3T}(T) Q \Phi(T) H(T) + Y^T [0] \Phi^{2T}(T) Q H(T); \\ \frac{\partial L}{\partial u[2T]} &= Y^T [0] \Phi^{3T}(T) Q H(T). \end{aligned} \quad (1.119)$$

Для N -шагового алгоритма выражение примет вид

$$\frac{\partial L}{\partial u[(k-1)T]} = \sum_{k=0}^{N-i} Y^T [0] \Phi^{(N-k)T}(T) Q \Phi^{N-(k+i)}(T), \quad i = \overline{1, N}. \quad (1.120)$$

Обозначим остальные слагаемые (1.118) соответственно через M , P , S . Тогда выражения для частных производных можно представить следующим образом:

$$\frac{\partial M}{\partial u[(k-1)T]} = \sum_{k=0}^{N-i} H^T [T] \Phi^{(N-k)T}(T) Q \Phi^{N-k}(T) Y [0], \quad i = \overline{1, N}, \quad k = \overline{1, N},$$

$$\frac{\partial P}{\partial u[(k-1)T]} = 2 \sum_{n=0}^{N-\eta} H [T] \Phi^{[N-j-\mu]}(T) Q \Phi^{N-(n+\eta)}(T) H [T] u [nT],$$

$$j = \overline{1, N}, \quad \mu = \overline{0, N-j}, \quad k = \overline{1, N}, \quad \eta = \overline{1, N-j+1},$$

$$\frac{\partial S}{\partial u[(k-1)T]} = 2ru [nT], \quad j = \overline{1, N}, \quad k = \overline{1, N}.$$

(1.121)

Из полученных зависимостей можно окончательно записать систему уравнений для нахождения управляющих воздействий на N шагах уравнения для системы любого порядка:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J_1}{\partial u[(k-1)T]} &= \sum_{k=0}^{N-i} Y^T [0] \Phi^{(N-k)T} (T) Q \Phi^{N-(k+i)T} (T) H(T) + \\
&+ \sum_{k=0}^{N-i} H^T (T) \Phi^{[N-(k+i)T]} (T) Q \Phi^{N-k} (T) Y [0] + \\
&+ 2 \sum_{n=0}^{N-\eta} H^T (T) \Phi^{(N-j-\mu)T} (T) Q \Phi^{N-(n+\eta)} (T) u[nT] + 2ru[nT], \\
j &= \overline{1, N}, \quad \mu = \overline{0, N-j}, \quad \eta = \overline{1, N-j+1}, \quad n = \overline{0, N-1}. \quad (1.122)
\end{aligned}$$

Данная система уравнений позволяет получить значения управляющих воздействий при известном начальном векторе состояния системы, а также рассчитать величины матриц переходных процессов и весовых коэффициентов.

1.8.2. Методика синтеза алгоритма оптимального программного управления

Предлагаемую методику формирования управляющих воздействий рассмотрим на примере синтеза двухшагового алгоритма. Критерий оптимальности примет следующий вид:

$$J_2 = Y^T [2T] Q Y [2T] + ru^2 [t] + Y^T [T] Q Y [T] + ru^2 [0]. \quad (1.123)$$

Учитывая приведенные выше рекуррентные соотношения, можно его переписать:

$$\begin{aligned}
J_2 &= Y^T [0] \Phi^{2T} [T] Q \Phi^2 [T] Y [0] + Y^T [0] \Phi^{2T} [T] Q \Phi [T] H(T) u [0] + \\
&+ Y^T [0] \Phi^{2T} [T] Q H(T) u [T] + H^T (T) \Phi^T [T] Q \Phi^2 [T] Y [0] \mu [0] + \\
&+ H^T (T) Q \Phi [T] H(T) u [0] \mu [T] + H^T (T) Q H(T) u^2 [T] + ru^2 [T] + \\
&+ Y^T [0] \Phi^T [T] Q \Phi [T] Y [0] + Y^T [0] \Phi^T [T] Q H(T) u [0] + \\
&+ H^T (T) Q \Phi [T] Y [0] \mu [0] + H^T (T) Q H(T) u^2 [0] + ru^2 [0]. \quad (1.124)
\end{aligned}$$

Взяв частные производные по $u[0]$ и $u[T]$, получим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J_2}{\partial u[0]} &= Y^T [0] \Phi^{2T} [T] Q \Phi [T] H [T] + H^T (T) \Phi^T [T] Q \Phi^2 [T] Y [0] + \\
&+ 2H^T (T) \Phi^T [T] Q \Phi [T] H(T) u [0] + H^T (T) Q \Phi [T] H(T) u [T] + \\
&+ Y^T [0] \Phi^T [T] Q H [T] + H^T (T) Q \Phi [T] Y [0] + 2ru [0] + \\
&+ 2H^T (T) Q H [T] \mu [0] + H^T (T) \Phi^T [T] Q H(T) u [T]. \quad (1.125)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_2}{\partial u[T]} &= Y^T[0]\Phi^{2T}[T]QH[T] + H^T(T)Q\Phi^2[T]Y[0] + \\ &+ H^T(T)\Phi^T[T]QH(T)u[0] + 2H(T)QH[T]u[T] + 2ru[T]. \end{aligned} \quad (1.126)$$

Можно показать, что

$$\begin{aligned} Y^T[0]\Phi^{2T}[T]Q\Phi[T]H[T] &= H^T(T)\Phi^T[T]Q\Phi^2[T]Y[0]; \\ H^T(T)Q\Phi(T)H[T] &= H^T(T)\Phi^T[T]QH[T]; \\ Y^T[0]\Phi^T[T]QH[T] &= H^T(T)Q\Phi[T]Y[0]; \\ Y^T[0]\Phi^{2T}[T]QH[T] &= H^T(T)Q\Phi^2[T]Y[0]. \end{aligned} \quad (1.127)$$

Приравняв производные (1.125), (1.126) нулю и введя некоторые обозначения, получим

$$\begin{cases} D_1Y[0] + D_2u[0] + D_3u[T] + D_4Y[0] + D_5u[0] + ru[0] = 0; \\ D_6Y[0] + D_3u[0] + D_5u[T] + ru[T] = 0, \end{cases} \quad (1.128)$$

где

$$\begin{aligned} D_1 &= H^T(T)\Phi^T[T]Q\Phi^2[T]; \\ D_2 &= H^T(T)\Phi^T[T]Q\Phi[T]H(T); \\ D_3 &= H^T(T)\Phi^T[T]QH[T]; \\ D_4 &= H^T(T)Q\Phi[T]; \\ D_5 &= H^T(T)QH[T]; \\ D_6 &= H^T(T)Q\Phi^{2T}[T]. \end{aligned} \quad (1.129)$$

Выразим из второго уравнения (1.128) $u[T]$:

$$u[T] = -\{D_4u[0] + D_6Y[0]\}[D_5 + r]^{-1}. \quad (1.130)$$

Решая систему (1.128) относительно $u[0]$, получим

$$u[0] = -BY[0], \quad (1.131)$$

где

$$B = \left[D_2D_5 + rD_2 - D_3^2 + D_5^2 + 2rD_5 + r^2 \right]^{-1} [D_1D_5 + rD_1 - D_3D_6 + D_4D_5 + rD_4]. \quad (1.132)$$

Выражение (1.130) позволяет получить значения управляющих воздействий на возможный интервал прерывания.

1.8.3. Методика разработки алгоритма оптимального программного управления с учетом возмущений

Напомним, что задача синтеза управления при наличии прерывания в функционировании СУ имеет смысл в том случае, если удастся провести идентификацию внешних возмущений, действующих на объект на интервале прерывания.

Причины возмущений, оказывающих влияние на объект, следующие:

- смещение центра масс относительно его оси;
- несоосность элементов двигателя;
- неточность приведения элементов двигательной установки в нулевое положение, обусловленная работой шагового двигателя.

В настоящее время трудно выделить единый метод идентификации возмущений. В ряде работ [1, 4, 8 – 12] приводится анализ возможных методов.

Остановимся на методике, позволяющей получить численные значения возмущающих воздействий.

Математическая модель движения объекта может быть представлена следующей системой линейных дифференциальных уравнений при условии, что на данном участке траектории упругими колебаниями корпуса можно пренебречь:

$$\begin{aligned} \dot{V}_z &= -c_{V_z V_z} V_z(t) - c_{V_z \Psi} \Psi(t) - c_{V_z \delta} \delta(t) + \bar{F}(t); \\ \ddot{\Psi}(t) &= -c_{\Psi \Psi} \dot{\Psi}(t) - c_{\Psi \delta} \delta(t) + \bar{M}(t); \\ \ddot{\delta}(t) &= -\frac{2\xi}{T_{\text{РП}}} \dot{\delta}(t) - \frac{1}{T_{\text{РП}}^2} \delta(t) + \frac{K_{\text{РП}}}{T_{\text{РП}}^2} \upsilon(t). \end{aligned} \quad (1.133)$$

В соответствии с работой [21] идентификация может быть проведена следующим образом.

Перепишем (1.133) в векторно-матричной форме:

$$\ddot{Y}(t) = a_1(t)\dot{Y}(t) + a_0(t)Y(t) + b_0 \upsilon(t) + b_1 F(t), \quad (1.134)$$

где

$$a_1(t) = \begin{bmatrix} 0 & c_{V_z V_z} & 0 \\ 0 & c_{\psi \dot{\psi}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2\xi}{T_{\text{РП}}} \end{bmatrix}; \quad a_0(t) = \begin{bmatrix} 0 & c_{V_z V_z} & c_{V_z \delta} \\ 0 & 0 & c_{\psi \delta} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_{\text{РП}}^2} \end{bmatrix};$$

$$b_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_{\text{РП}}}{T_{\text{РП}}^2} \end{bmatrix}; \quad b_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда, преобразуя выражение (1.134), можно записать

$$\dot{Y}(t) = E(t)Y(t) + A(t)U(t) + C(t)F(t), \quad (1.135)$$

как следует из работы [24], решение данной системы может быть представлено в следующем виде:

$$Y[(n+1)T] = \Phi(t)Y(nT) + H(T)U(nT) + \Gamma(t)F(nT), \quad (1.136)$$

тогда, опуская промежуточные преобразования, из выражения (1.135) можно получить следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} z[(n+1)T] &= z[nT] + T\dot{z}[nT] + \frac{1}{2}T^2\ddot{z}[nT]; \\ \psi[(n+1)T] &= \psi[nT] + T\dot{\psi}[nT] + \frac{1}{2}T^2\ddot{\psi}[nT]; \\ \delta[(n+1)T] &= \delta[nT] + T\dot{\delta}[nT] + \frac{1}{2}T^2\frac{K_{\text{РП}}}{T_{\text{РП}}^2}U[nT]; \\ \dot{\delta}[(n+1)T] &= -\frac{T}{T_{\text{РП}}^2}\delta[nT] + \dot{\delta}[nT] - 2\xi\frac{T}{T_{\text{РП}}}\dot{\delta}[nT] + \\ &+ U[nT]\left(T\frac{K_{\text{РП}}}{T_{\text{РП}}^2} - \xi T^2\frac{K_{\text{РП}}}{T_{\text{РП}}^3}\right). \end{aligned} \quad (1.137)$$

При условии, что в процессе полета фазовые координаты $\dot{z}[nT]$, $\psi[nT]$, $\dot{\psi}[nT]$ изменяются, а также вычисляются координата $z[nT]$ и управление $U[nT]$, формируемое в БЦВМ, оценки внешних возмущений могут получены из (1.135) в следующем виде:

$$\begin{aligned}\bar{F}[nT] &= \frac{2}{T^2} \{z[(n+1)T] - z[nT] - T\dot{z}[nT]\}, \\ \bar{M}[nT] &= \frac{2}{T^2} \{\psi[(n+1)T] - \psi[nT] - T\dot{\psi}[nT]\}.\end{aligned}\quad (1.138)$$

Данная методика имеет один существенный недостаток. Оценка возмущений может быть получена при наличии дополнительных датчиков, которые не всегда имеют место.

Рассмотрим методику идентификации возмущений при отсутствии дополнительных измерений.

Вернемся к алгебраической форме записи.

Состояние объекта может быть описано следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned}V_z[(k+1)T] &= a_{11}V_z[kT] + a_{12}\psi[kT] + a_{13}\dot{\psi}[kT] + a_{14}\delta[kT] + \\ &+ h_{11}U[kT] + \Gamma_{11}F[kT] + \Gamma_{12}M[kT]; \\ \psi[(k+1)T] &= a_{21}V_z[kT] + a_{22}\psi[kT] + a_{23}\dot{\psi}[kT] + a_{24}\delta[kT] + \\ &+ h_{31}U[kT] + \Gamma_{22}M[kT]; \\ \dot{\psi}[(k+1)T] &= a_{31}V_z[kT] + a_{32}\psi[kT] + a_{33}\dot{\psi}[kT] + a_{34}\delta[kT] + \\ &+ h_{31}U[kT] + \Gamma_{31}F[kT] + \Gamma_{32}M[kT]; \\ \delta[(k+1)T] &= a_{44}V_z[kT] + h_{41}U[kT] + \Gamma_{41}F[kT] + \Gamma_{42}M[kT].\end{aligned}\quad (1.139)$$

Неизвестными в данной системе являются значения $\dot{\psi}[kT]$, $\psi[(k+1)T]$, $F[kT]$, $M[kT]$, $\delta[(k+1)T]$.

Чтобы получить значения неизвестных, добавим к выражению (1.139) два уравнения, полученных на предыдущем шаге дискретности:

$$\begin{aligned}V_z[kT] &= a_{11}V_z[(k-1)T] + a_{12}\psi[(k-1)T] + a_{13}\dot{\psi}[(k-1)T] + a_{14}\delta[(k-1)T] + \\ &+ \Gamma_{11}F(T) + \Gamma_{12}M(T) + h_{11}U[(k-1)T]; \\ \psi[kT] &= a_{21}V_z[(k-1)T] + a_{22}\psi[(k-1)T] + a_{23}\dot{\psi}[(k-1)T] + a_{24}\delta[(k-1)T] + \\ &+ \Gamma_{21}F(T) + \Gamma_{22}M(T) + h_{21}U[(k-1)T].\end{aligned}\quad (1.140)$$

Введем следующие обозначения:

$$B = \begin{bmatrix} V_z[(k+1)T] - a_{11}V_z[kT] - a_{12}\psi[kT] - a_{14}\delta[kT] + h_{11}U[kT] \\ \psi[(k+1)T] - a_{21}V_z[kT] - a_{22}\psi[kT] - a_{24}\delta[kT] - h_{21}U[kT] \\ - a_{31}V_z[kT] - a_{32}\psi[kT] - a_{34}\delta[kT] - h_{31}U[kT] \\ - a_{44}\delta[kT] - h_{41}U[kT] \\ V_z[kT] - a_{11}V_z[(k-1)T] - a_{12}\psi[(k-1)T] - a_{14}\delta[(k-1)T] + h_{11}U[(k-1)T] \\ \psi[kT] - a_{21}V_z[(k-1)T] - a_{22}\psi[(k-1)T] - a_{24}\delta[(k-1)T] - h_{21}U[(k-1)T] \end{bmatrix};$$

$$\Phi^* = \begin{bmatrix} a_{13} & 0 & \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & 0 & 0 \\ a_{23} & 0 & \Gamma_{12} & \Gamma_{22} & 0 & 0 \\ a_{33} & -1 & \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_{41} & \Gamma_{42} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & 0 & a_{23} \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} \psi[kT] \\ \psi[(k+1)T] \\ F[kT] \\ M[kT] \\ \delta[(k+1)T] \\ \psi[(k-1)T] \end{bmatrix}.$$

Отсюда могут быть найдены значения неизвестной матрицы X путем решения матричного уравнения:

$$\Phi^* X = B. \quad (1.141)$$

Значения возмущений, входящих в X , могут быть получены решением уравнения (1.141):

$$X = \Phi^{*-1} B. \quad (1.142)$$

Таким образом, приведенные выше зависимости показывают возможность идентификации внешних возмущений, действующих на объект на внеатмосферном участке как при наличии дополнительных измерений, так и без них. Учитывая природу возмущений, их можно экстраполировать на возможный интервал прерывания и тем самым строить алгоритм программного управления с учетом имеющихся место возмущений.

Дополнительно к этому расширим задачу.

Рассмотрим случай, когда требуемое конечное состояние, в которое должен быть переведен объект, известно заранее.

Введем в рассмотрение вектор $Y_{\text{ТР}}$, характеризующий конечное состояние объекта.

Тогда критерий оптимальности примет вид

$$J = \sum_{k=1}^N \{Y[kT] - Y_{\text{ТР}}\}^T Q (Y[kT] - Y_{\text{ТР}}) + ru^2[(k-1)T], \quad (1.143)$$

где $Y_{\text{ТР}}$ – терминальный член, характеризующий требуемое состояние, в которое должен быть переведен объект.

Перепишем исходную систему уравнений с учетом идентифицированных возмущений:

$$\begin{aligned}
 Y[T] &= \Phi(T)Y[0] + H(T)U[0] + \Gamma(T)F[0]; \\
 Y[2T] &= \Phi^2(T)Y[0] + \Phi(T)H(T)U[0] + \Phi(T)\Gamma(T)F[0] + \\
 &+ H(T)U[T] + \Gamma(T)F[T] \\
 &\cdot \quad \cdot \\
 Y[NT] &= \Phi^N(T)Y[0] + \sum_{k=0}^{N-1} \Phi^{N-k-1}(T)H(T)U[kT] + \\
 &+ \sum_{k=0}^{N-1} \Phi^{N-k-1}(T)\Gamma(T)F[kT]. \tag{1.144}
 \end{aligned}$$

Опуская выкладки, аналогичные приведенным выше, запишем окончательное выражение для системы уравнений формирования управляющих воздействий:

$$\begin{aligned}
 &\sum_{k=0}^{N-i} Y[0] \Phi^{(N-k)T}(T) Q \Phi^{N-(k+i)}(T) H(T) + \\
 &+ \sum_{k=0}^{N-i} H^T(T) \Phi^{[N-(k+i)T]}(T) Q \Phi^{N-k}(T) Y[0] + \\
 &+ 2 \sum_{n=0}^{N-\eta} H^T(T) \Phi^{(N-j-\mu)T}(T) Q \Phi^{N-(n+\eta)}(T) H(T) u[nT] + \\
 &+ 2 \sum_{n=0}^{N-\eta} H^T(T) \Phi^{(N-j-\mu)T}(T) Q \Phi^{N-(n+\eta)}(T) \Gamma(T) F(nT) - \\
 &- 2 \sum_{j=N-1}^k H^T(T) \Phi^{[j-k]T}(T) Y_{\text{ТР}}(T) + 2ru[nT] = 0, \\
 &i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, N}, \quad \mu = \overline{0, N-j}, \quad \eta = \overline{1, N-j+1}, \quad n = \overline{0, N-1}. \tag{1.145}
 \end{aligned}$$

Преобразуя (1.145), получим алгоритм управления в следующем виде:

$$U = -A^{-1}B, \tag{1.146}$$

где

$$\begin{aligned}
B &= B_1 Y[0] + B_2 F[nT] - B_3 Y_{\text{TP}}; \\
B_1 &= \sum_{k=0}^{N-\eta} H^T(T) \Phi^{[N-(k+i)]T}(T) Q \Phi^{N-k}(T); \\
B_2 &= \sum_{n=0}^{N-\eta} H^T(T) \Phi^{[N-(J+\mu)]T}(T) Q \Phi^{N-(n+\eta)}(T) \Gamma(T); \\
B_3 &= \sum_{j=N-1}^k H^T(T) \Phi^{(j-k)T}(T); \\
A &= \sum_{n=0}^{N-\eta} H^T(T) \Phi^{[N-(J+\mu)]T}(T) Q \Phi^{N-(n+\eta)}(T) H(T) + r; \\
j &= \overline{1, N}, \quad \mu = \overline{0, N-j}, \quad \eta = \overline{1, N-j+1}.
\end{aligned}$$

Значения матриц B_1 , B_2 , B_3 и A определяются после расчетов матриц переходных процессов $H(T)$, качества Q , возмущений $\Gamma(T)$ и переходной матрицы $\Phi(T)$.

Параметры T_0^* и $r^*(T_0^*)$ определяются путем поиска экстремума $r^*(T_0^*)$ в соответствии с формулой [24]

$$\max r^*(T_0^*) = \max f(B_{11}^*, Q, H(T_0), \Phi(T_0)).$$

Как видно из выражения, матрицы $B_1 - B_3$, A зависят лишь от свойств самого объекта и рассчитываются исходя из значений коэффициентов системы дифференциальных уравнений, описывающих движение объекта. Следовательно, их расчет может быть проведен заранее на этапе проектирования, а необходимые значения записаны в память БЦВМ. В процессе полета решается задача идентификации внешних возмущений. Окончательная процедура выработки управляющих воздействий будет определяться конкретным количеством необходимых управляющих воздействий.

2. АНАЛИЗ ПОДХОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ АЛГОРИТМОВ СТАБИЛИЗАЦИИ

Весь процесс функционирования системы разделяют на два основных режима – переходный и установившийся, каждый из них характеризуется своими определенными показателями (рис. 2.1).

Переходный режим функционирования системы отображает процесс включения системы и обработки входного сигнала до момента времени $t_{\text{рег}}$.

Время регулирования $t_{\text{рег}}$ – это время, за которое выходная величина $y(t)$ (переходный процесс) достигает своего установившегося значения (или входного сигнала $x(t)$) или не отличается от него на 5...10%.

Величина динамической ошибки системы $\varepsilon(t) = x(t) - y(t)$ характеризует в каждый момент времени точность обработки входного сигнала, в переходном режиме является переменной величиной. Поэтому применяют квадратичную интегральную оценку качества:

$$J = \int_0^t \varepsilon^2(t) dt. \quad (2.1)$$

Применение конкретной интегральной оценки качества зависит от вида переходных процессов, требований, предъявляемых к системе, они чаще применяются при синтезе специальных оптимальных систем.

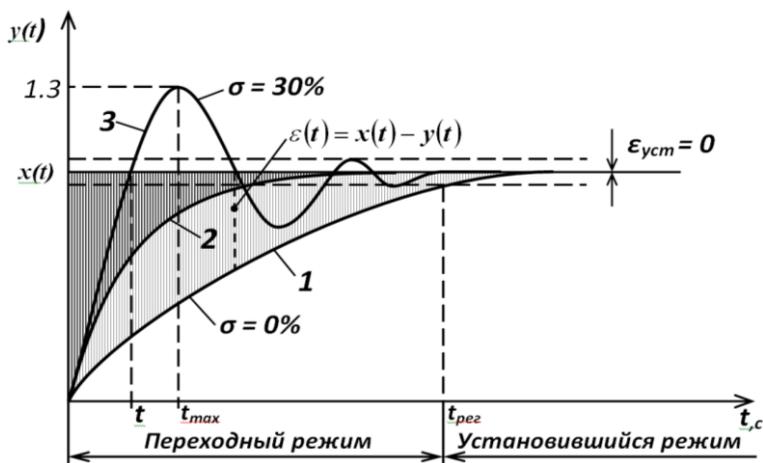


Рис. 2.1. Переходные характеристики систем

В теории оптимального управления в качестве критерия оптимальности используется функционал – переменная величина (большое прикладное значение имеет определенный интеграл), которая зависит от значений функции качества $\varphi(t)$ некоторого класса, т.е. является функцией от функции, минимум или максимум которой надо обеспечить оптимальным управлением [5].

Критерии оптимальности обычно определяются в виде функционала, часто в виде определенного интеграла J от функции качества $\varphi(t)$:

$$J_{\text{extr}} = \int_{t_0}^{t_k} \varphi(x, u, \dots) dt, \quad (2.2)$$

где J_{extr} – числовая величина, зависящая от функции качества $\varphi(x, u, \dots)$, является оператором, отображающим пространство функций в числовом множестве, т.е. функцией, у которой аргументом является функция качества; $\varphi(x, u, \dots)$ – функция качества, целевая функция, зависящая от вектора состояния системы x , вектора управления u , времени управления $T = t_k - t_0$ и других переменных.

В процессе синтеза САУ военного назначения в зависимости от предназначения системы используют следующие критерии оптимальности.

1. Критерий точности $J_{\text{min}}^\varepsilon$, обеспечивает минимизацию ошибки в достижении целей функционирования системы:

$$J_{\text{min}}^\varepsilon = \int_{t_0}^{t_k} \varphi[x(t_k) - x(t_0)] dt; \int_{t_0}^{t_k} \varphi(\varepsilon) dt \rightarrow \varepsilon_{\text{min}}. \quad (2.3)$$

Аналогично задается критерий точности, обеспечивающий минимизацию среднеквадратической ошибки:

$$J_{\text{min}}^{\varepsilon^2} = \int_{t_0}^{t_k} \varphi[x(t_k) - x(t_0)]^2 dt. \quad (2.4)$$

2. Критерий быстродействия J_{min}^t , обеспечивает минимизацию времени достижения целей функционирования системы:

$$J_{\text{min}}^t = \int_{t_0}^{t_k} 1(t) dt, \quad (2.5)$$

где $\varphi(x, u) \equiv 1(t)$ – наиболее простая функция качества, имеющая важное прикладное значения.

3. Критерий расхода энергии, обеспечивает минимизацию расхода энергии для достижения целей функционирования системы:

$$J_{\text{min}}^{\delta} = \int_{t_0}^{t_k} \delta^2(t) dt, \quad (2.6)$$

где $u(t)$ – текущая величина управляющего сигнала для достижения целей функционирования системы.

4. Критерий расхода топлива (рабочего тела), обеспечивает минимизацию расхода топлива на достижения целей функционирования системы:

$$J_{\min} = T \int_{t_0}^{t_k} [m_T(t_k) - m_T(t_0)] dt \int_{t_0}^{t_k} \Delta m(T) dt, \quad (2.7)$$

где $m_T(t_0), m_T(t_k)$ – масса топлива в начальный момент времени t_0 и выключение двигателя t_k , т.е. расход топлива.

Система, синтезируемая по одному из критериев оптимальности, будет лучшей в соответствии с требованиями данного критерия, однако может оказаться не лучшей по другим свойствам, т.е. не оптимальной по другим показателям качества.

3. СИНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ СИНТЕЗА РЕГУЛЯТОРОВ ДВИЖЕНИЯ

«Синергетика (гр. *synergetikos* – совместный, согласованно действующий) – область научных исследований, целью которых является выявление общих закономерностей в процессах образования, устойчивости и разрушения упорядоченных временных и простейших структур в сложных неравновесных системах различной природы» [25]. Основной постулат теории самоорганизации заключается в том, что только диссипативные системы, обменивающиеся с окружающей средой веществом, энергией и информацией, могут развиваться и самоорганизовываться. Основными необходимыми условиями процесса самоорганизации являются нелинейность, незамкнутость и неравновесность.

Когда Г. Хакена, как одного из основателей синергетики, попросили назвать ключевые положения этой науки, он перечислил их в следующем порядке:

1. Исследуемые системы состоят из нескольких или многих одинаковых или разнородных частей, которые находятся во взаимодействии друг с другом.
2. Эти системы являются нелинейными.
3. При рассмотрении речь идет об открытых системах, далеких от равновесия.
4. Эти системы подвержены внутренним и внешним колебаниям.
5. Системы могут стать нестабильными.
6. Происходят качественные изменения.
7. В этих системах обнаруживаются эмерджентные (т.е. вновь возникшие) новые качества.
8. Возникают пространственные, временные, пространственно-временные или функциональные структуры.
9. Структуры могут быть упорядоченными или хаотичными.
10. Во многих случаях возможна математизация.

В приведенных выше десяти положениях Хакену действительно удалось в весьма лаконичной форме выразить основное содержание синергетики. Хакен прежде всего подчеркивает, что части систем взаимодействуют друг с другом. Он выделяет истоки, которые приводят к образованию новых систем. Обычно рассуждают так: сложное возникает из простого, но ведь это непостижимо. Основополагающий системный фактор состоит не в хаотичности, а во взаимодействии, в динамике.

Важнейшим концептом синергетики является нелинейность. В синергетике основное внимание уделяется изучению нелинейных математических уравнений, т.е. уравнений, содержащих искомые величины в степенях, не равных 1, или коэффициенты, зависящие от среды. Линейность абсолютизирует поступательность, безальтернативность, торжество постоянства. Нелинейность фиксирует непостоянство, многообразие, неустойчивость, отход от положений равновесия, случайности, точки ветвления процессов, бифуркации.

Точкой бифуркации называют состояние максимальной хаотичности неравновесного процесса (от лат. *bifurcus* – раздвоенный). Благодаря хаотичности дальнейшее разветвление неравновесного процесса имеет не один путь движения, а множество возможных путей из зоны ветвления, т.е. из точки бифуркации. Состояние бифуркации можно уподобить положению шарика на выпуклой поверхности, типа сферической, которое является неустойчивым.

Любое влияние может вывести шарик из неустойчивого состояния, и он начнет скатываться сверху вниз. По какой траектории он будет скатываться из точки бифуркации – угадать точно нельзя. Это – случайный процесс.

Имея дело с открытыми (имеющими источники и стоки энергии) нелинейными системами, синергетика утверждает, что мир возникает в результате самопроизвольных и самоорганизующихся механизмов. В их основе лежит единая симметрия форм в живой и неживой природе. Синергетика объясняет, почему образуются именно эти структуры. Она обосновывает положение, согласно которому подобные структуры являются структурами эволюционными. Функциональная общность процессов самоорганизации систем, их устойчивость поддерживаются законами ритма.

Иначе говоря, система в состоянии равновесия «слепа», а в неравновесных условиях она «воспринимает» различия внешнего мира и «учитывает» их в своем функционировании. Срабатывает эффект бумеранга, который ускоряет протекание процессов. Синергетика, как правило, имеет дело с открытыми системами, далекими от равновесия. Открытость системы означает наличие в ней источников и стоков, например энергии и информации. Чтобы система образовалась, необходим соответствующий динамический источник, который как раз и выступает организующим началом. Без подвода вещества и энергии организмы вымирают, без подвода газа не горит пламя в газовой горелке; безжизненной оказывается любая социальная система, обесточенная в информационном отношении. Там, где наступает равновесие, самоорганизация прекращается.

Самоорганизующиеся системы подвержены колебаниям. Именно в колебаниях система движется к относительно устойчивым структурам. Нелинейные уравнения, как правило, описывают колебательные процессы. Теория колебаний важна не только в радиотехнических, но и в любых других системных процессах.

Если параметры системы достигают критических значений, то система попадает в состояние неравновесности и неустойчивости. Именно в силу этого происходят качественные изменения и, следовательно, возникают новые качества, своеобразный режим с обострением. Новое возникает быстро. И, как правило, под воздействием легких бифуркационных возмущений. Как часто ученые, анализирующие генезис биологических и социальных систем, ведут поиск глобальных факторов, мощных и объемных. Но вполне возможно, что существенные изменения явились результатом малых возмущений, которые привели систему в резонансное состояние. Развитие идет через неустойчивость и часто посредством малых возбуждений.

В этой связи и возникает фундаментальная проблема нелинейного системного синтеза, а именно: на основе известных естественных или искусственных (желаемых) закономерностей – инвариантов, отражающих соответствующие нелинейные взаимодействия, синтезировать новые, системные законы, позволяющие существенно расширить знание о соответствующей предметной области. Системные законы имеют динамическую природу, что принципиально отличает их от известных «законов сохранения» физики, являющихся, как правило, статическими, т.е. описываемыми лишь стационарные движения. Это означает, что системные законы включают в себя дополнительные, динамические компоненты, которые «исчезают» на стационарном движении, т.е. не наблюдаются. В этом свойстве и проявляется латентный (скрытый) характер системных законов, что ведет к возникновению неожиданных физических явлений. Отсюда вытекает возможность предсказания новых явлений и свойств соответствующих систем и, следовательно, выявления перспектив переноса естественных закономерностей на искусственные управляемые системы, обладающие принципиально новыми динамическими свойствами.

Синергетический подход в науке во многом напоминает классический системный подход, а сама синергетика имеет важные точки соприкосновения с общей теорией систем. Для синергетики, как и для теории систем, важны не поверхностные аналогии между явлениями различной природы, а достаточно строгое соответствие между всеми элементами сравниваемых систем. Такое требование означает поиск математически изоморфных законов различной физической (химической, биологической) природы. Общая теория систем изучает системы самого различно-

го характера – концептуальные, материальные, слабо и сильно структурированные и т.д., в то время как для синергетики основным предметом исследования является самостоятельная междисциплинарная область самоорганизующихся систем. В синергетическом подходе, в отличие от общесистемного, изучаются конкретные принципы и механизмы самоструктурирования естественных и технических систем. Иначе говоря, в отличие от общей теории систем, синергетика сосредоточивает свое внимание на кооперативных, когерентных и самосогласованных процессах, возникающих в сложных нелинейных системах. Необходимо также отметить, что как для общей теории систем и кибернетики, так и для синергетики объединяющим понятием является понятие системы. В синергетическом же подходе, помимо формирования общей системной концепции – самоорганизации, обязательно учитывается конкретное физическое содержание рассматриваемых явлений и процессов. Подчеркнем два фундаментальных свойства синергетических систем – это, во-первых, обязательный обмен с внешней средой энергией, веществом и информацией и, во-вторых, неперенное взаимодействие, т.е. когерентность поведения между компонентами системы.

Дело, однако, заключается в том, что для эффективного применения идей синергетики в проблемах системного синтеза причинного способа самоорганизации было явно недостаточно и требовался новый принципиальный шаг в понимании сущности процессов управления и самоуправления в синергетике. Новизна заключалась в переходе от непредсказуемого поведения системы по алгоритму диссипативной структуры к направленному движению вдоль желаемых инвариантных многообразий (ИМ) – аттракторов (от лат. *attrahere* – притягивать), к которым подстраиваются все другие переменные динамической системы. Это уже способ направленной самоорганизации синтезируемых систем. При таком подходе цель – аттрактор – определяет сущность процесса, а его истинное понимание состоит в самоуправлении и направленной самоорганизации в соответствии с поставленной целью. С информационной точки зрения этот способ отражает процесс рецепции информации, что на языке теории динамических систем означает перевод соответствующей системы в определенное конечное состояние независимо от ее прежнего состояния. В свойстве самоуправления и направленной самоорганизации нелинейных систем проявляется новый взгляд на проблему системного синтеза, видна тенденция перехода от классических методов кибернетики к современным идеям синергетики. Такой подход позволил создать новую синергетическую теорию управления (СТУ), имеющую глубокое естественнонаучное обоснование как приложение принципов самоорганизации в проблемах управления [3 – 14].

Основные особенности СТУ применительно к проблеме системного синтеза состоят, во-первых, в кардинальном изменении целей поведения синтезируемых систем; во-вторых, в непосредственном учете естественных свойств нелинейных объектов; и, в-третьих, в формировании нового механизма генерации ОС, т.е. законов управления. Конкретно суть этих нововведений состоит в следующем:

- целью функционирования синтезируемых систем является достижение целевых аттракторов – асимптотических пределов в их пространстве состояний, отражающих желаемые технологические режимы систем;
- целевые аттракторы и ИМ отражают физическую сущность процессов, протекающих в соответствующем объекте. Эти многообразия формируются на основе желаемых технологических инвариантов;
- введение в процедуру синтеза ИМ позволяет построить регулярный механизм аналитической генерации естественной совокупности отрицательных и положительных ОС, которые формируют процессы направленной самоорганизации в синтезируемых системах (рис. 3.1).

Стратегия управления направленными процессами самоорганизации в синтезируемых диссипативных системах состоит в формировании и поддержании внешне и внутрисистемных динамических инвариантов. В зависимости от поставленных целей вводимые инварианты могут быть постоянными или изменяющимися, что соответственно означает стабилизацию динамического режима системы или же переход ее в новое динамическое состояние. В первом случае, говоря биологическим языком, системные инварианты реализуют «стабилизирующий», а во втором – «динамический» отборы. Другими словами, целенаправленное формирование динамических инвариантов позволяет осуществить направленный способ самоорганизации систем.

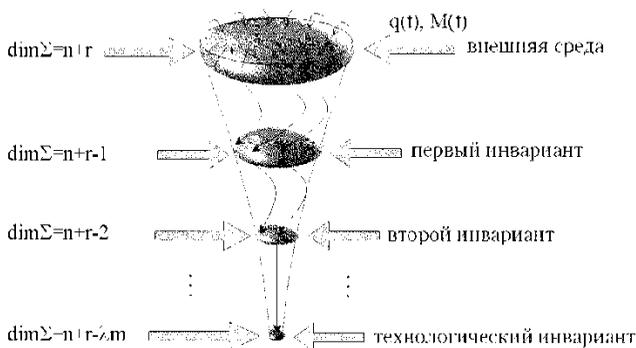


Рис. 3.1. Принцип «расширения–сжатия» пространства состояний систем

Для применения идей синергетики в теории управления необходимо выдержать концептуальное соответствие основным свойствам самоорганизации: нелинейность–открытость–когерентность. Из них первостепенным в концептуальном плане для задач управления является открытость систем.

В соответствии с теорией АКАР законы управления обеспечивают обязательный перевод ИТ-системы из произвольного начального состояния в окрестность заданного многообразия $\Psi_S = 0$ или пересечения многообразий $\Psi_S = 0$. Размерность подпространства этих многообразий, куда попадет ИТ в результате действия указанных законов управления, равна $n - 1$ – для скалярного или $n - m$ – для векторного управлений соответственно. Выше была установлена тесная связь многообразий и с инвариантными соотношениями в механике, технике и вообще в естествознании.

Возникает важный вопрос о направлении и свойствах дальнейшего движения ИТ вдоль указанных многообразий под действием синтезируемых управлений. Другими словами, необходимо разработать общий принцип такого деформирования фазового пространства динамической системы под действием внутренних управлений, при котором ИТ могла бы пройти «вглубь» подпространства многообразий или с последующим попаданием в начало координат или на заданное финишное многообразие согласно основной задаче управления.

В предыдущих разделах уже обсуждалась постановка основной задачи синтеза замкнутой системы, которая в общем виде обычно ставится как определение такого закона управления в функции координат состояния, который переводит изображающую точку (ИТ) объекта n -го порядка произвольного начального состояния x_{i0} , $i = 1, \dots, n$ в заданное конечное состояние, например в начало координат фазового пространства.

Подчеркнем тот очевидный факт, на который почему-то редко обращают внимание, что в начальный момент $t = 0$ ИТ находится и пространстве размерности n , в конечный же момент, т.е. после завершения процесса управления, ИТ попадает в точку $x_k(0, \dots, 0)$ с нулевой размерностью. Это означает, что под действием управления ИТ постепенно переходит из исходного пространства размерности n в подпространство размерности $n - 1$ затем $n - 2$, $n - 3$ и т.д. вплоть до одномерного многообразия $\dim(\Psi_S) = 1$, двигаясь вдоль которого на финишном участке ИТ, попадает в начало координат фазового пространства. Другими словами, под действием непрерывного управления происходит постепенное сжатие объема фазового потока, в котором движется ИТ-объект.

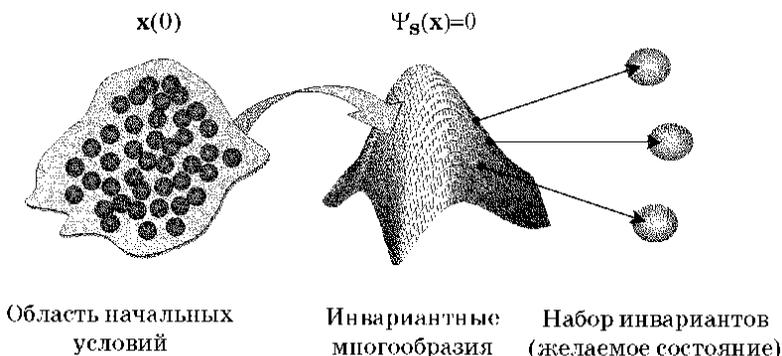


Рис. 3.2. Постановка проблемы синергетического синтеза систем

При синергетическом подходе к синтезу систем целью функционирования замкнутой нелинейной системы, в отличие от классической теории регулирования и теории оптимального управления, является не только выполнение требований, выдвинутых к характеру ПП, а, в первую очередь, обеспечение желаемого асимптотического поведения системы на аттракторе. Это связано с тем обстоятельством, что поведение любой нелинейной диссипативной системы может быть разделено на два основных этапа – этап переходного движения, когда ее траектории устремляются к аттрактору, и этап асимптотического движения на желаемом аттракторе – цели системы (рис. 3.2).

Можно утверждать, что синтезируемая система управления должна обладать достаточным числом степеней свободы для реализации поставленной технологической задачи управления. Это означает, что в тех случаях, когда исходный объект обладает ограниченным числом степеней свободы n , то для реализации поставленной цели управления, заключающейся, например, в отслеживании или подавлении некоторой функции, представляемой решением дифференциального уравнения размерности $\dim Z = r$, необходимо предварительно осуществить операцию расширения фазового пространства исходного объекта, по меньшей мере до размерности $\dim(x+z) = n+r$. Отсюда следует важный вывод о том, что для синтеза эффективных систем управления следует предварительно произвести тем или иным способом добавление стольких степеней свободы, сколько было бы достаточным для реализации цели управления. Это положение корреспондируется с известным в кибернетике законом Эшби о необходимом разнообразии. Здесь только понятие «разнообразия» конкретизируется в понятии «степени свободы» системы, так как именно степени свобо-

ды служат источником возможного разнообразия. Изложенные выше соображения позволяют сделать следующие общие важные выводы о задачах управления при синтезе систем:

- во-первых, управление объектом произвольной природы представляет собой организованный и целенаправленный процесс редукции избыточных степеней свободы исходной системы, т.е. все избыточные по отношению к заданной цели (финальному многообразию) степени свободы редуцируются, и в конечном итоге остаются только те степени свободы, которые определяют цель управления;

- во-вторых, применительно к развиваемому синергетическому подходу процедура редукции степеней свободы означает формирование между координатами системы некоторых связей – ИМ (синергии), которые и реализуют указанную редуцию степеней свободы системы. При этом инвариантные многообразия («редукторы степеней свободы») вводятся в синтезируемую систему с помощью соответствующего закона управления;

- в-третьих, редуцируемые степени свободы замкнутой системы представляют собой элементы управления как некоторые системные категории, а инвариантные многообразия (синергии) ограничивают разнообразие системы и формируют связи, т.е. некоторые акции управления [20].

Управление – это также преодоление избыточных степеней свободы системы, а сами понятия «инвариантное многообразие» (синергия) и «избыточность» степеней свободы являются базовыми элементами синергетической теории управления. Именно избыточность и инварианты приводят к организованному поведению замкнутой системы. В соответствии с базовыми положениями синергетики ее отличительной особенностью является стихийная самоорганизация, а истинный смысл возникающих при этом кооперативных процессов заключен во внутренних причинах во многом непредсказуемой самоорганизации систем. Это – причинный способ самоорганизации, открытие которого позволило синергетике добиться выдающихся результатов в исследовании кооперативных явлений в системах различной природы. В соответствии с теорией АКАР законы управления обеспечивают обязательный перевод ИТ-системы из произвольного начального состояния в окрестность заданного многообразия $\Psi_S = 0$ или пересечения многообразий.

4. СИНТЕЗ СИНЕРГЕТИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМЫ СТАБИЛИЗАЦИИ

4.1. АНАЛИТИЧЕСКОЕ КОНСТРУИРОВАНИЕ АГРЕГИРОВАННЫХ РЕГУЛЯТОРОВ

Аналитическое конструирование агрегированных регуляторов состоит из следующих этапов:

1. Постановка задачи. Объект управления (ОУ) описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (4.1)$$

где $x \in R^{n \times 1}$ – вектор состояния.

Требуется найти закон управления $u^0(x)$, который обеспечивает перевод изображающей точки из произвольного начального состояния сначала в окрестность инвариантного многообразия $\Psi_l(x_1, \dots, x_n) = 0$, а затем дальнейшее устойчивое асимптотическое движение вдоль этого многообразия в желаемое состояние, в частности, в начало координат.

Примером решения подобной задачи может служить известная оптимальная по быстродействию система второго порядка, в которой $\Psi_l(x_1, \dots, x_n) = 0$ – уравнение линии переключения, с которой изображающая точка должна сначала сблизиться, а затем двигаться вдоль нее к началу координат.

2. Выбор агрегированных макропеременных, т.е. функций $\Psi_l(x_1, \dots, x_n) = 0$. Эти функции могут строиться различными способами, и их поиск является главной задачей проектирования. Этот поиск пока в большей мере носит эвристический характер.

3. Нахождение закона оптимального управления производится без решения оптимизационной задачи. Изменение макропеременной $\Psi(t)$ считается оптимальным, если минимизируется так называемый сопровождающий оптимизирующий функционал, имеющий, в частности, вид улучшенной квадратичной оценки:

$$J_{20} = \int_0^{\infty} [\Psi^2(t) + T^2 \dot{\Psi}^2(t)] dt. \quad (4.2)$$

Как известно, минимум такому функционалу доставляет асимптотически стремящаяся к 0 экспонента, являющаяся общим решением так называемого функционального уравнения:

$$T\dot{\Psi}(t) + \Psi(t) = 0. \quad (4.3)$$

Затем определяют производную от макропеременной по времени, как от сложной функции в силу уравнений объекта.

Эту производную и саму макропеременную подставляют в функциональное уравнение и находят отсюда искомый закон оптимального управления. Сопровождающий оптимизирующий функционал с учетом $\dot{\Psi}(x)$ позволяет также найти критерий качества, по которому оптимизируется синтезируемая система. Он содержит высокие координаты, что существенно улучшает важные показатели качества в отношении быстродействия, перерегулирования, демпфирования колебаний и др. Особенно эти достоинства проявляются в областях значительных отклонений изображающей точки от заданного состояния [18, 19].

Рассмотрим общую процедуру решения системы методом АКАР на примере стабилизации угла вращения.

Исходная система имеет вид

$$\dot{\varphi}_2(t) = \varphi_1; \quad \dot{\varphi}_1(t) = a_{\varphi\dot{\varphi}}\varphi_1 + u. \quad (4.4)$$

В соответствии с методом АКАР мы вводим макропеременную вида $\Psi = \varphi_1 - \delta$, где Ψ – это задаваемая макропеременная, а δ – неизвестная на данном шаге функция (в терминах метода АКАР – «внутреннее управление»). Далее на основании функционального уравнения

$$T\Psi(t) + \Psi = 0 \quad (4.5)$$

найдем искомое управление u следующим образом:

1) производная вычисляется как производная по времени сложной функции, взятая в силу уравнений управляемого объекта:

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}(t) &= \frac{d\Psi(\varphi_1, \varphi_2)}{dt} = \frac{\partial\Psi(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{\partial\Psi_1(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial\varphi_2} \frac{d\varphi_2}{dt} = \\ &= \frac{d\Psi_1(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial\varphi_1} \dot{\varphi}_1(t) + \frac{d\Psi_1(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial\varphi_2} \dot{\varphi}_2(t) = \\ &= \varphi_1(t) - \left(\frac{\partial\delta}{\partial\varphi_1} \dot{\varphi}_1(t) + \frac{\partial\delta}{\partial\varphi_2} \dot{\varphi}_2(t) \right) = \left(1 - \frac{\partial\delta}{\partial\varphi_1} \right) \dot{\varphi}_1(t) - \left(\frac{\partial\delta}{\partial\varphi_2} \right) \dot{\varphi}_2(t) = \\ &= \left(1 - \frac{\partial\delta}{\partial\varphi_1} \right) (a_{\varphi\dot{\varphi}}\varphi_1 + u) - \frac{\partial\delta}{\partial\varphi_2} \varphi_1; \end{aligned} \quad (4.6)$$

2) полученное алгебраическое уравнение разрешаем относительно неизвестного управления u :

$$u = -a_{\varphi\dot{\varphi}}\dot{\varphi}_1 + \frac{1}{1 - \frac{\partial\delta}{\partial\varphi_1}} \left[\frac{\partial\delta}{\partial\varphi_2} \varphi_1 - \frac{1}{T} \Psi \right]. \quad (4.7)$$

Далее исследуем динамику полученного уравнения для определения оптимального управления. Управление содержит в себе неизвестные составляющие – частные производные $\frac{\partial \delta}{\partial \varphi_1}$, $\frac{\partial \delta}{\partial \varphi_2}$, для нахождения которых используется следующий шаг метода АКАР.

В силу того, что через $(4...5)T$ система выйдет на аттрактор $\Psi = 0$, так как уравнение имеет устойчивое решение $\Psi(t) = \Psi_0 e^{-t/T} = 0$, можно утверждать, что выполняется соотношение

$$\Psi = \varphi_1 - \delta = 0 \Rightarrow \varphi_1 = \delta.$$

То есть переменная φ_1 принимает установившееся значение, равное δ , а это означает, что динамику изменения этой переменной можно не рассматривать – отбросить второе уравнение системы, а вместо него рассматривать алгебраическое уравнение. Итак, динамика исходной системы после $(4...5)T$ описывается уравнениями

$$\dot{\varphi}_{2\Psi}(t) = \varphi_{1\Psi} = \delta; \quad \varphi_1 = \delta - \quad (4.8)$$

одним дифференциальным и одним алгебраическим или

$$\dot{\varphi}_{2\Psi}(t) = \varphi_{1\Psi} = \delta.$$

Таким образом, на конечном этапе движения исходной системы можно, задавая вид функции δ из соображений устойчивости и цели функционирования исходной системы, определить «внутреннее» управление δ . Затем, зная выражение для δ , подставим частные производные $\frac{\partial \delta}{\partial \varphi_1}$, $\frac{\partial \delta}{\partial \varphi_2}$ и найдем искомое управление.

Из уравнения видно, что функция δ является функцией только одной координаты – $\delta = \delta(\varphi_2)$. Тогда выражение упрощается, так как

$$\frac{\partial \delta}{\partial \varphi_1} = 0 :$$

$$u = -a_{\varphi\dot{\varphi}}\varphi_1 + \frac{\partial \delta}{\partial \varphi_2}\varphi_1 - \frac{1}{T}\Psi = -a_{\varphi\dot{\varphi}}\varphi_1 + \frac{\partial \delta}{\partial \varphi_2}\varphi_1 - \frac{1}{T}(\varphi_1 - \delta). \quad (4.9)$$

Так, например, если цель – обеспечить стабилизацию $\varphi_2 = \varphi_{20}$, где $\varphi_{20} = \text{const}$ – желаемое постоянное значение, то можно выбрать выражение

$$\delta = -\alpha(\varphi_2 - \varphi_{20}).$$

Что обеспечит стабилизацию $\varphi_2 = \varphi_{20}$ и асимптотическую устойчивость замкнутой системы при условии $T > 0, \alpha > 0$. Коэффициент α задает динамику затухания переменной φ_2 – чем он больше, тем быстрее переменная φ_2 установится в значении переменной φ_{20} .

$$u = -a_{\varphi\varphi}\varphi_1 - \alpha\varphi_2\varphi_1 - \frac{1}{T}(\varphi_1 + \alpha(\varphi_2 - \varphi_{20})).$$

Промоделировав данное уравнение, мы сделали вывод, что стабилизировать ракету по углу вращения становится проще и с меньшими затратами энергии. Задавая желаемое значение коэффициента α , мы можем легко регулировать время затухания колебаний φ_2 , т.е. переход его в установившейся режим.

С помощью метода АКАР легко достигается конечная цель управления объектом – переводом его в желаемое конечное состояние в фазовом пространстве из произвольного начального положения, а не столько с обеспечением желаемых свойств переходных процессов, как это обычно трактуется в математической теории оптимального управления.

Такой подход позволяет принципиально разрешить проблему аналитического синтеза общих объективных законов процессов управления нелинейными многомерными и многосвязными системами. Это – законы обратных связей, синтезируемых на основе наиболее полных нелинейных моделей динамических объектов с непосредственным учетом их естественных закономерностей, физических (химических и др.) критериев и ограничений [4 – 7].

Проведем вычислительный эксперимент, в ходе которого динамика системы стабилизации угла была смоделирована в MATLAB Simulink (рис. 4.1 и 4.2).

Из рисунка 4.3 видно, что конечная цель управления динамическим объектом достигается легко благодаря переводу его из произвольного начального положения в желаемое конечное состояние в фазовом пространстве.

Из анализа этого рисунка следует, что угол рыскания достаточно быстро и плавно стабилизируется. Время стабилизации около 8 единиц времени. Для примера приведем график стабилизации угла рыскания с ПД-регулятором. На рисунке 4.5 видно, что стабилизация данного угла идет с большим отклонением от установившегося значения и с большим временем, около 10 единиц времени, чем на рис. 4.4.

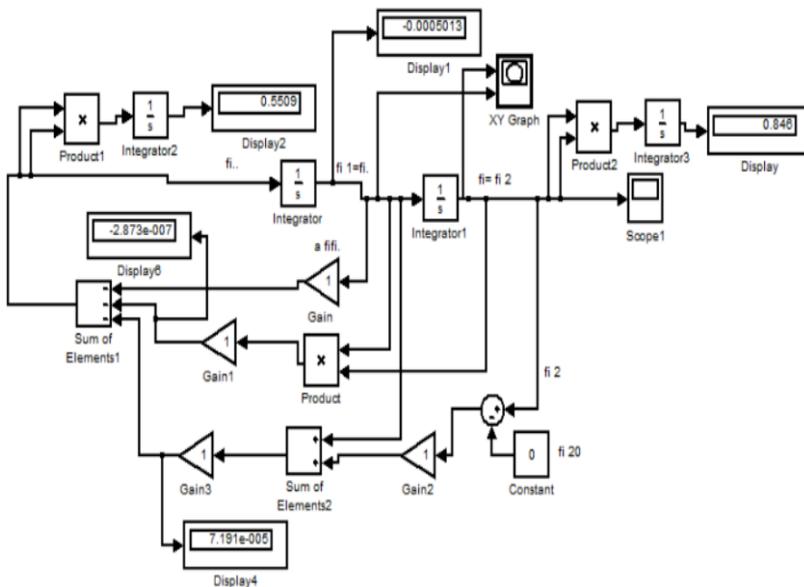


Рис. 4.1. Схема моделирования динамики системы стабилизации угла с синергетическим регулятором

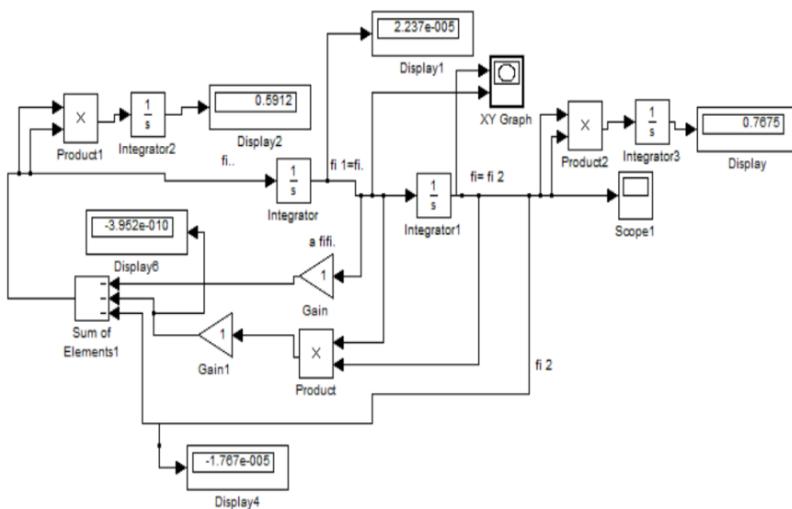


Рис. 4.2. Схема моделирования динамики системы стабилизации угла с ПД-регулятором

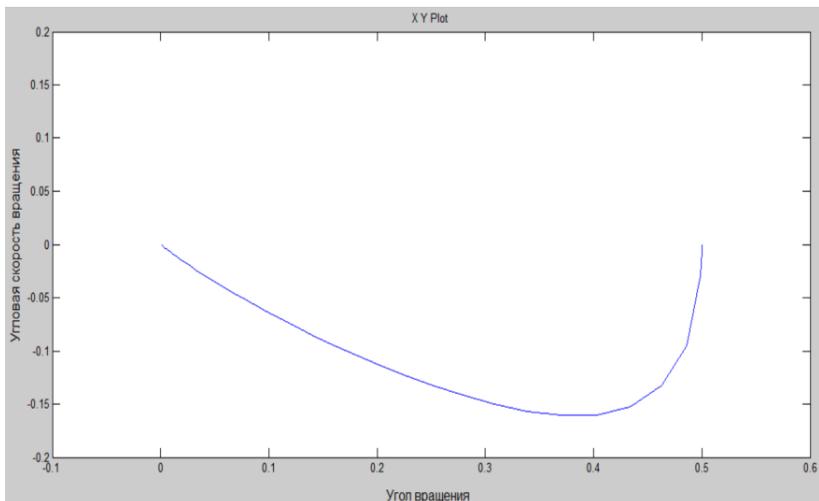


Рис. 4.3. Фазовая траектория системы стабилизации угла

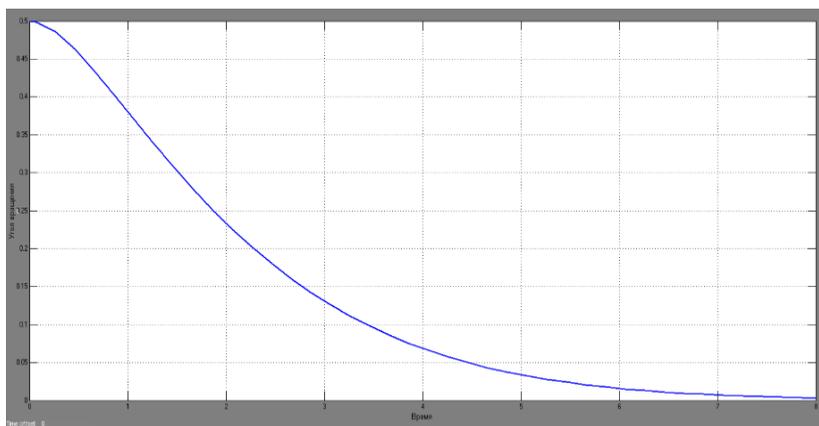


Рис. 4.4. График стабилизации угла с синергетическим регулятором

Подводя итоги, можно сказать, что использование синергетического регулятора в динамическом объекте позволяет сократить затраты на топливо, но при этом незначительно увеличивается динамическая ошибка. Так, расход топлива динамического объекта с синергетическим регулятором составляет 0,5509 единицы, а с ПД-регулятором – 0,5912 единицы. Динамическая ошибка: с синергетическим регулятором – 0,846 единицы, с ПД-регулятором – 0,7675 единицы.

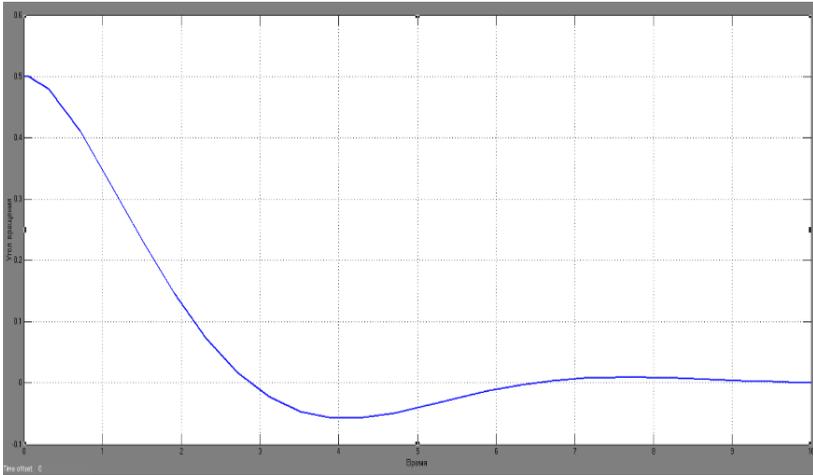


Рис. 4.5. График стабилизации угла с ПД-регулятором

Таким образом расход топлива на управление уменьшился на 6,816%, динамическая ошибка увеличилась на 10,22%. Таким образом, использование синергетических регуляторов позволяет рационально распределить энергию и увеличить дальность полета динамического объекта, но при этом увеличивается динамическая ошибка.

Синтез синергетического управления движением динамического объекта методом аналитического конструирования агрегированных регуляторов на примере стабилизации угла с нелинейной макропеременной.

Процесс создания регуляторов состоит из следующих этапов [22]:

1. Постановка задачи. Описание объекта управления с помощью нелинейных дифференциальных уравнений.

2. Выбор агрегированных макропеременных, т.е. функций $\Psi_l(x_1, \dots, x_n) = 0$, которые находятся различными способами. Этот поиск является главной задачей проектирования.

3. Нахождение закона оптимального управления.

Заданы уравнения движения ракеты в вертикальной плоскости [25]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 u, \end{cases} \quad (4.10)$$

где x_1 – угол атаки; u – отклонение руля.

Применим нелинейную макропеременную:

$$\Psi = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_1^3 + x_2, \quad (4.11)$$

Найдем производную от нее по времени с учетом уравнения ОУ:

$$\dot{\Psi} = \beta_1 x_2 + 3\beta_2 x_1^2 + \dot{x}_2 = \beta_1 x_2 + 3\beta_2 x_1^2 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 u. \quad (4.12)$$

Далее подставим уравнение (4.12) в функциональное уравнение $T\dot{\Psi}(t) + \Psi = 0$ и определим нелинейный закон оптимального управления:

$$u^0 = -\frac{1}{a_3} \left(\left(a_1 + \frac{\beta_1}{T} \right) x_1 - \left(a_2 + \beta_1 + \frac{1}{T} \right) x_2 - \frac{\beta_2}{T} x_1^3 - 3\beta_2 x_1^2 x_2 \right). \quad (4.13)$$

Из уравнения многообразия $\Psi = 0$ найдем x_2 и, подставив в первое уравнение ОУ, получим нелинейное дифференциальное уравнение движения САУ вдоль многообразия $\Psi = 0$ к началу координат:

$$\dot{x}_1 = -\beta_1 x_1 - \beta_2 x_1^3. \quad (4.14)$$

Теперь проведем вычислительный эксперимент, в ходе которого динамика системы стабилизации угла была смоделирована в MATLAB Simulink (рис. 4.6 и 4.7).

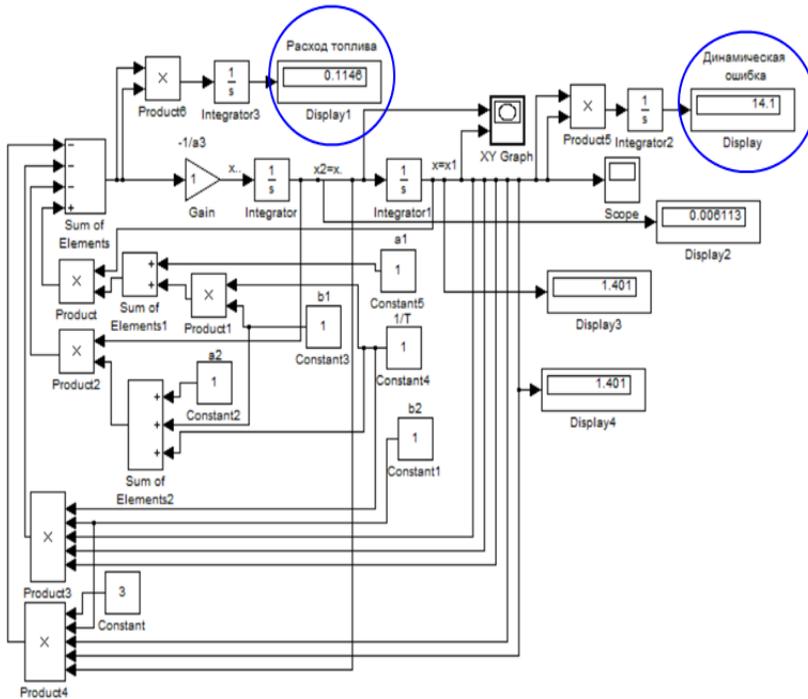


Рис. 4.6. Схема моделирования динамики системы стабилизации угла с нелинейной макропеременной

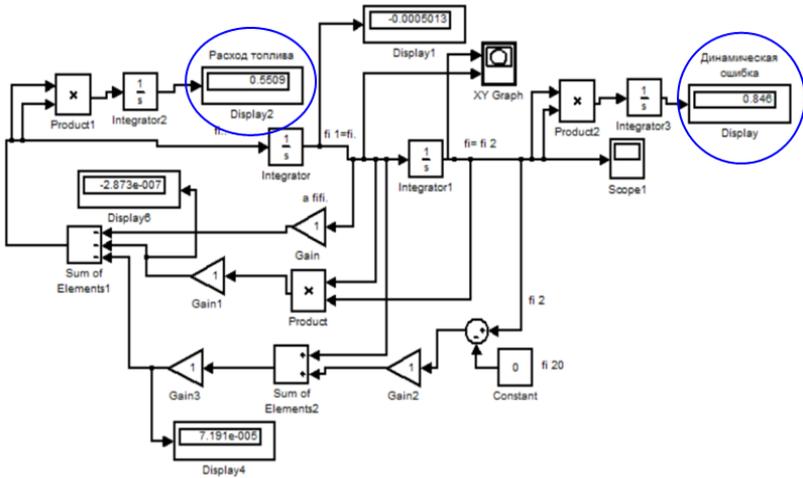


Рис. 4.7. Схема моделирования динамики системы стабилизации угла с линейной макропеременной

Расход топлива данной модели составляет 0,1146 единицы, динамическая ошибка – 14,1 единицы.

Расход топлива данной модели составляет 0,5509 единицы, динамическая ошибка – 0,846 единицы.

На данном рисунке Display показывает значение динамической ошибки, а Display 1 – расход топлива за промежуток времени, равный 10 с.

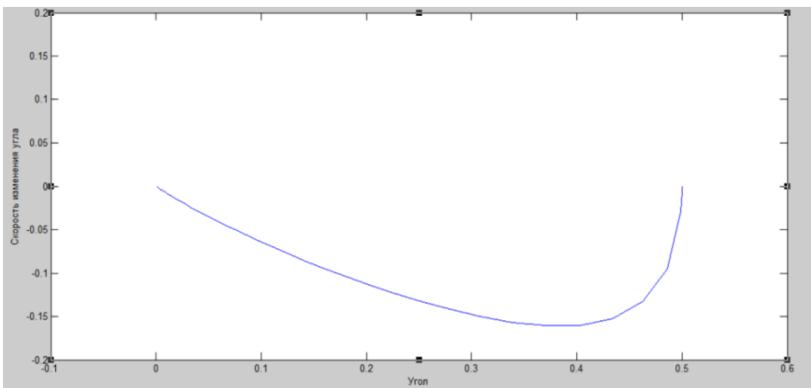


Рис. 4.8. Фазовая траектория системы стабилизации угла с линейной макропеременной

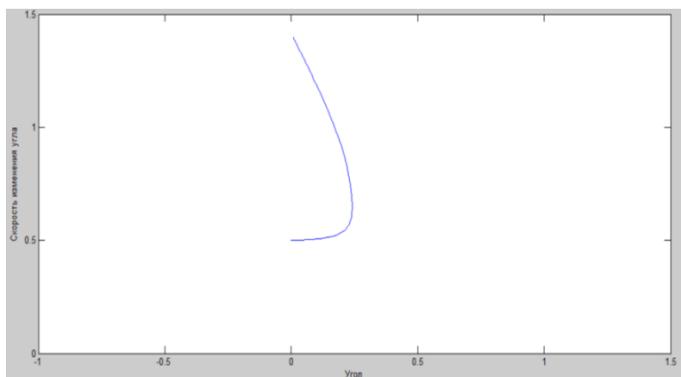


Рис. 4.9. Фазовая траектория системы стабилизации угла с нелинейной макропеременной

Произведем сравнение двух графиков фазовой траектории стабилизации угла с линейной (рис. 4.8) и нелинейной (рис. 4.9) макропеременными. На первом графике начало фазовой траектории задается с помощью отдельной константы, а на втором – только за счет интегратора, окончание траектории в первом случае формируется заданными параметрами на интеграторе, а во втором случае – после прохождения через схему на выходе второго интегратора. Исходя из вышенаписанного, делаем заключение о том, что использование первого метода является более рациональным, так как окончание фазовой траектории можно задать самим.

Из данного графика видно, что угол рыскания достаточно быстро и плавно стабилизируется (рис. 4.10). Время стабилизации около 8,5 единицы.

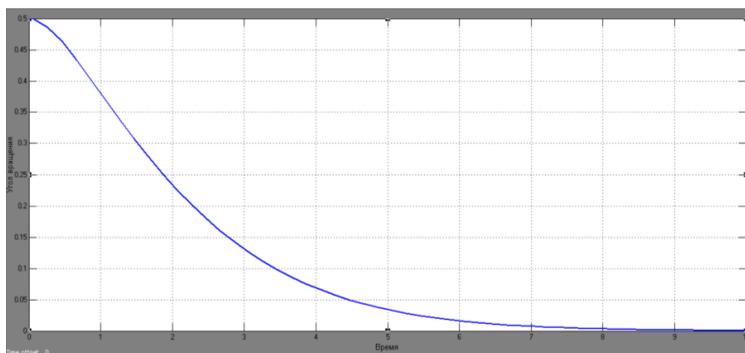


Рис. 4.10. График стабилизации угла с линейной макропеременной

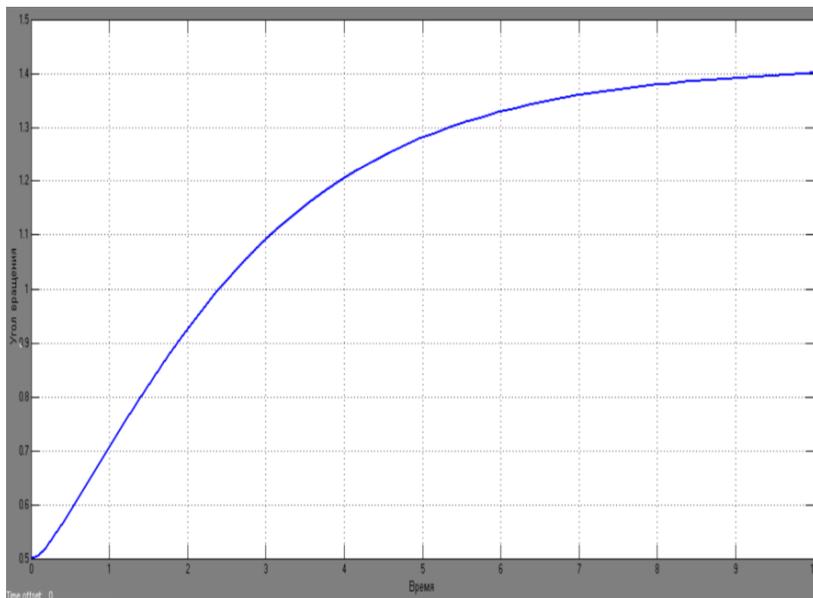


Рис. 4.11. График стабилизации угла с нелинейной макропеременной

Из рисунка 4.11 можно увидеть, что угол, так же как и на рис. 2.24, быстро и плавно стабилизируется, но к определенному значению (1,4 единицы), что по сравнению с использованием линейной макропеременной создает большую ошибку в определении этого значения.

Таким образом, подводя итоги, можно сказать, что использование синергетического регулятора с нелинейной макропеременной позволяет значительно сократить расход топлива динамического объекта с 0,55 до 0,1146, но значительно увеличивается динамическая ошибка.

Выводы. Синергетические алгоритмы представляют собой мощный инструмент для создания энергоэффективных систем стабилизации. Их использование позволяет улучшить процессы управления баллистической ракетой. Благодаря таким алгоритмам система стабилизации может быстро реагировать на внешние возмущающие воздействия и обеспечивать устойчивую работу в различных условиях.

Таким образом, использование синергетических алгоритмов в системе стабилизации позволяют разрешить поставленное в цели данной работы противоречие, а именно, сократить расход топлива на управление для совершения глубокого маневра динамическим объектом. Так, расход топлива на управление с использованием синер-

гетического регулятора с линейной макропеременной уменьшился на 6,816% по сравнению с ПД-регулятором. Также расход топлива на управление с использованием синергетического регулятора с нелинейной макропеременной по сравнению с ПД-регулятором уменьшился на 8,0615%, а по сравнению с синергетическим регулятором с линейной макропеременной – 7,9197%. Стабилизация угла с использованием синергетического регулятора с линейной макропеременной составляет около 10 единиц, а с нелинейной макропеременной – 8,5 единицы. Использование синергетического регулятора с нелинейной макропеременной позволяет значительно сократить расход топлива динамического объекта с 0,55 до 0,1146, но значительно увеличивается динамическая ошибка.

Таким образом, использование синергетических регуляторов позволяет рационально распределить энергию и увеличить дальность полета динамического объекта.

4.2. СИНТЕЗ СИНЕРГЕТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИМ ОБЪЕКТОМ С ОБОБЩЕННЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

Рассмотрим синтез оптимального закона управления по углу рыскания объектом при полете его вне атмосферы на следующем примере:

$$\dot{x}(t) = x_2, \dot{x}_2(t) = u, \quad (4.15)$$

при выборе критерия качества вида

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x_1^2 + x_2^2 + u^2) dt. \quad (4.16)$$

Запишем основное функциональное уравнение в виде

$$\min_u \left[x_2 \frac{\partial v}{\partial x_1} + u \frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2 + u^2) \right] = 0. \quad (4.17)$$

Минимум по u в уравнении (4.17) достигается тогда, когда

$$u = -\frac{\partial v}{\partial x_2}. \quad (4.18)$$

Тогда уравнение (4.17) примет вид

$$2x_2 \frac{\partial v}{\partial x_1} - \left(\frac{\partial v}{\partial x_2} \right)^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0. \quad (4.19)$$

Систему, замкнутую управлением, можно записать в виде

$$\dot{x}(t) = x_2, \dot{x}_2(t) = -\frac{\partial v}{\partial x_2}. \quad (4.20)$$

Условие диссипативности системы (4.20) запишем в виде

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} - c = 0. \quad (4.21)$$

Проинтегрируем уравнение (4.17), получим

$$v = \frac{1}{2} c x_2^2 + q_1(x_1) x_2 + q_2(x_1). \quad (4.22)$$

Подставим уравнение (4.20) в (4.17), получим дифференциальное равенство

$$x_2^2 \frac{dq_1}{dx_1} + x_2 \frac{dq_2}{dx_1} - \frac{1}{2} c^2 x_2^2 - c x_2 q_1 - \frac{1}{2} q_1^2 + \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2 = 0, \quad (4.23)$$

из которого возьмем $-\frac{1}{2} q_1^2 + \frac{1}{2} x_1^2 = 0$ и разрешим относительно q_1 , тогда получим следующее равенство:

$$q_1 = \pm x_1. \quad (4.24)$$

Возьмем $q_1 = x_1$, тогда из $\frac{dq_1}{dx_1} - \frac{1}{2} c^2 + \frac{1}{2}$ получим $c^2 = 3$, решением которого будет $c = \pm\sqrt{3}$. Пусть $c = \sqrt{3}$, тогда из равенства $\frac{dq_2}{dx_1} - c q_1 = 0$ имеем

$$q_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} x_1^2 + r, \quad (4.25)$$

где r – некоторая константа.

Подставив q_1 и q_2 , получим

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2} x_2^2 + x_1 x_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} x_1^2 + r. \quad (4.26)$$

Из граничных условий на v имеем, что $r = 0$. Тогда окончательное равенство будет следующим:

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2} x_2^2 + x_1 x_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} x_1^2. \quad (4.27)$$

Оптимальный закон управления будет иметь вид

$$u = -\sqrt{3} x_2 - x_1. \quad (4.28)$$

Теперь проведем вычислительный эксперимент, в ходе которого динамика системы стабилизации угла тангажа была смоделирована в программе MATLAB Simulink.

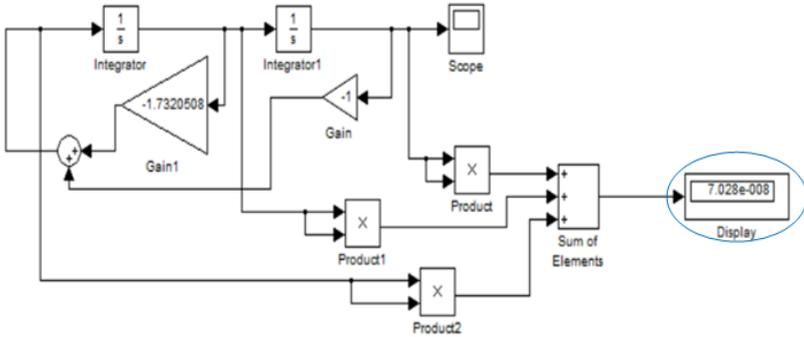


Рис. 4.12. Схема моделирования динамики системы с традиционным законом управления

На рисунке 4.12 в синем кружке – подынтегральное значение обобщенного критерия качества при времени $t = 10$ с.

Докажем, что коэффициенты, стоящие перед x_1 и x_2 оптимальны, изменяя их и анализируя изменение значения критерия качества.

Построим графики зависимостей критерия качества от коэффициентов, стоящих перед x_1 и x_2 соответственно.

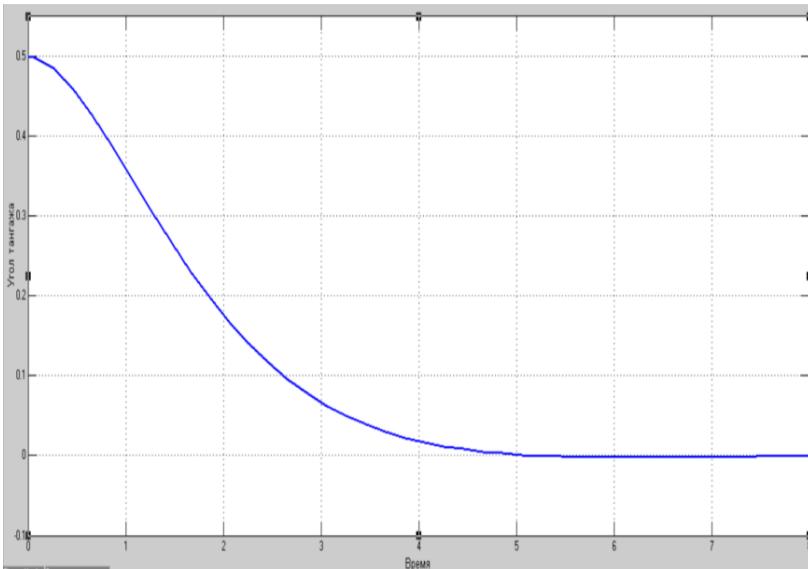


Рис. 4.13. График стабилизации угла рыскания

4.1. Изменение коэффициентов и критерия качества J

Коэффициент перед x_1	Коэффициент перед x_2	Значение критерия качества J
-1	$-\sqrt{3}$	$7,028 \cdot 10^{-8}$
-1	-2	$1,556 \cdot 10^{-7}$
-1	-1,8	$4,712 \cdot 10^{-8}$
-1	-1,6	$6,579 \cdot 10^{-8}$
-1	-1,4	$6,398 \cdot 10^{-7}$
-1	-1,2	$4,106 \cdot 10^{-6}$
-1	-1	$2,27 \cdot 10^{-5}$
-1,6	$-\sqrt{3}$	$4,194 \cdot 10^{-8}$
-1,4	$-\sqrt{3}$	$5,033 \cdot 10^{-8}$
-1,2	$-\sqrt{3}$	$2,129 \cdot 10^{-8}$
-0,8	$-\sqrt{3}$	$1,684 \cdot 10^{-7}$
-0,6	$-\sqrt{3}$	$5,825 \cdot 10^{-5}$

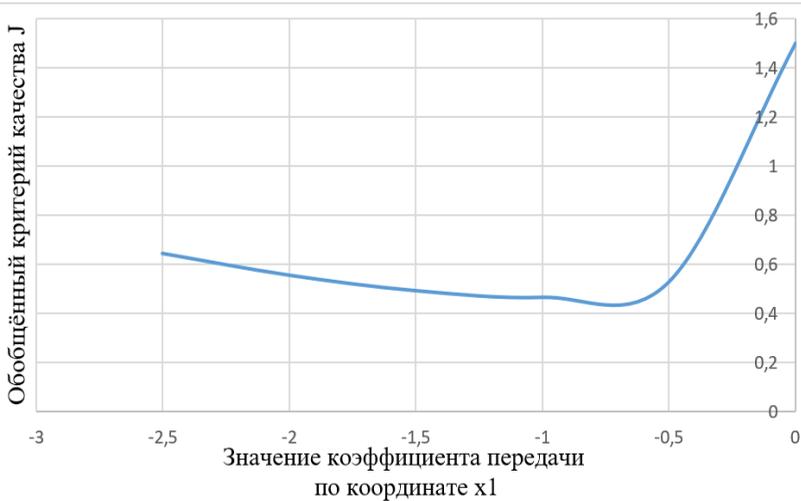


Рис. 4.14. График зависимости критерия качества от коэффициента передачи x_1

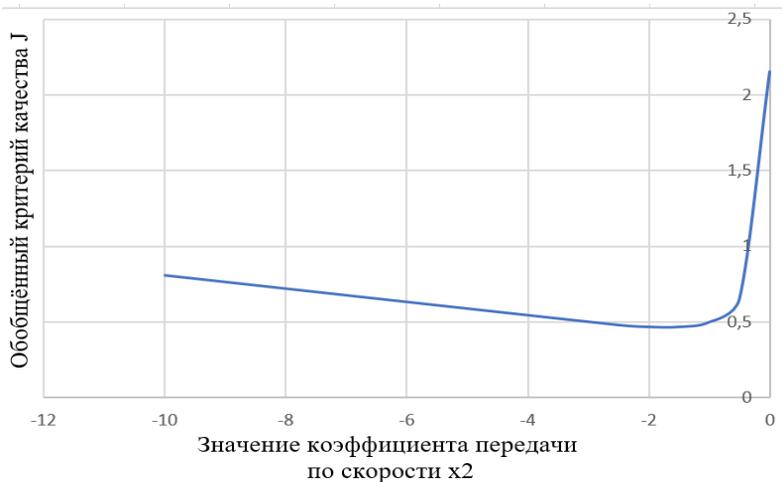


Рис. 4.15. График зависимости критерия качества от коэффициента передачи x_2

Из таблицы 4.1 и рис. 4.13 – 4.15 видно, что коэффициенты, стоящие перед x_1 и x_2 , -1 и $-\sqrt{3}$, оптимальны, так как значение критерия качества при изменении любого из коэффициентов только увеличивается.

Таким образом, из вышесказанного можно сделать вывод, что критерий расхода топлива, входящий в состав обобщенного критерия качества, обеспечивает минимизацию расхода энергии для достижения целей функционирования системы:

$$J_{\min}^3 = \int_{t_0}^{t_k} u^2(t) dt \rightarrow \min, \quad (4.29)$$

что обеспечивается найденным оптимальным управляющим сигналом.

Синергетические алгоритмы представляют собой мощный инструмент для создания энергоэффективных систем стабилизации. Их использование позволяет улучшить процессы управления баллистической ракетой. Благодаря таким алгоритмам система стабилизации может быстро реагировать на внешние возмущающие воздействия и обеспечивать устойчивую работу в различных условиях.

Таким образом, использование синергетических алгоритмов в системе стабилизации позволяют разрешить поставленное в цели данной работы противоречие, а именно, сократить расход топлива на управление для совершения глубокого маневра динамическим объектом. Так, расход топлива на управление с использованием синер-

гетического регулятора с линейной макропеременной уменьшился на 6,816% по сравнению с ПД-регулятором. Также расход топлива на управление с использованием синергетического регулятора с нелинейной макропеременной по сравнению с ПД-регулятором уменьшился на 8,0615%, а по сравнению с синергетическим регулятором с линейной макропеременной – 7,9197%. Стабилизация угла с использованием синергетического регулятора с линейной макропеременной составляет около 10 единиц, а с нелинейной макропеременной – 8,5 единицы. Использование синергетического регулятора с нелинейной макропеременной позволяет значительно сократить расход топлива динамического объекта с 0,55 до 0,1146, но значительно увеличивается динамическая ошибка.

Таким образом, использование синергетических регуляторов позволяет рационально распределить энергию и увеличить дальность полета динамического объекта.

Критерий расхода топлива, входящий в состав обобщенного критерия качества, обеспечивает минимизацию расхода энергии для достижения целей функционирования системы.

Приведенные выше примеры показывают, как нейросети могут улучшить характеристики систем стабилизации динамических объектов, делая их более эффективными и надежными в реальных условиях. Эти исследования подчеркивают потенциал использования нейросетей для решения сложных задач управления и стабилизации динамических объектов.

В ходе выполнения данной работы были получены следующие научные результаты:

- синергетический алгоритм управления движением динамического объекта методом АКАР с линейной макропеременной;
- синергетический алгоритм управления движением динамического объекта методом АКАР с нелинейной макропеременной;
- синергетический алгоритм управления динамическим объектом с обобщенным критерием качества.

4.3. МОДЕЛИ ТРЕБОВАНИЙ

Среди моделей различного вида и назначения выделяются два принципиально различных типа:

- первый тип предназначен для описания характеристик (свойств) систем, т.е. для целей анализа;
- второй тип предназначен для принятия каких-либо решений в целях достижения целей.

Эти типы моделей будем условно обозначать как M_c – модели систем и M_T – модели требований. Все возможные варианты постановки задач построения целенаправленных систем являются бинарными отношениями (декартовым произведением) этих двух типов моделей $S = M_c \times M_T$. Основными элементами моделей требований типа M_T являются:

- цели и критерии, по которым осуществляется выбор решения (критерий – признак, правило принятия решения по оценке чего-либо на соответствие предъявленным требованиям);
- модели принятия решений, схемы и процедуры принятия решений.

Спектр моделей требований весьма широк, так как отражает уровень формализованности как целей и критериев, так и моделей принятия решений.

Векторный критерий состоит из набора (множества показателей), в числе которых могут быть показатели с разными направлениями шкалы полезности (желательности). Направление шкалы полезности связывает категории «больше – меньше» с категориями «лучше – хуже». При оптимизации по скалярному критерию решение получается как наилучшее (с учетом ограничений), соответствующее минимуму или максимуму критерия в зависимости от направления шкалы полезности. Иное дело, если показателей несколько. Рассмотрим задачу выбора решения для случая, когда имеется векторный критерий, который состоит из двух показателей: $J = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$.

Оба показателя имеют одинаковые шкалы полезности: чем меньше, тем лучше. Если для какого-либо показателя направление шкалы не совпадает с установленным, то для изменения направления шкалы полезности вводится показатель вида $I'_i = 1 / I_i$ или $I'_i = -I_i$ (I'_i – уровень «плохости»).

В ряде случаев (обычно при отсутствии дополнительной информации о важности критериев) оптимумом по векторному критерию считают множество Парето-оптимальных векторов. Векторную оценку, для которой не существует более предпочтительной, называют Парето-оптимальной, а также эффективной, или неулучшаемой по векторному критерию. Множество всех таких оценок называют эффективными, или множеством Парето. Часто требуется не просто сравнить объекты между собой, а выбрать из них наилучшие. Определение множества Парето позволяет исключить заведомо неподходя-

щие объекты. Множество Парето обладает следующим свойством: любой из объектов, входящих в это множество хотя бы по одному критерию, лучше любого другого объекта, входящего в это множество. То есть, определение данного множества помогает из всего множества объектов исключить те, которые уступают другим объектам по всем критериям.

Оптимальность по Парето – такое состояние системы, при котором значение каждого частного критерия, описывающего состояние системы, не может быть улучшено без ухудшения положения других. Множество Парето представляет собой часть границы множества достижимости, т.е. к нему принадлежат те значения критериев, над которыми не доминируют другие варианты.

Существенно, что решение задачи оптимизации по векторному критерию носит принципиально множественный характер и для выбора наилучшего варианта нужен суперкритерий, который устанавливает приоритеты между показателями. Существует несколько методов получения решений на множестве Парето:

- 1) метод сворачивания векторного критерия в глобальный скалярный;
- 2) метод последовательных уступок;
- 3) метод минимизации по частному критерию или показателю и ряд других.

Метод сворачивания векторного критерия предполагает, что сворачивание может производиться по одной из следующих форм:

а) аддитивный критерий $J = \sum_{i=1}^n \alpha_i I_i$, где α_i – веса (весовые коэффициенты) показателей.

Если показатели имеют разные шкалы или размерности, то для облегчения выбора весов иногда эти показатели нормируют:

$$I_{in} = \frac{I_1}{I_1^0},$$

где I_1^0 – минимально (максимально) возможное значение показателя.

Веса также нормированы, т.е. $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Физический смысл минимизации такого критерия – это минимизация общих потерь (применений, когда все показатели имеют одинаковый смысл);

б) линейно-квадратичный критерий $J = \sum_{i=1}^n \alpha_i (I_i)^2$. Минимизация по такому критерию эквивалентна нахождению точки, ближайшей к началу координат (с учетом весов). Физический смысл – минимизация среднеквадратичных (статистических) потерь;

в) минимаксный критерий $J = \max_{1 \leq i \leq n} (\alpha_i I_i)$. Физический смысл – минимизация самой большой потери;

г) модель справедливого компромисса

$$J = \prod_{i=1}^n I_i^{\alpha_i} \Leftrightarrow J = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \ln I_i.$$

Для случая $n = 2$ имеем $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = 0,5$ и решение $\frac{\Delta I_1}{I_1} = \frac{\Delta I_2}{I_2}$.

То есть относительные потери по одному критерию приводят к относительному выигрышу другого, и наоборот.

Метод последовательных уступок требует большой определенности информации о приоритетах показателей (об их важности). Последовательность применения метода:

1-й шаг. Все показатели должны быть расположены в порядке убывания приоритетов.

2-й шаг. Отыскивается минимум старшего (наиболее важного) показателя и назначается уступка $I_1 \leq I_1^* + \Delta I_1$.

3-й шаг. В рамках назначенной уступки проводится минимизация очередного критерия и т.д.

$$\begin{aligned} \min_{I_1 \rightarrow I_1^*} \rightarrow I_1 \leq I_1^* + \Delta I_1; \quad \min_{I_2 \rightarrow I_2^*} \rightarrow I_2 \leq I_2^* + \Delta I_2; \\ \min_{I_n \rightarrow I_n^*} \rightarrow I_n \leq I_n^* + \Delta I_n. \end{aligned}$$

Метод минимизации по частному критерию или показателю можно рассматривать как вариант предыдущего, если уступки по всем критериям, кроме наименее важного, известны.

Путь к единому параметру оптимизации часто лежит через обобщение, так как очень часто трудно выбрать один, самый важный. Каждый отклик имеет свой физический смысл и свою размерность. Чтобы объединить различные отклики, прежде всего, приходится ввести для каждого из них некоторую безразмерную шкалу. Шкала должна быть однотипной для всех объединяемых откликов – это делает их сравнимыми. После того как для каждого отклика построена безразмерная шкала, возникает следующая трудность – выбор правила комбинирования исходных частных откликов в обобщенный показатель. Единого правила не существует.

Пусть исследуемый объект характеризуют n частных откликов y_u ($u = 1, 2, \dots, n$) и каждый из этих откликов измеряется в N опытах. Тогда y_{ui} – это значение u -го отклика в i -м опыте ($i = 1, 2, \dots, N$). Каждый из откликов y_u имеет свой физический смысл и, чаще всего, разную размерность. Введем простейшее преобразование: набор данных для каждого y_u поставим в соответствие с самым простым стандартным аналогом – шкалой, на которой имеются только два значения:

0 – брак, неудовлетворительное качество, 1 – годный продукт, удовлетворительное качество. Преобразованные значения обозначим так: y_{ii} – преобразованное значение i -го отклика в i -м опыте. Здесь мы применили шкалу, в которой использовано числовое множество из двух элементов (в данном случае 0 и 1).

Для построения обобщенного отклика удобно воспользоваться формулой

$$Y_i = \sqrt[n]{\prod_{u=1}^n y_{ui}^{np}},$$

где y_i – обобщенный отклик в i -м опыте; $\prod_{u=1}^n$ – произведение частных откликов $y_{1i}^{np} y_{2i}^{np} \dots y_{3i}^{np}$. Очевидно, что такой подход слишком груб и жесток.

Метод сворачивания векторного критерия в глобальный скалярный – способ получения обобщенного отклика, который может применяться в тех случаях, когда для каждого из частных откликов известен «идеал», к которому нужно стремиться. Существует много способов введения метрики, задающей «близость к идеалу». Дополним предыдущие обозначения еще одним: y_{u0} – наилучшее («идеальное») значение u -го отклика. Тогда $(y_{ui} - y_{u0})$ можно рассматривать как некоторую меру близости к идеалу. Однако использовать разность при построении обобщенного отклика невозможно по двум причинам. Она имеет размерность соответствующего отклика, а у каждого из откликов может быть своя размерность, что препятствует, как мы уже знаем, их объединению. Отрицательный или положительный знак разности также создает неудобство. Чтобы перейти к безразмерным значениям, достаточно разность поделить на желаемое значение: $(y_{ui} - y_{u0}) / y_{u0}$.

Чтобы нивелировать знаки, можно разность возводить в квадрат. Тогда обобщенный отклик получим по следующей формуле:

$$Y_i = \sum_{u=1}^n \left(\frac{y_{ui} - y_{u0}}{y_{u0}} \right)^2.$$

Если в некотором опыте все частные отклики совпадут с идеалом, то Y_i станет равным нулю. Это и есть то значение, к которому нужно стремиться. Чем ближе к нулю, тем лучше.

Среди недостатков такой оценки выделяется нивелировка частных откликов. Все они входят в обобщенный отклик на равных правах. На практике же различные показатели бывают далеко не равноправны. Устранить этот недостаток можно введением некоторого веса a_u :

$$Y_i = \sum_{u=1}^n a_u \left(\frac{y_{ui} - y_{u0}}{y_{u0}} \right)^2, \quad \sum_{u=1}^n a_u = 1, \quad a_u > 0.$$

Чтобы проранжировать отклики по степени их важности и найти соответствующие веса, можно воспользоваться экспертными оценками. Пользуясь системой предпочтений, можно получить более содержательную шкалу.

Шкала желательности

Одним из наиболее удобных способов построения обобщенного отклика является обобщенная функция желательности. В основе построения этой обобщенной функции лежит идея преобразования натуральных значений частных откликов в безразмерную шкалу желательности или предпочтительности. Чтобы получить шкалу желательности, удобно пользоваться готовыми таблицами соответствий между отношениями предпочтения в эмпирической и числовой системах (табл. 4.2).

Значение частного отклика, переведенное в безразмерную шкалу желательности, обозначается через d_u ($u = 1, 2, \dots, n$) и называется частной желательностью. Шкала желательности имеет интервал от нуля до единицы. Значение $d_u = 0$ соответствует абсолютно неприемлемому уровню данного свойства, а значение $d_u = 1$ – самому лучшему значению свойства. Понятию «очень хорошо» соответствуют значения на шкале желательности $1 > d_u > 0,8$, а понятию «очень плохо» – $0 < d_u < 0,2$ и т.д. Выбор отметок на шкале желательности 0,63 и 0,37 объясняется удобством вычислений: $0,63 \approx 1 - (1/e)$, $0,37 \approx 1/e$ (e – основание натурального логарифма). Значение $d_u = 0,37$ обычно соответствует границе допустимых значений.

Эти числа определяются правилом «золотого сечения». Но все объясняется достаточно просто. В таблице 4.2 представлены числа, соответствующие некоторым точкам кривой (рис. 4.16), которая задается уравнением $d = e^{-e^{-y}}$ или $d = \exp[-\exp\{-y\}]$, где \exp – принятое обозначение экспоненты.

На оси ординат нанесены значения желательности, изменяющиеся от 0 до 1. По оси абсцисс указаны значения отклика, записанные в условном масштабе. За начало отсчета 0 по этой оси выбрано значение, соответствующее желательности 0,37. Выбор именно данной точки связан с тем, что она является точкой перегиба кривой, что в свою очередь создает определенные удобства при вычислениях. То же самое верно для значения желательности, соответствующего 0,64.

Выбор этой кривой не является единственной возможностью. Однако она возникла в результате наблюдений за реальными решениями экспериментаторов и обладает такими полезными свойствами, как непрерывность, монотонность и гладкость. Кроме того, эта кривая хорошо передает тот факт, что в областях желательностей, близких к 0 и 1, «чувствительность» ее существенно ниже, чем в средней зоне.

Симметрично относительно нуля на оси y (y – кодированная шкала) расположены кодированные значения отклика. Значение на кодированной шкале принято выбирать от 3 до 6. Например, на рис. 4.16 использовано шесть интервалов в сторону убывания и шесть – в сторону возрастания. Выбор числа интервалов определяет крутизну кривой в средней зоне.

Натуральные значения частных откликов графически преобразуем в частные функции желательности d_{ii} . Это отображено на рис. 4.16 на шкале, расположенной под шкалой y .

4.2. Стандартные отметки на шкале желательности

Желательность	Отметки на шкале желательности
Очень хорошо	1,00...0,80
Хорошо	0,80...0,63
Удовлетворительно	0,63...0,37
Плохо	0,37...0,20
Очень плохо	0,20...0,00

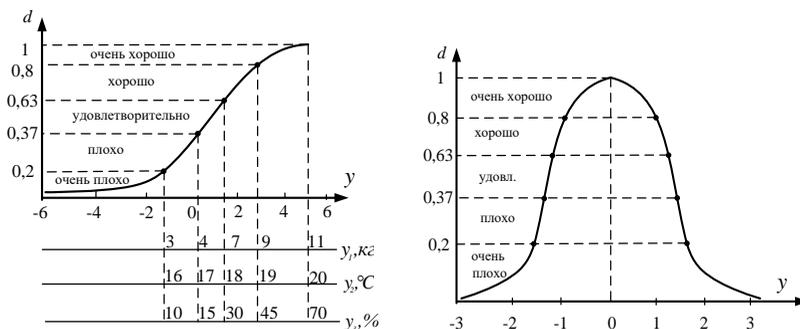


Рис. 4.16. Функция желательности, ограниченная с одной и двух сторон

Таким образом устанавливаются границы допустимых значений для частных откликов. При этом нужно иметь в виду, что ограничения могут быть односторонними в виде $y_u \leq y_{\max}$ или $y_u \geq y_{\min}$ и двусторонними в виде $y_{\min} \leq y_u \leq y_{\max}$. Здесь возможны две ситуации. Первая, самая благоприятная, возможна, если экспериментатор располагает инструкцией, в которой четко сформулированы требования ко всем частным откликам, т.е. имеется спецификация с одним или двумя ограничивающими пределами. Тогда отметка на шкале желательности $d_u = 0,37$ соответствует y_{\min} , если имеется одностороннее ограничение $y_u \geq y_{\min}$ или y_{\max} для $y_u \leq y_{\max}$. В случае двустороннего ограничения этой отметке ставится в соответствие и y_{\min} , и y_{\max} . Во второй ситуации спецификация отсутствует, тогда ограничения на шкале и другие отметки делаются весьма субъективно, на основании опыта и интуиции экспериментатора. Совершенно очевидно, что в таком случае опасно руководствоваться мнением одного-единственного исследователя, а желательно учесть мнения нескольких специалистов.

4.4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЧАСТНЫХ ОТКЛИКОВ В ЧАСТНЫЕ ФУНКЦИИ ЖЕЛАТЕЛЬНОСТИ

Для случая когда существует спецификация с одним или двумя ограничивающими пределами, и эти пределы являются единственными значениями качества, тогда вне пределов $d_u = 0$, а внутри пределов $d_u = 1$. Шкала желательности выродилась в простейшую шкалу классификаций с двумя классами эквивалентности. Преобразования частных откликов в их стандартные аналоги на шкале желательности осуществляются по более сложным законам. Примером более сложного преобразования служит таблица желательности (см. табл. 4.2) и соответствующая ей функция желательности.

При односторонних ограничениях $y_u \leq y_{\max}$ или $y_u \geq y_{\min}$ на рис. 4.16 представлена частная функция желательности для свойства, ограниченного с одной стороны. К числу свойств, подчиняющихся одностороннему ограничению, относятся очень многие характеристики систем. Для всех этих показателей ограничение имело вид $y_u \geq y_{\min}$. Другой вид одностороннего ограничения $y_u \leq y_{\max}$ характерен для таких показателей, как содержание различных вредных примесей, влажность, удельный вес, содержание дорогих или дефицитных компонентов и т.п.

Для двустороннего ограничения $y_{\min} \leq y_u \leq y_{\max}$ функция желательности показана на рис. 4.16. Шкала желательности есть попытка формализации представлений экспериментатора о важности тех или других значений частных откликов.

Обобщенная функция желательности

После того как выбрана шкала желательности и частные отклики преобразованы в частные функции желательности, можно приступить к основной задаче – построению обобщенного показателя D , названного обобщенной функцией желательности. Обобщать, т.е. переходить от d к D , предлагается по формуле

$$D = \sqrt[n]{\prod_{u=1}^n d_u}.$$

Здесь обобщенная функция желательности задается как среднее геометрическое частных желательностей. Такое представление можно рассматривать как удобную модель психологической реакции исследователя, которая возникает при решении определенного класса задач.

Способ задания обобщенной функции желательности таков, что если хотя бы одна частная желательность $d_u = 0$, то обобщенная функция тоже будет равна нулю, с другой стороны, $D = 1$ тогда и только тогда, когда все $d = 1$ ($u = 1, 2, \dots, n$). Обобщенная функция желательности весьма чувствительна к малым значениям частных желательностей. Можно представить себе другие задачи, когда столь жесткие свойства обобщенного критерия окажутся неприемлемыми.

Способ задания базовых отметок шкалы желательности, представленный в табл. 4.2, один и тот же, как для частных желательностей, так и для обобщенной. Так, если $d_1, d_2, \dots, d_n = 0,63$, то и $D = 0,63$, если $d_1, d_2, \dots, d_n = 0,37$, то и $D = 0,37$ и т.п. В обобщенную функцию желательности могут входить самые разнообразные частные отклики: технологические, технико-экономические, экономические, эстетические и т.п.

Мы рассмотрели самый простой способ получения обобщенного критерия – графический. Но часто приходится прибегать к аналитической зависимости, особенно при систематических исследованиях одного и того же объекта. Располагая информацией о y_i , мы можем рассчитать d_i по уже упоминавшейся формуле $d_i = \exp[-\exp(-y)]$.

Обобщенная функция желательности является некоторым абстрактным построением и поэтому, прежде чем рекомендовать ее в качестве единого критерия оптимизации, представлялось интерес-

ным исследовать такие ее важные свойства, как адекватность, статистическая чувствительность и эффективность. Оказалось, что для шкал желательности статистическая чувствительность и эффективность частных и обобщенной функций желательности не ниже, чем таковые для любого технологического показателя, им соответствующего.

Обобщенная функция желательности является количественным, однозначным, единым и универсальным показателем качества исследуемого объекта, и если добавить еще такие свойства, как адекватность, эффективность и статистическая чувствительность, то становится ясным, что ее можно использовать в качестве критерия оптимизации.

5. ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ПОИСКОВЫМИ МЕТОДАМИ

5.1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ В СЛУЧАЕ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Все численные методы можно разделить на две группы: прямые, в которых для поиска экстремума используются только значения самой функции, и градиентные, в которых используется значение производной функции. Рассмотрим идею, лежащую в основе прямых методов. Предположим, что точки a и b определяют интервал, который содержит истинную точку минимума, и внутри этого интервала функция унимодальная, т.е. имеет один минимум (или максимум) в точке x^* . Следовательно, данная функция имеет форму, близкую к той, что приведена на рис. 6.1. Если известны значения функции такого вида в трех точках x_1, x_2, x_3 , таких, что $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$, а $f(x_2) < f(x_1)$ и $f(x_2) < f(x_3)$, то $x_1 < x^* < x_2$. Тогда точка x^* будет лежать внутри интервала $[x_1, x_2]$, меньшего по размеру, чем интервал $[a, b]$.

Последовательно уменьшая интервал неопределенности, можно определить с заданной точностью точку, в которой достигается минимум функции $f(x)$.

Для случая, когда экстремум целевой функции должен быть определен по возможности точнее с помощью относительно малого числа опытов, разработаны специальные планы. При применении этих планов к виду исследуемой функции $y = f(x)$ предъявляется требование, чтобы она имела только один экстремум (унимодальность), а величина $y = f(x)$ определялась без ошибки. При этом интервал поиска ограничен.

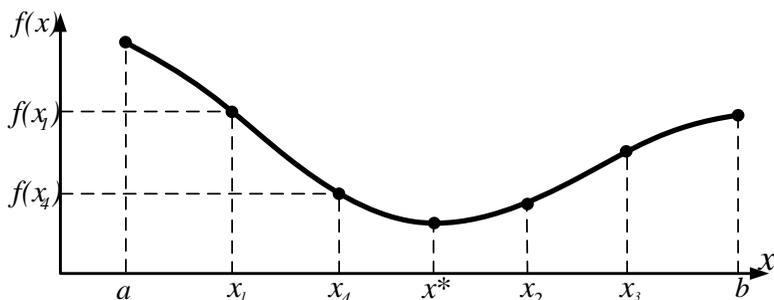


Рис. 5.1. График унимодальной функции

Сокращение начального интервала осуществляется путем сравнения значений целевой функции в двух точках, выбираемых соответствующим образом.

Стратегия проведения испытаний строится таким образом, чтобы в процессе поиска происходило исключение тех интервалов, в которых в силу унимодальности функции $f(x)$ точка x^* отсутствует. Это позволяет после проведения N испытаний выделить некоторый интервал, принадлежащий отрезку $[a, b]$ и содержащий точку x^* . Величина полученного интервала Δx_N (интервал неопределенности) определяется точкой x_k , которая обеспечивает минимальное значение функции $f(x)$ среди всех проведенных N испытаний:

$$\Delta x_N = x_{k+1} - x_{k-1},$$

где $x_{k+1} - x_{k-1}$ – ближайшие испытания к точке x_k , обеспечивающей минимальное значение функции.

В качестве меры эффективности для плана эксперимента используется отношение величины начального интервала $(b - a)$ к остаточному интервалу Δx_N после N опытов, внутри которого находится экстремум целевой функции

$$\Theta = \frac{b - a}{\Delta x_N}.$$

Наиболее простыми алгоритмами поисковой оптимизации являются алгоритмы, реализующие методы пассивного поиска: метод равномерного поиска и метод равномерного дихотомического поиска. В этих алгоритмах расположение точек x_i выбирается заранее до проведения первого испытания.

5.2. ЭКВИДИСТАНТНЫЕ ПЛАНЫ И МЕТОДЫ ДИХОТОМИЧЕСКОГО ПОИСКА

Существует ряд способов выбора координат точек проведения эксперимента x_i в одномерном случае. Простейший способ – эквидистантные планы. В этих планах точки проведения опытов отделены одна от другой равными расстояниями. N точек постановки экспериментов на интервале $[a, b]$ располагаются на равных расстояниях одна от другой, т.е. испытания проводятся в точках, которые определяются путем равномерного деления интервала $[a, b]$ на $(N + 1)$ частей.

Опыты проводятся при значениях

$$x_i = a + i \frac{b-a}{N+1}, \quad i = (1), \dots, N.$$

В полученных точках оцениваются значения функции $f(x)$ и из них выбирается наименьшее. Пусть это значение достигается в точке x_k . Тогда в связи с унимодальностью функции $f(x)$ интервал $[a, x_k - (b-a)/(N+1)]$ так же, как и интервал $[x_k + (b-a)/(N+1), b]$, можно исключить из дальнейшего рассмотрения. При этом возможно два случая: минимум может лежать как слева от точки x_k , так и справа от нее. Поэтому после проведения N испытаний наименьший интервал неопределенности, содержащий точку x^* , имеет длину $\Delta x_N = 2(b-a)/(N+1)$. Для меры эффективности имеем $\Theta = (N+1)/2$.

Метод равномерного дихотомического поиска заключается в том, что на интервале $[a, b]$ в каждой точке x_i вычисления функции $f(x)$ проводятся парами. Разница 2ε (ε – малая величина) между значениями по координате x в каждой паре должна быть небольшой, но достаточной для того, чтобы различить, какая из точек в паре лучше по значению функции $f(x)$. Эти пары располагаются на интервале $[a, b]$ равномерно. В дальнейшем процедура поиска аналогична алгоритму эквидистантного плана. После проведения $(N/2)$ пар испытаний наименьший интервал неопределенности, содержащий точку x^* , имеет длину $\Delta x_N = (b-a)/(N/2+1) = 2(b-a)/(N+2)$. Мера эффективности данного метода равна

$$\Theta = \frac{N+2}{2}.$$

Недостатком алгоритмов пассивного поиска является то, что в них при выборе точек x_i не используется информация, получаемая в процессе поисковой оптимизации. Этот недостаток устранен в методе деления пополам или методе последовательного дихотомического поиска. Согласно алгоритму, реализующему этот метод, координаты каждой последующей пары испытаний, разнесенные между собой на величину ε , выбираются в средней точке текущего интервала неопределенности. Каждые два опыта располагаются в центре интервала варьирования как можно ближе друг к другу:

$$x_1 = \frac{a+b+\varepsilon}{2}, \quad x_2 = \frac{a+b-\varepsilon}{2}, \quad x_1 > x_2,$$

где ε – малая величина.

Путем сравнения значений функций $f(x_1)$ и $f(x_2)$ решается, в какой части области варьирования процесс деления следует продолжить.

По значениям функции $f(x)$, полученным в этих точках, одна половина исследуемого интервала в силу унимодальности минимизируемой функции исключается из дальнейшего рассмотрения. В середине оставшейся части интервала неопределенности вновь делается пара испытаний. После проведения $(N/2)$ пар испытаний получаем $\Delta x_N = 2(b-a)/2^{N/2}$.

Мера эффективности данного метода равна

$$\Theta = \frac{2^{N/2}}{2}.$$

Видно, что метод деления пополам (последовательного дихотомического поиска) более эффективен при решении задачи, чем метод равномерного дихотомического поиска и эквидистантных планов.

5.3. ПЛАНЫ, ИСПОЛЬЗУЮЩИЕ ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ

Для данного класса задач наилучшим по критерию эффективности является алгоритм, который реализует метод Фибоначчи. Это название возникло в связи с тем, что стратегия поиска связана с использованием чисел Фибоначчи, которые определяются последовательностью

$$F_0 = F_1 = 1, F_k = F_{k-1} + F_{k-2}, k > 1.$$

Первые пятнадцать чисел Фибоначчи приведены в табл. 5.1.

Планирование эксперимента осуществляется следующим образом: координаты первых двух экспериментов устанавливаются

$$x_1 = a + (b-a)q, x_2 = b - (b-a)q \text{ при } q = \frac{F_{N-2}}{F_N},$$

где N выбирается достаточно большим.

Использование результатов опытов в этих двух точках позволяет уменьшить длину начального интервала поиска в $1 - q$ раз:

$$1 - q = \frac{F_{N-1}}{F_N}.$$

5.1. Числа Фибоначчи

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
F_k	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987

Эта процедура применяется затем к остаточному интервалу при

$$q = \frac{F_{N-3}}{F_N}.$$

Здесь нужно проводить только один новый опыт, так как на этом шаге может быть использован опыт, поставленный на предыдущем шаге и расположенный внутри остаточного интервала. Фактор уменьшения длины интервала при этом принимает значение

$$1 - q = \frac{F_{N-3}}{F_{N-1}}.$$

Мера эффективности метода составляет

$$\Theta = \left(\frac{F_0}{F_N} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{F_N} \right)^{-1} = F_N.$$

С помощью 11 экспериментов можно зафиксировать окончательную область, не превышающую 1% размера начальной области поиска.

Рассмотренная стратегия поиска после проведения N испытаний позволяет получить следующее значение интервала неопределенности:

$$\Delta x_N = \frac{(b-a)}{F_N}, \quad \Theta = F_N.$$

Метод Фибоначчи на классе унимодальных функций оказывается более эффективным, чем метод деления пополам. Так, например, при $N = 14$ интервал неопределенности, полученный по алгоритму метода Фибоначчи, приблизительно в пять раз меньше интервала неопределенности, гарантированного алгоритмом метода деления пополам.

Недостаток метода Фибоначчи заключается в том, что в нем априори надо знать число опытов N , так как на первом этапе поиска необходимо вычислять N -е и $(N - 1)$ -е числа Фибоначчи. В связи с этим рассмотрим алгоритм поисковой оптимизации, реализующий метод золотого сечения, который лишен этого недостатка и отличается от алгоритма метода Фибоначчи только процедурой проведения первых двух испытаний.

Пример. 5.1. С помощью плана, использующего числа Фибоначчи, требуется выбрать условия, оптимальные с точки зрения выхода продукта. Исходная область $[a, b]$ составляет $[0, 1200]$, остаточный интервал Δx_N , в котором находится экстремум (максимум), должен

составлять $1/10$ исходного интервала, т.е. $F_N = 1200/120 = 10$. Ближайшее подходящее число Фибоначчи есть $F_6 = 13$. Следовательно, необходимо провести шесть опытов. Для получения координат первых двух наблюдений

$$x^1 = a + (b - a)q_2 = 0 + (1200 - 0) \cdot 0,3846 \approx 462,$$

$$x^2 = b - (b - a)q_2 = 1200 - (1200 - 0) \cdot 0,3846 = 738$$

рассчитываем

$$q_2 = \frac{F_{N-2}}{F_N} = \frac{5}{13} \approx 0,3846$$

и получаем $x^1 = 462$ и $x^2 = 1200 - 462 = 738$. После реализации этих опытов сравниваем y^1 и y^2 . Сопоставление результатов дает $y^1 > y^2$, при этом интервал укорачивается до $[0, 738]$. Для получения координат точки постановки третьего опыта x^3 рассчитываем

$$q_3 = \frac{F_{N-3}}{F_{N-1}} = \frac{3}{8} \approx 0,375.$$

И получаем $x^3 = (a - x^2)q_3 = (0 - 738) \cdot 0,375 = 276$. В результате реализации третьего опыта получаем $y^3 < y^1$, и интервал сокращается до размера $[276, 738]$. Дальнейшие результаты и общая схема эксперимента представлены в табл. 5.2 (в таблице через I_i обозначена величина исходного интервала (интервал неопределенности) перед i -м опытом).

5.2. Результаты решения

Номер эксперимента i	Границы интервала I_i	$I_i q_i = \frac{I_i F_{N-i}}{F_{N-i+2}}$	x^i	Соотношение результатов эксперимента
0	0...1200	—	—	—
1	0...1200	462	462	$\tilde{y}_1 > \tilde{y}_2$
2	0...1200	462	738	$\tilde{y}_1 > \tilde{y}_3$
3	0...738	276	276	$\tilde{y}_4 \leq \tilde{y}_1$
4	276...738	174	450	$\tilde{y}_5 = \tilde{y}_4$
5	450...738	90	540	$\tilde{y}_6 > \tilde{y}_5$
6	450...540	Половина интервала	495	$\tilde{y}_6 > y_6$

5.4. ПРАВИЛО ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ

Золотое сечение широко известно, прежде всего, как просто пропорция $1 = 0,62 + 0,38$, которая проявляется как в статике, так и в динамике, и может служить индикатором наличия гармонии между элементами системы. Статика (две эквивалентные формы):

а) геометрическая форма (рис. 5.2).

Здесь ставится задача деления единичного отрезка в гармоничной пропорции $1/x = x/(1-x)$, т.е. целое относится к большей части, как большая часть относится к меньшей части (это есть общеизвестная запись математического определения гармонии). Из соотношения вытекает следующее алгебраическое уравнение для вычисления искомой пропорции x :

$$x^2 = 1 - x; \quad x^2 + x - 1 = 0.$$

Решая это уравнение, получаем, что больший отрезок $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0,62$, а меньший $1 - x \approx 0,38$;

б) алгебраическая форма или форма бинорма Ньютона: $1 = (a + b)^m$, где при $a = 0,62$ получается равенство $1 = (0,62 + 0,38)^m$, степень m здесь определяет количество разбиений единицы в пропорции 0,62:0,38. В результате m разбиений происходит формирование иерархической структуры. Эта структура строится по правилу так называемого треугольника Паскаля.

В динамике формируется последовательность чисел по рекурсивному алгоритму, т.е. $F_0 = F_1 = 1$, $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$, т.е. каждый член последовательности образуется за счет суммы двух предыдущих. Данная последовательность получила название чисел Фибоначчи.

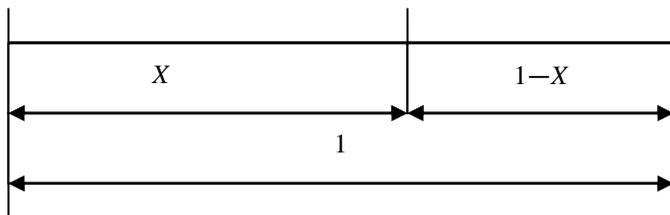


Рис. 5.2. Геометрическое представление деления единичного отрезка по правилу золотого сечения

Нетрудно видеть, что данный процесс есть процесс с памятью, хотя алгоритм памяти здесь самый примитивный. Но не исключено, что именно эта примитивность и играет ключевую решающую роль в неживой природе, когда в некоторой хаотичной среде возможны спонтанные акты суммирования двух частей. Именно за счет наличия примитивности увеличивается вероятность появления положительного результата суммирования в виде новой более совершенной структуры. Парадоксально, но примитивизм процесса лежит в основе обеспечения совершенства его результата.

Известно свойство последовательности, что если F_{k-1} и F_{k-2} есть два числа и F_k их сумма, то пропорции золотого сечения имеют вид

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{F_{k-1}}{F_k} \right) \approx 0,62.$$

Однако понятие гармоничности не замыкается на столь внешне простых соотношениях, приведенных выше. Гармоничность – это намного более глубокое и совершенное понятие.

Метод золотого сечения является частным случаем метода Фибоначчи, в котором вместо величины

$$q = \frac{F_{k-2}}{F_k}$$

на каждом шаге используется ее предельное значение при $k \rightarrow \infty$:

$$q = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{F_{k-2}}{F_k} \approx 0,38.$$

Преимущество метода состоит в том, что число опытов не обязательно должно определяться заранее. Из-за этого эффективность оказывается несколько меньшей. После проведения N опытов остаточный интервал составляет $(0,62)^{N-1}$ часть исходного, т.е.

$$\Xi = \frac{1}{(0,62)^{N-1}}.$$

Пример 5.2. Пусть начальный интервал преобразован в единичный отрезок. Выберем на нем точки $x_1 = \tau^2$ и $x_2 = \tau$, где $\tau = (\sqrt{5} - 1)/2 \approx 0,62$, т.е. первые два испытания проводятся симметрично от концов начального интервала на расстоянии τ . Проведем в этих точках испытания

и сравним значения функций $f(x_1)$ и $f(x_2)$ между собой. В зависимости от знака разности $[f(x_1) - f(x_2)]$ точка минимума локализуется либо на интервале $[0, x_2]$, либо на интервале $[x_1, 1]$, каждый из которых имеет длину τ . Действительно, $x_2 - 0 = \tau$ и $1 - x_1 = 1 - \tau^2 = \tau$, так как $\tau^2 + \tau = 1$.

Таким образом, интервал неопределенности после первого шага уменьшается в τ раз. Проведение нового испытания симметрично уже имеющемуся гарантирует уменьшение интервала неопределенности вновь в τ раз. Окончательно после проведения N испытаний для интервала неопределенности можно записать следующее выражение:

$$\Delta x_N = (b - a)\tau^{N-1}.$$

При больших N (на практике уже при $N = 4$) можно считать $F_{N-1}/F_N \approx \tau$. Из чего следует, что метод Фибоначчи и метод золотого сечения практически начинаются в одних и тех же точках. В качестве критерия окончания поиска могут быть использованы различные условия, поиск окончен, если выполнено заданное число испытаний N или длина интервала неопределенности определена с требуемой точностью.

5.5. АЛГОРИТМ УЧЕТА ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ О СВОЙСТВАХ УНИМОДАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

В некоторых случаях относительно минимизируемой функции можно получить априорную статистическую информацию о расположении ее точки минимума. Эта информация обычно задается в виде распределения вероятностей. Если о расположении минимума ничего неизвестно, то распределение равномерное. Однако если на основании предварительных исследований можно сказать, что минимум лежит в каком-то интервале с большей вероятностью, чем в другом, тогда можно задать функцию распределения вероятностей, учитывающую это предполагаемое свойство минимизируемой функции.

Пусть требуется определить минимум унимодальной функции $f(x)$ с точностью ϵ_x . Разобьем интервал $[a, b]$ ϵ – сетью на M дискретных точек, в которых может находиться минимум x^* . Тогда распределение вероятностей можно задать совокупностью величин $p_j, j = 1, 2, \dots, M$:

$$\sum_{j=1}^M p_j = 1, \quad (5.1)$$

являющихся вероятностями того, что x^* находится в j -й точке.

При рассмотрении в качестве критерия эффективности интервала Δx_N (интервал неопределенности) наличие статистической информации о расположении минимума унимодальной функции не улучшает стратегии поиска. В связи с этим для заданного распределения вероятностей $p = (p_1, \dots, p_M)$ введем меру неопределенности (энтропию) расположения минимума

$$H(p) = -\sum_{j=1}^M p_j \lg p_j. \quad (5.2)$$

Проведение N испытаний в точках (x_1, \dots, x_N) уменьшает энтропию до величины $H(p|x_1, \dots, x_N)$. При этом получается некоторое количество информации $I(p)$, которое зависит от априорного распределения вероятностей p , числа и расположения точек испытаний

$$J(p, N, q) = H(p) - H(p|x_1, \dots, x_N), \quad (5.3)$$

где $q = (q_1, \dots, q_N)$ – вектор индексов, соответствующих точкам, в которых были проведены испытания.

В этом случае наилучшим алгоритмом поиска будем считать алгоритм, максимизирующий количество информации при заданном числе испытаний N :

$$\max J(p, N, q). \quad (5.4)$$

Можно показать, что решением задачи будет алгоритм, являющийся модификацией алгоритма поиска по методу Фибоначчи. Согласно данному алгоритму выбор точек испытаний осуществляется по статистической информации об априорном распределении минимума x^* на интервале $[a, b]$. На первом этапе поиска точки x_{q_1} и x_{q_2} выбираются таким образом, чтобы вероятности того, что

$$x^* \in [a, x_{q_2}] \text{ и } x^* \in [x_{q_1}, b] \quad (5.5)$$

равнялись отношению $(N-1)$ -го и N -го чисел Фибоначчи

$$P(x^* \in [a, x_{q_2}]) = P(x^* \in [x_{q_1}, b]) = F_{N-1}/F_N. \quad (5.6)$$

На втором этапе поиска, на каждом шаге происходит сокращение интервала неопределенности Δx_r за счет исключения одного из рассматриваемых интервалов. При этом в новом интервале Δx_{r+1} сохраняется точка, соответствующая наименьшему значению функции $f(x)$.

Пусть для определенности это будет точка x_{q_r} . Тогда точка $x_{q_{r+1}}$ выбирается симметрично существующей точке в смысле равенства

вероятностей того, что минимум x^* находится на отрезках, отсекаемых этими точками от концов интервала

$$P(x^* \in [a_{r+1}, x_{q_{r+1}}]) = P(x^* \in [x_{q_r}, b_{r+1}]) = F_{N-1}/F_N. \quad (5.7)$$

Процедура выбора точки текущего испытания повторяется на каждом шаге поиска.

Пример 5.3. Рассмотрим унимодальную функцию, для которой распределение вероятностей расположения точки минимума x^* на отрезке $[0, 13]$ дано в табл. 5.3. Согласно стратегии алгоритма, на первом шаге испытания проводятся в точках x_{q_1} и x_{q_2} , которые получаются из условия, где $F_5/F_6 = 0,62$,

$$\sum_j^{q_2} p_j \approx 0,62 \quad \text{и} \quad \sum_{j+q_1}^{14} p_j \approx 0,62.$$

Для данного примера $x_{q_2} = x_8 = 7$ и $x_{q_1} = x_7 = 6$.

В связи с тем, что $f(x_{q_2}) < f(x_{q_1})$, из дальнейшего рассмотрения исключаем интервал $[0, 6]$. Вероятность локализации минимума x^* на интервале $[7, 13]$ равна $\sum_{j=8}^{14} p_j \approx 0,5$. Тогда точка следующего испытания x_{q_3} определяется из условия $\sum_{j=7}^{q_3} p_j \approx 0,5$. Таким образом, $x_{q_3} = x_{11} = 10$. При этом из дальнейшего рассмотрения исключается интервал $[10 - 13]$ и т.д.

В данном случае рассмотренный метод эффективнее метода Фибоначчи в 1,4 раза по числу требуемых испытаний.

5.3. Распределение вероятностей

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
x_j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
p_j	0,01	0,02	0,05	0,08	0,1	0,12	0,12	0,12	0,13	0,09	0,07	0,05	0,03	0,01

6. МЕТОДЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

6.1. МЕТОДЫ СЛУЧАЙНОГО ПОИСКА

Одной из основных задач при исследовании различных процессов является возможность управления этим исследованием для обеспечения оптимальных условий его проведения. Наилучшим образом построить процесс, определить оптимальные режимы его проведения – естественные стремления исследователя. Для выбора оптимального процесса необходимо сравнить различные его варианты, учесть и проанализировать влияние огромного числа факторов этого процесса.

Одним из первых этапов при оптимизации технологических процессов является определение критерия оптимизации – функции отклика, значение которой будет положено в основу оценки процесса при его оптимизации. Задача оптимизации сводится к нахождению таких условий проведения технологического процесса, при которых критерий оптимизации достигает экстремума.

Принято называть геометрическое изображение функции отклика в факторном пространстве $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_R)$ – поверхностью отклика.

Рассмотрим геометрический аналог функции отклика – поверхность отклика для эксперимента с двумя факторами. Если факторы совместимы, то границы образуют на плоскости некоторый прямоугольник, внутри которого лежат точки, соответствующие состояниям объекта (рис. 6.1).

Чтобы представить вид параметра оптимизации, требуется еще одна ось координат – обозначим ее U . В этом случае поверхность отклика B будет выглядеть так, как это показано на рис. 6.1.

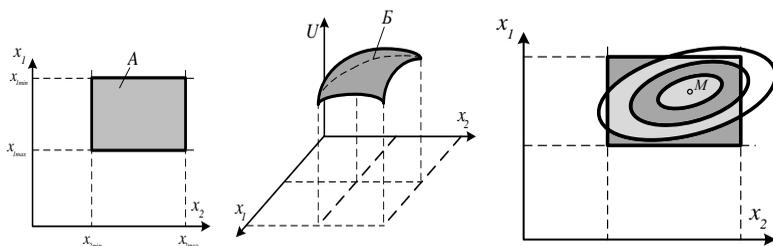


Рис. 6.1. Графическое представление области определения факторов поверхности отклика модели, проекции на плоскость сечений поверхности отклика

Пространство, в котором строится поверхность отклика, называют факторным пространством. Оно задается координатными осями, по которым откладываются значения факторов и параметра оптимизации. Размерность факторного пространства зависит от числа факторов.

Для двух факторов наглядное представление можно получить путем сечения поверхности отклика плоскостями, параллельными плоскости X_1X_2 , и проецирования полученных в сечениях линий на эту плоскость. Получаются так называемые линии равных уровней, или линии равного отклика (рис. 6.1). Каждая линия соответствует постоянному значению параметра оптимизации. Точка M на рисунке – это и есть оптимум, т.е. точка, в которой наблюдается максимальное значение параметра оптимизации.

Движение к экстремуму в n -мерном пространстве независимых переменных осуществляется обычно не непрерывно, а шагами. Экстремальное значение отклика достигается с помощью многократного последовательного изучения поверхности отклика и продвижения в факторном пространстве. Существуют несколько экспериментальных методов оптимизации, различающихся способом определения направления движения и организацией самого движения.

Стохастическими или случайными методами поиска называют методы, в которых для определения оптимума целевой функции или направления движения к экстремуму сознательно используются случайные элементы (случайные числа). Алгоритм поиска содержит при этом следующие три основных элемента, каждый из которых состоит в свою очередь из ряда последовательных этапов:

1. Алгоритм получения начальной точки поиска.
2. Решающее правило, с помощью которого определяется дальнейший ход поиска на основании данных, полученных путем реализации эксперимента.
3. Накопление информации, которая может быть полезной на последующих этапах поиска.

Слепой поиск. Из допустимой области факторного пространства, где по предположению должен находиться максимум целевой функции, случайным образом выбирается точка, в которой и реализуется эксперимент. Величина целевой функции в этой точке сравнивается с величиной целевой функции в другой точке, полученной аналогично первой точке случайным образом. Наибольшее значение целевой величины и координаты соответствующей ей точки запоминаются. Затем вновь случайным образом выбирается точка из допустимой

области, причем всякий раз в качестве начальной точки для последующего поиска используется лучшая из сравниваемых точек. При большой размерности n -факторного пространства и требовании достаточно точного определения положения оптимума использование этого метода приводит к необходимости реализации чрезмерно большого числа опытов.

$$N = \frac{\ln(1 - P_\Delta)}{\ln(1 - \Delta^n)} \approx \left(\frac{1}{\Delta}\right)^n \ln\left(\frac{1}{1 - P_\Delta}\right), \quad (6.1)$$

где P_Δ – вероятность получения положения оптимума с точностью до величины Δ ; Δ – граница точности по каждой координате факторного пространства (отношение модуля отклонения действительного положения экстремума от экспериментально найденного $X_{\text{опт}}$ к диапазону изменения фактора):

$$\Delta = \frac{|x - x_{\text{опт}}|}{x_{\text{max}} - x_{\text{min}}}.$$

Пример 6.1. Требуется найти положение оптимума в трехмерном ($n = 3$) пространстве, причем с вероятностью $P_\Delta = 0,8$ должна быть обеспечена точность по каждой координате, определяемая величиной $\Delta = 10^2$. В соответствии с уравнением (6.1) необходимое число опытов составляет

$$N = (10^2)^3 \ln 5 \approx 1,6 \cdot 10^6.$$

При использовании метода случайных направлений из некоторой точки допустимой области с известным значением целевой функции делается шаг определенной величины в случайном направлении и в полученной точке ставится эксперимент. Если целевая величина в этой точке оказывается большей, чем в начальной, шаг считается успешным, и следующий шаг в случайном направлении делается из этой новой точки. Если же шаг оказывается неуспешным, осуществляется возврат к исходной точке. Поиск прекращается, если определенное число шагов не приводит к увеличению целевой функции.

Метод случайного поиска с шагами в обратном направлении предполагает в случае неуспешного шага делать новый шаг из исходной точки в противоположном направлении. Если этот шаг также оказывается неуспешным, следует либо выбрать новое случайное направление, либо уменьшить величину шага.

6.2. МЕТОД ГАУССА–ЗЕЙДЕЛЯ

При оптимизации по методу Гаусса–Зейделя (метод покоординатного спуска) последовательное продвижение к экстремуму осуществляется путем поочередного варьирования каждым фактором до достижения частного экстремума функции отклика. Метод применим для поиска минимума (максимума) любого количества переменных, при этом на начальном шаге используется метод поиска минимума функции одной переменной. Поясним сущность метода на примере. Рассмотрим функцию двух переменных. На рисунке 6.2 показаны ее линии постоянного уровня. Минимум лежит в точке (x_1^*, x_2^*) . Поиск начинается из точки A .

Значение переменной x_2 фиксируется, т.е. осуществляется минимизация функции

$$y = f(x_1, x_2)|_{x_2=c_2} = f(x_1, c_2) = \varphi_1(x_1).$$

Минимум функции $y = \varphi_1(x_1)$ достигается в точке B . В точке B фиксируется значение переменной $x_1 = c_1$ и производится минимизация функции

$$y = f(x_1, x_2)|_{x_1=c_1} = f(c_1, x_2) = \varphi_2(x_2).$$

Поиск идет вдоль линии, параллельной оси x_2 , до точки E – минимума функции $y = \varphi_2(x_2)$. В точке E фиксируется значение переменной x_2 и поиск идет по линии ED и т.д. Постепенно мы приходим к оптимальной точке.

С одной стороны, метод является универсальным, с другой стороны – сходимость метода является очень низкой. Более совершенными являются методы, использующие информацию о ранее вычисленных значениях функции $y = f(x)$.

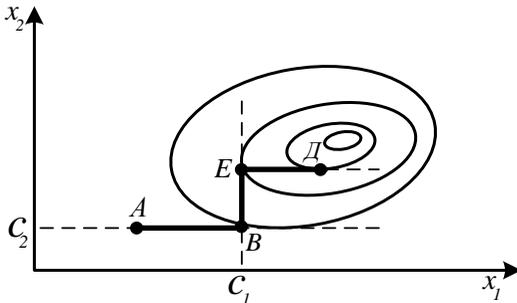


Рис. 6.2. Иллюстрация к методу Гаусса–Зейделя

6.3. ГРАДИЕНТНЫЕ МЕТОДЫ

Поверхность отклика имеет вид холма с вершиной в точке экстремума. Наиболее короткий путь к вершине – направление градиента функции отклика, на рис. 3.8 – это направление, перпендикулярное линиям уровня. Градиент непрерывной однозначной функции φ есть вектор

$$\nabla_{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} i + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} j + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} k,$$

где ∇_{φ} – обозначение градиента; $\partial \varphi / \partial x_k$ – частная производная функции по k -му фактору; i, j, k – единичные векторы в направлении координатных осей.

Следовательно, составляющие градиента суть частные производные функции отклика, оценками которых являются коэффициенты регрессии. Изменяя факторы пропорционально величинам коэффициентов регрессии, мы будем двигаться в направлении градиента функции отклика.

Величины составляющих градиента определяются формой поверхности отклика и теми решениями, которые были приняты при выборе параметра оптимизации, нулевой точки и интервалов варьирования. Знак составляющих градиента зависит только от формы поверхности отклика и положения нулевой точки. Итак, для данной поверхности отклика выбраны нулевая точка и интервалы варьирования, проведен эксперимент и найдены оценки коэффициентов регрессии. После этого направление градиента задается однозначно и является единственным.

Методику расчета удобно рассмотреть на простейшем примере в случае одного фактора (рис. 6.3).

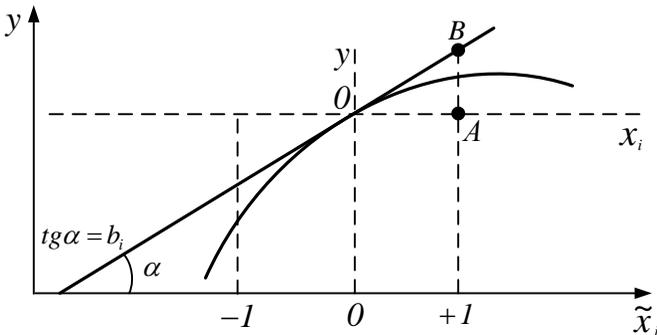


Рис. 6.3. Расчет координат точек в направлении градиента

Значение коэффициента регрессии равно тангенсу угла между линией регрессии и осью данного фактора. Если его умножить на интервал варьирования, который является прилежащим катетом в прямоугольном треугольнике OAB , то получится противолежащий катет AB , который и дает координаты точки, лежащей на градиенте. Обобщение на случай k факторов делается механически, так как все эффекты независимы друг от друга.

Существенно только соотношение произведений коэффициентов на соответствующие интервалы. Их абсолютные величины могут все одновременно умножаться или делиться на любое положительное число. При этом получаются точки, лежащие на том же градиенте, но с другим шагом. Эта процедура заключается в том, чтобы к нулевому уровню последовательно алгебраически прибавлять величины, пропорциональные составляющим градиента.

На расчет градиента не оказывает влияние b_0 . Для качественных факторов на двух уровнях либо фиксируется лучший уровень, либо градиент реализуется дважды для каждого уровня в отдельности. Незначимые факторы стабилизируются на любом уровне в интервале $+1$. Если нет специальных соображений, то выбирают нулевой уровень. В движении по градиенту эти факторы не участвуют.

6.4. РАСЧЕТ КРУТОГО ВОСХОЖДЕНИЯ

Метод крутого восхождения объединяет характерные элементы методов Гаусса–Зейделя и градиента. Так, шаговое движение при оптимизации методом крутого восхождения осуществляется в направлении наибольшего изменения функции, т.е. в направлении градиента, но в отличие от метода градиента корректирование направления движения производится не после каждого шага, а после достижения частного экстремума функции, как это делается при поиске оптимума по методу Гаусса–Зейделя.

Метод крутого восхождения предполагает регулярное проведение анализа промежуточных результатов на пути к экстремуму. Расчет крутого восхождения осуществляется по следующей схеме (рис. 6.4).

1. Вблизи исходной точки x_0 проводится эксперимент.

Результаты эксперимента подвергаются статистическому анализу и определяются коэффициенты b_i уравнения регрессии.

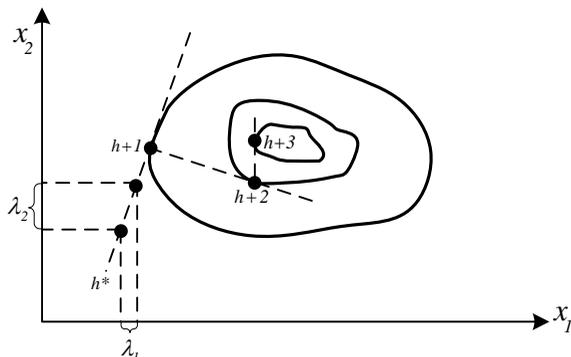


Рис. 6.4. Поиск экстремума функции отклика методом кругового восхождения

2. Вычисляются произведения $b_i \Delta x_i$, где Δx_i – интервал варьирования фактора x_i при исследовании поверхности отклика в окрестности исходной точки, т.е. при определении коэффициентов b_i . Фактор, для которого произведение $b_i \Delta x_i$ будет максимальным, принимается за базовый ($b_\delta \Delta x_\delta$).

3. Для базового фактора выбирается шаг варьирования при движении по направлению к экстремуму λ_δ . После этого вычисляются размеры шагов при крутом восхождении по остальным переменным (λ_i) процесса. Так как при движении к экстремуму по градиенту все исследуемые факторы должны изменяться пропорционально коэффициентам наклона поверхности отклика b_i , то

$$\lambda_i = \frac{b_i \Delta x_i}{|b_\sigma \Delta x_\sigma|}. \quad (6.2)$$

При этом b_i берется со своим знаком.

4. Производятся так называемые «мысленные опыты», которые заключаются в вычислении предсказанных значений функции отклика в точках факторного пространства, лежащих на пути к экстремуму от исходной точки. Иными словами, осуществляется мысленное движение по градиенту к оптимуму в соответствии с выражением (6.2). При этом i -я координата h - q точки на этом пути будет

$$x_{hi} = x_{1h} + h \frac{\lambda_i}{\Delta x_i}, \quad h = 1, 2, \dots, m, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Отсюда прогнозируемое значение выходного параметра

$$\gamma_{\text{нпр}} = b_0 + h \sum_{i=1}^n b_i \frac{\lambda_i}{\Delta x_i}. \quad (6.3)$$

5. Некоторые из «мысленных опытов» (обычно через 2...5) реализуются для того, чтобы проверить соответствие аппроксимации процесса найденной зависимостью. Наблюдаемые значения сравниваются с предсказанными; точка, где в реальном опыте получено наиболее благоприятное (минимальное или максимальное) значение выходного параметра, принимается за новую начальную точку (x_n) следующей серии опытов, поставленных аналогичным образом.

6. Поскольку каждый цикл крутого восхождения приближает нас к экстремуму, где крутизна поверхности отклика больше, рекомендуется выбирать шаг для каждой следующей серии опытов равным или меньшим, чем в предыдущей.

7. Эксперимент прекращается, когда все или почти все коэффициенты b_i уравнения получаются незначимыми или равными нулю. Это говорит о выходе в оптимальную область целевой функции (область главного экстремума).

Метод позволяет, с одной стороны, достаточно быстро достичь экстремума, а с другой – определить характер и силу влияния тех или иных факторов, т.е. этот метод позволяет не только оптимизировать процесс, но и исследовать его.

6.5. ПЛАНИРОВАНИЕ ИСПЫТАНИЙ В ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ УСЛОВИЯХ

В случае отсутствия математической модели управление производственными процессами (эксплуатацией) требует периодического проведения активного эксперимента с целью поиска оптимальных значений целевой величины процесса. Возможности экспериментирования на действующих установках, как правило, ограничены. Поэтому для промышленных условий разработаны специальные приемы исследования, требующие небольшого числа опытов и связанные с незначительными отклонениями от номинальных режимов ведения процессов. К таким методам относятся последовательный симплексный метод и метод эволюционного планирования (ЭВОП).

6.5.1. Последовательный симплексный метод

Симплексом называется k -мерный выпуклый многогранник, имеющий $k + 1$ вершин. Симплекс называется регулярным, если все расстояния между его вершинами равны. Симплексом нулевой размерности является точка, одномерным симплексом – отрезок прямой, двумерным – треугольник, трехмерным – тетраэдр и т.д.

Во всех рассмотренных ранее методах оптимизации можно выделить пробные эксперименты, предназначенные для выявления направления движения, и рабочие шаги, выполняющие продвижение к экстремуму. Особенностью симплексного метода оптимизации является совмещение процессов изучения поверхности отклика и продвижения по ней к экстремуму. Это достигается тем, что эксперименты ставятся в точках факторного пространства, соответствующих вершинам симплексов.

Действительно, после проведения исходной серии опытов, поставленных в вершинах правильного двухмерного симплекса, выявляется точка, соответствующая условиям, при которых получаются наихудшие результаты. Далее используется важное свойство симплекса, по которому из любого симплекса можно, отбросив одну из вершин, получить новый, заменив отброшенную вершину ее зеркальным отражением относительно противоположной его грани. Если теперь отбросить точку с наихудшими результатами и построить на оставшейся грани новый симплекс, то очевидно, что центр нового симплекса будет смещен в направлении к экстремуму (рис. 6.5). Затем процесс отбрасывания вершины с наихудшим значением целевой функции и построения нового симплекса повторяется. В результате этого образуется цепочка симплексов, перемещающихся в факторном пространстве к точке экстремума.

Таким образом, движение к экстремуму осуществляется путем зеркального отражения точки с наихудшими результатами относительно центра противоположной грани симплекса с $(k + 1)$ -й вершиной (рис. 6.5).

Для приведенного на рисунке движения к экстремуму наихудшие результаты в опытах определялись для точек: 1, 3, 4, 2, 6, 5, 8. Условия проведения опыта в отраженной точке определяются выражением

$$x_{(k+2)i} = 2x_{0i} \pm x_{hi}, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

где $x_{(k+2)i}$ — i -я координата новой точки; x_{hi} — i -я координата точки с наихудшими результатами; x_{0i} — i -я координата центра противоположной грани, которая определяется по формуле

$$x_{0i} = \frac{\sum_{i=1}^{i=k+1} x_i}{k}, \quad i \neq h.$$

В числителе выражения суммируются координаты всех точек симплекса с $(k + 1)$ -й вершиной, кроме координаты точки с наихудшими результатами ($i = h$). Новый k -мерный симплекс получается из оставшейся грани добавлением к ней отраженной точки. Следует подчеркнуть, что это перемещение к экстремуму происходит с каждым экспериментом.

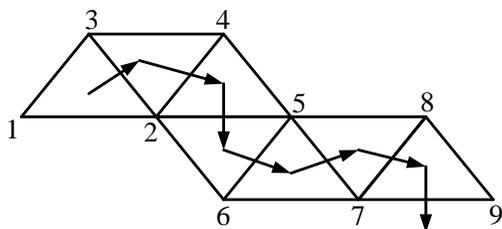


Рис. 6.5. Схема движения симплекса в направлении градиента (7 симплексов)

Показателем выхода в район экстремума служит прекращение поступательного движения симплекса и начало вращения его вокруг одной из вершин, т.е. одна и та же точка последовательно встречается более чем в $(k + 1)$ -х симплексах. Следует подчеркнуть, что направление движения к оптимуму, определяемое с помощью симплекса, является в общем случае не самым крутым, траектория движения в этом случае представляет собой ломаную линию, колеблющуюся вокруг линии наиболее крутого восхождения. Следует подчеркнуть, что симплексный метод является методом оптимизации, а не исследования объектов.

Метод, как и другие приемы статистической обработки данных и планирования эксперимента, принесет хорошие плоды только в сочетании с глубоким знанием объекта исследования и широким использованием всей ранее полученной информации о нем. Преимущества последовательного симплексного метода:

- число необходимых опытов при определении направления движения мало по сравнению с другими планами. Каждый дополнительный фактор требует постановки только одного дополнительного опыта;
- метод чрезвычайно прост с точки зрения объема вычислений;
- ограничения на область изменения факторов легко учитываются при движении симплекса;
- чем больше число факторов, тем выше эффективность метода;
- легко включать или исключать из рассмотрения те или иные переменные в ходе применения метода.

Недостатки:

- реализация метода не дает информации о влиянии каждого фактора на целевую функцию;
- движение по правилам симплексного метода дает ограниченное представление о характере поверхности отклика.

6.5.2. Метод эволюционного планирования

С помощью метода эволюционного планирования (ЭВОП) путем незначительных возмущений, постоянно и целенаправленно вносимых в производственный процесс, извлекается информация, используемая для поиска оптимальных режимов процесса.

В промышленных условиях допускаются лишь малые изменения режимов, в то время как ошибки измерения целевых величин могут быть достаточно велики. Поэтому существенной особенностью ЭВОП метода является возможность надежного выявления малых изменений полезного сигнала на фоне шума. В методе ЭВОП это достигается повторением опытов плана эксперимента p раз. Однократная реализация плана эксперимента в методе ЭВОП называется циклом, а совокупность p реализаций одного и того же плана называют фазой исследования. В одной фазе делается столько циклов, сколько необходимо для того, чтобы на фоне помех обнаружить значимый эффект от воздействия одной или нескольких переменных на целевую функцию и обеспечить возможность значимого улучшения целевой величины.

По окончании фазы выбирают новые базовые значения для варьируемых переменных, составляется и p раз реализуется новый план эксперимента. В качестве планов эксперимента в методе ЭВОП применяются планы полного и дробного факторного эксперимента, которые дополняются опытом в центре плана. Общее число опытов при использовании полного факторного эксперимента равно $N = 2^n + 1$. Для двух независимых переменных такой план состоит из пяти, а для трех – из девяти опытов. Наиболее удобно пользоваться этим методом, когда одновременно варьируют две или три переменные.

Регистрация и обработка результатов эксперимента проводятся с помощью специальных рабочих листов.

Эффект некоторого фактора (численно равен удвоенному коэффициенту уравнения регрессии) определяется по приращению значения целевой величины в результате перехода фактора с нижнего уровня на верхний.

В случае двух факторов (рис. 6.6) эффект переменной x_2 равен полуразности сумм целевых величин в точках 3, 4 и 2, 5, а эффект переменной x_1 определяется полуразностью сумм целевых величин в точках 3, 5 и 2, 4. Эффект взаимодействия равен полуразности сумм целевых величин точек 2 и 3 и точек 4 и 6. Для определения эффекта изменения среднего значения из суммы целевых величин в точках 2, 3, 4 и 5 вычитают учетверенное значение целевой величины в точке 1 и делят полученный результат на 6.

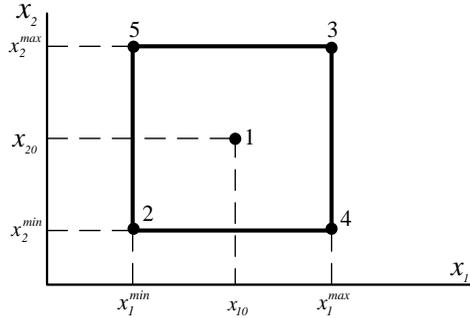


Рис. 6.6. План эксперимента для метода ЭВОП ($n = 2$)

Разность между средним значением целевой величины по наблюдениям во всех точках плана и по всем циклам и средним значениям целевой величины в центре плана

$$\Delta m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_m^i - y_m^1)$$

характеризует вид поверхности в области экспериментирования.

Если Δm значимо меньше нуля, мы имеем дело с максимумом; если Δm значимо больше нуля, – с минимумом. Если же Δm незначимо отличается от нуля, то поверхность отклика в данной области либо, описывается плоскостью, либо имеет седловую точку.

6.6. АЛГОРИТМ РАСЧЕТА МЕТОДОМ РАВНОМЕРНОГО ПОИСКА (ЭКВИДИСТАНТНЫЕ ПЛАНЫ)

Сканирование или равномерный поиск является примером одно-временного поиска, когда точки, в которых вычисляется значение функции, выбираются заранее. Начальный интервал неопределенности $[a_1, b_1]$ делится на отрезки величиной δ сеткой из точек $a_1 + k\delta$ для $k = 1, \dots, N$. Тогда $b_1 = a_1 + (N - 1)\delta$. Затем функция $f(x)$ вычисляется в каждой из n точек сетки и определяется x^* , в которой она имеет наименьшее (наибольшее) значение. Если $f(x)$ унимодальна, то минимум принадлежит интервалу $[x^* - \delta, x^* + \delta]$. После N вычислений функции интервал $[a_1, b_1]$ сокращен до длины 2δ .

Алгоритм метода равномерного поиска.

Шаг 1. Выбрать отрезок разбиения $\delta = (b - a)/(N - 1) > 0$ и начальный интервал $[a_1, b_1]$. Задать $k = 1$ и перейти ко второму шагу.

Шаг 2. Вычислить значения $x = a_1 + k\delta$ и $f(x)$. Если $k = n$, то перейти к шагу 3, иначе положить $k = k + 1$ и вернуться к шагу 1.

6.1. Результаты расчетов методом сканирования

№	x	$f(x)$
1	0	15
2	20	12
3	40	7
4	60	11
5	80	13
6	100	16

Шаг 3. Выбрать минимальное (максимальное) значение функции $f(x)$ и соответствующее ему значение x^* . Минимум (максимум) функции находится в интервале $[x^* - \delta, x^* + \delta]$.

Реализация метода сканирования (равномерный поиск). Выбираем начальный интервал $[0, 100]$ и количество разбиений $N = 6$, тогда $\delta = (b - a)/(N - 1) = 20$. Результаты расчетов точек и значений функции представлены в табл. 6.1.

В результате реализации метода сканирования получена минимальная точка $x^* = 40$, значение функции в которой составляет $f(x) = 7$. Границами интервала являются две точки по обе стороны от минимальной. Исходя из этого, делаем вывод, что экстремум находится в интервале $[a_1, b_1] = [20, 60]$. Этот интервал можно использовать в качестве начального при реализации других методов одномерной оптимизации. Мера эффективности данного метода равна

$$\vartheta = \frac{|b - a|}{|b_1 - a_1|} = \frac{(100 - 0)}{(60 - 20)} = 2,5, \quad \vartheta = (N - 1)/2 = (6 - 1)/2 = 2,5.$$

6.7. АЛГОРИТМ РАСЧЕТА МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ДИХОТОМИЧЕСКОГО ПОИСКА (ПОЛОВИННОГО ДЕЛЕНИЯ)

Метод половинного деления является процедурой последовательного поиска. Используется стратегия выбора точек x_1 и y_1 на интервале $[a_1, b_1]$. Это может быть достигнуто расчетом точек x_1 и y_1 , симметрично расположенных на расстоянии $\varepsilon > 0$ от середины интервала каждая. Здесь число $\varepsilon > 0$ настолько мало, чтобы длина нового интервала $\varepsilon + (b_1 - a_1)/2$ являлась достаточно близкой к значению $(b_1 - a_1)/2$ и в то же время, чтобы значения функций $f(x_1), f(y_1)$ были различны.

6.2. Расчет экстремума функции $f(x) = x^2 - 3x + 2$ методом половинного деления

№	a_k	b_k	x_k	y_k	$f(x_k)$	$f(y_k)$	$ b - a $	Точность
1	10,000	10,000	-0,005	0,005	2,015	1,985	20,000	Не достигнута
2	-0,005	10,000	4,993	5,003	11,948	12,018	10,005	Не достигнута
3	-0,005	5,003	2,494	2,504	0,738	0,758	5,008	Достигнута

Алгоритм метода половинного деления.

Шаг 1. Выбрать константу $\varepsilon > 0$. Выбрать константу $2\varepsilon > 0$, допустимую конечную длину интервала $l > 0$, начальный интервал $[a_1, b_1]$.

Шаг 2. Вычислить

$$x_k = \frac{a_k + b_k}{2} - \varepsilon; \quad y_k = \frac{a_k + b_k}{2} + \varepsilon$$

и перейти к шагу 3.

Шаг 3. Если $f(x_k) < f(y_k)$, то $a_{k+1} = a_k$ и $b_{k+1} = y_k$. В противном случае положить $a_{k+1} = x_k$ и $b_{k+1} = b_k$. Заменить $k = k + 1$ и перейти к шагу 2.

Пример 6.1. Определить экстремум функции $f(x) = x^2 - 3x + 2$ на интервале $[-10; 10]$ с точностью $l = 5$ и константой различимости $\varepsilon = 0,005$.

Результаты расчета с применением EXCEL по алгоритму, рассмотренному выше, представлены в табл. 6.2.

Таким образом, при поиске экстремума функции $f(x) = x^2 - 3x + 2$ методом половинного деления интервал неопределенности составил $[-0,005; 5,003]$. При этом $|b_3 - a_3| = 5,008$, что менее заданной величины точности $l = 1$. Мера эффективности данного метода равна

$$\vartheta = \frac{|b_1 - a_1|}{|b_3 - a_3|} = \frac{10 - (-10)}{5,008} \approx 4, \quad \vartheta = \frac{2^{N/2}}{2} = \frac{2^3}{2} = 4.$$

6.8. АЛГОРИТМ РАСЧЕТА МЕТОДОМ ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ

Представляет дальнейшее развитие метода половинного деления, когда при выполнении каждой итерации осуществляется только один раз расчет значения целевой функции.

Основные соотношения метода вытекают из следующих предположений. Пусть на k -й итерации метода золотого сечения интервал неопределенности равен $[a_k, b_k]$. Точки x_k, y_k выбираются на основе следующих условий:

$$x_k = a_k + (1 - \alpha)(b_k - a_k), \quad y_k = a_k + \alpha(b_k - a_k),$$

где $\alpha \in (0, 1) = 0,618$ – коэффициент сжатия.

Здесь рассмотрена задача деления единичного отрезка в гармоничной пропорции, т.е. целое относится к большей части, как большая часть относится к меньшей части. Из соотношения вытекает следующее алгебраическое уравнение: $\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$ для вычисления искомой пропорции. Корнями уравнения $\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$ являются $\alpha = 0,618$ и $\alpha = -1,618$. Так как α должно быть из интервала $(0, 1)$, то принимаем $\alpha = 0,618$.

Длина нового интервала неопределенности определяется следующим способом: $b_{k+1} - a_{k+1} = \alpha(b_k - a_k)$.

Кроме того, должны выполняться равенства:

$$b_k - x_k = y_k - a_k; \quad x_k = a_k + (1 - \alpha)(b_k - a_k); \quad y_k = a_k + \alpha(b_k - a_k).$$

Для новой итерации x_{k+1} и y_{k+1} выбираются так, что x_{k+1} совпадает с y_k , или y_{k+1} совпадает с x_k . Это условие обеспечивает возможность того, что на $(k + 1)$ -й итерации потребуется только одно новое вычисление функции.

При сравнении значений функции в двух точках возможны два варианта.

1. Если $f(x_k) > f(y_k)$, то в этом случае $a_{k+1} = x_k$ и $b_{k+1} = b_k$.
2. Если $f(x_k) \leq f(y_k)$, то в этом случае $a_{k+1} = a_k$ и $b_{k+1} = y_k$.

На первой итерации метода необходимы два вычисления функции в точках x_1 и y_1 , но на каждой последующей требуется только одно вычисление, так как либо $x_{k+1} = y_k$, либо $y_{k+1} = x_k$.

Алгоритм метода золотого сечения.

Шаг 1. задается конечная длина интервала неопределенности $l > 0$, начальный интервал $[a_1, b_1]$. Вычислить

$$x_1 = a_1 + (1 - \alpha)(b_1 - a_1) \text{ и } y_1 = a_1 + \alpha(b_1 - a_1),$$

приняв $\alpha = 0,618$. Найти $f(x_1)$, и $f(y_1)$. Задать $k = 1$ и перейти к шагу 2.

Шаг 2. Если $b_k - a_k < l$, то остановиться; оптимальная точка принадлежит интервалу $[a_k, b_k]$. При $f(x_k) > f(y_k)$, перейти к шагу 3, если $f(x_k) \leq f(y_k)$, то к шагу 4.

Шаг 3. Положить $a_{k+1} = x_k$; $b_{k+1} = b_k$; $x_{k+1} = y_k$; $f(x_{k+1}) = f(y_k)$.

Вычислить $y_{k+1} = a_{k+1} + \alpha(b_{k+1} - a_{k+1})$.

Вычислить $f(y_{k+1})$ и перейти к шагу 5.

6.3. Расчет экстремума функции $f(x) = x^2 + 2x$ методом золотого сечения

№	a_k	b_k	x_k	y_k	$f(x_k)$	$f(y_k)$	$ b - a $	Критерий точности
1	-3,00	5,00	0,05	1,94	0,11	7,66	8,00	Не достигнут
2	-3,00	1,94	-1,11	0,05	-0,98	0,11	4,94	Не достигнут
3	-3,00	0,05	-1,83	-1,11	-0,30	-0,98	3,05	Не достигнут
4	-1,83	0,05	-1,11	-0,66	-0,98	-0,88	1,88	Достигнут

Шаг 4. Положить $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = y_k$, $y_{k+1} = x_k$, $f(y_{k+1}) = f(x_k)$. Вычислить $x_{k+1} = a_{k+1} + (1 - \alpha)(b_{k+1} - a_{k+1})$. Вычислить $f(x_{k+1})$ и перейти к шагу 4.

Шаг 5. Заменить $k = k + 1$ и перейти к шагу 2.

Пример расчета экстремума функции методом золотого сечения.

Постановка задачи. Минимизировать $f(x) = x^2 + 2x$ на интервале $x \in [-3; 5]$, сократив его до величины $l \leq 2$. Рассчитываем минимум функции $f(x) = x^2 + 2x$ с использованием табличного процессора EXCEL по рассмотренному выше алгоритму. Результаты расчетов представлены в табл. 6.3.

После четырех итераций (пяти вычислений) интервал неопределенности составил $[-1,83; 0,05]$. При этом $|b_4 - a_4| = 1,88$, что меньше заданной величины 2.

Мера эффективности данного метода равна

$$\Theta = \frac{|b_1 - a_1|}{|b_4 - a_4|} = \frac{5 - (-3)}{1,88} \approx 4,25, \quad \Theta = \frac{1}{(0,618)^{4-1}} \approx 4,24.$$

Задание на практическую работу

Используя Microsoft Office Excel с помощью:

- эквиливантного плана;
- последовательного дихотомического поиска;
- правила золотого сечения, требуется после проведения N испытаний ($N = 6$) определить интервал неопределенности (остаточный интервал Δx_N), в котором находится экстремум (максимум) целевой функции $y = -1,5x^2 + 249x + 59$. Исходная область $[a, b]$ составляет $[0, 100]$.

Сравнить меры эффективности данных методов. Построить графики изменения функции на конечном шаге. Провести анализ исследований, сделать выводы.

7. МЕТОДЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ИСПЫТАНИЙ

7.1. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Рассмотрим модель в виде дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_n y^n \dots + a_1 y^1 + a_0 y &= \\ = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0 x. \end{aligned}$$

Идентифицируемыми параметрами являются коэффициенты

$$a_i (i = 1, n) \text{ и } b_j (j = 0, m).$$

Исходной информацией для идентификации являются значения входного $x(t)$ и выходного $y(t)$ сигналов в моменты $t_i (i = 1, N \geq n + m + 1)$ в промежутке наблюдения $[t_0, t_1]$. Предполагаем также, что могут быть определены в эти же моменты времени (изменены или получены путем дифференцирования $x(t)$ и $y(t)$) производные $x^{(j)}(t) (j = 1, m)$ и $y^{(j)}(t), (j = 1, n)$. В результате получаем алгебраическую модель

$$y^{(n)}(t_k) = - \sum_{i=1}^n a_i y^{(i)}(t_k) + \sum_{j=0}^m b_j x^{(j)}(t_k), k = 1, N,$$

с $n + m + 1$ неизвестными.

К этой модели применим формализм методом наименьших квадратов (МНК). Образует целевую функцию

$$\begin{aligned} I(a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m) &= \\ = \sum_{k=1}^N \left[y^{(n)}(t_k) + \sum_{i=1}^n a_i y^{(i)}(t_k) - \sum_{j=0}^m b_j x^{(j)}(t_k) \right]^2 \end{aligned}$$

и составим систему нормальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dI}{da_i} &= 0, i = 1, n, \\ \frac{dI}{db_j} &= 0, j = 0, m. \end{aligned} \right\}$$

Решая эту систему линейных алгебраических уравнений, получим оценки искомых коэффициентов.

Свойства полученных таким образом оценок (смещенность, состоятельность, эффективность, надежность) определяются свойствами и схемой помех, имеющих место при измерении входного и выходного сигналов и их производных.

Пример 7.1. Рассмотрим идентификацию объекта, описываемого уравнением апериодического звена

$$T\dot{y} + y = kx(t).$$

Для этого уравнения целевая функция имеет вид

$$I(T, k) = \sum_{i=1}^N [y_i + T\dot{y}_i - kx_i]^2,$$

где $y_i = y(t_i)$; $\dot{y}_i = \dot{y}(t_i)$; $x_i = x(t_i)$.

Нормальные уравнения

$$\frac{dI}{dT} = 0; \quad \frac{dI}{dk} = 0$$

после дифференцирования функции I и соответствующих преобразований можно записать в форме

$$k \sum_{i=1}^N x_i^2 - T \sum_{i=1}^N \dot{y}_i x_i = \sum_{i=1}^N x_i y_i;$$

$$k \sum_{i=1}^N x_i \dot{y}_i - T \sum_{i=1}^N \dot{y}_i^2 = \sum_{i=1}^N y_i \dot{y}_i,$$

откуда

$$k^* = \frac{\Delta_k}{\Delta}; \quad T^* = \frac{\Delta_T}{\Delta},$$

где $\Delta = (\sum_{i=1}^N \dot{y}_i x_i)^2 - \sum_{i=1}^N x_i^2 \sum_{i=1}^N \dot{y}_i^2$,

$$\Delta_k = - \sum_{i=1}^N x_i y_i \sum_{i=1}^N \dot{y}_i^2 + \sum_{i=1}^N y_i \dot{y}_i \sum_{i=1}^N \dot{y}_i x_i,$$

$$\Delta_T = \sum_{i=1}^N x_i^2 \sum_{i=1}^N y_i \dot{y}_i - \sum_{i=1}^N x_i \dot{y}_i \sum_{i=1}^N x_i y_i.$$

По аналогии со статическим случаем для параметрической идентификации динамических объектов могут быть использованы рекуррентные алгоритмы МНК.

7.2. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ДЛЯ ОДНОГО ФАКТОРА

Широкое применение компьютерных технологий, к которым все чаще обращаются исследователи, способствует использованию в планировании эксперимента матричного описания. Алгебра матриц становится все более универсальным языком современной науки и техники: многие сложные случаи, возникающие в планировании эксперимента. Матричное исчисление покажем на простом численном примере регрессионного анализа. Затем опишем его на матричном языке. Это позволит в дальнейшем сделать некоторые обобщения.

Рассмотрим линейное уравнение для одного фактора (x_1). Предположим, что на основании экспериментов, проведенных в виде пяти опытов (табл. 7.1), следует найти коэффициенты линейного уравнения $y = b_0 + b_1 x_1$.

Определим коэффициенты по формулам, полученным в первой части учебного пособия:

$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^5 y_i \sum_{i=1}^5 x_{1i}^2 - \sum_{i=1}^5 y_i x_{1i} \sum_{i=1}^5 x_{1i}}{5 \sum_{i=1}^5 x_{1i}^2 - \left(\sum_{i=1}^5 x_{1i} \right)^2} = \frac{10 \cdot 10 - 10 \cdot 0}{5 \cdot 10 - 0} = 2;$$

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^5 y_i x_{1i} - \sum_{i=1}^5 y_i \sum_{i=1}^5 x_{1i}}{5 \sum_{i=1}^5 x_{1i}^2 - \left(\sum_{i=1}^5 x_{1i} \right)^2} = \frac{5 \cdot 10 - 10 \cdot 0}{5 \cdot 10 - 0} = 1.$$

Теперь можно написать уравнение $y = 2 + 1x_1$.

С помощью этого примера воспроизведена процедура метода наименьших квадратов. Теперь то же самое выполним с помощью другого матричного способа. С увеличением сложности плана эксперимента преимущества матричного подхода становятся очевиднее, особенно при работе в компьютерной среде MathLab, MathCAD.

7.1. Результаты эксперимента и обработка данных

Номер опыта	x	y	x_1^2	yx_1	y^2	$x_1 + y$	$(x_1 + y)^2$
1	-2	0	4	0	0	-2	4
2	-1	1	1	-1	1	0	0
3	0	2	0	0	4	2	4
4	1	3	1	3	9	4	16
5	2	4	4	8	16	6	36
Σ	0	10	10	10	30	10	60
Средние значения	$\bar{x}_1 = 0$	$\bar{y} = 2$					

В данном примере участвуют три множества элементов:

- 1) элементы, задающие условия проведения опытов X ;
- 2) элементы, характеризующие их результаты Y ;
- 3) неизвестные коэффициенты, которые нужно определить B .

Элементы, характеризующие результаты опытов, и неизвестные коэффициенты можно представить в виде столбцов Y и B соответственно, а элементы, задающие условия опытов, удобно представить в виде таблицы X :

$$Y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

В таблице X появился столбец x_0 , состоящий из 1. Он введен для удобства вычисления всех коэффициентов, включая свободный член b_0 , и теперь исходное уравнение может быть переписано в таком виде: $y = b_0x_0 + b_1x_1$.

Таблицы, в которых собраны упорядоченные некоторым образом элементы, называются матрицами. Следовательно, в нашем случае Y , B и X являются матрицами. Элементы упорядочены по номерам опытов, элементы X , кроме того, по номерам переменных (x_0, x_1) , а элементы B – по номерам коэффициентов, которые соответствуют номерам переменных.

Если матрица имеет всего один столбец, то ее называют матрицей-столбцом или вектор-столбцом. Примерами служат матрицы Y и B .

В рассматриваемом примере на основании исходных данных можно записать систему из пяти уравнений, по одному уравнению для каждого опыта: $y_i = b_0 x_0 + b_1 x_{1i}$ ($i = 1, 2, \dots, 5$), или в развернутой форме

$$\begin{cases} 0 = b_0 \cdot 1 + b_1(-2); \\ 1 = b_0 \cdot 1 + b_1(-1); \\ 2 = b_0 \cdot 1 + b_1 0; \\ 3 = b_0 \cdot 1 + b_1(1); \\ 4 = b_0 \cdot 1 + b_1(2). \end{cases} \quad (7.1)$$

На матричном языке эта система уравнений выглядит следующим образом:

$$Y = XB, \text{ т. е. } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}. \quad (7.2)$$

Чтобы эти две записи стали эквивалентными, необходимо использовать правила перемножения матриц. Элементы первой строки матрицы, стоящей слева, умножаются на соответствующие элементы первого столбца матрицы, стоящей справа, и полученные произведения складываются. Из определения видно, что матрица произведений имеет столько столбцов, сколько матрица, стоящая справа, и столько строк, сколько матрица, стоящая слева. В рассматриваемом примере матрица-произведение имеет один столбец и пять строк, что соответствует размерности матрицы Y . И тогда матрица-произведение имеет вид

$$\begin{bmatrix} b_0 \cdot 1 + b_1(-2); \\ b_0 \cdot 1 + b_1(-1); \\ b_0 \cdot 1 + b_1 0; \\ b_0 \cdot 1 + b_1(1); \\ b_0 \cdot 1 + b_1(2). \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

Сопоставление матрицы-произведения (7.3) с системой уравнений (7.1) выявляет тождественность матричной и нематричной форм записей. Как видим, вектор Y есть матрица произведений в данном случае. В правилах перемножения матриц существуют особенности, не имеющие аналога в числах. Так, безразлично, в каком порядке записаны матрицы в произведении, поэтому умножить матрицу B на матрицу X (BX) невозможно, ибо длины векторов, входящих

в скалярное произведение, должны быть согласованы. В общем случае для произведения матриц коммутативный закон не выполняется.

Система нормальных уравнений метода МНК в данном случае выглядит так:

$$\begin{cases} 5b_0 + 0b_1 = 10; \\ 0b_0 + 10b_1 = 10. \end{cases} \quad (7.4)$$

В матричном виде она запишется следующим образом: $X^T X B = X^T Y$. Здесь X^T обозначает матрицу, транспонированную по отношению к матрице X . Транспонировать матрицу – это значит сделать столбцы исходной матрицы строками транспонированной матрицы, сохранив их последовательность.

Матрица $X^T X$ называется матрицей системы нормальных уравнений. Она обладает следующим важным свойством: два элемента, расположенные симметрично относительно главной диагонали (диагонали, идущей с левого верхнего угла в правый нижний), равны друг другу. В данном случае это нули, что характерно для матриц систем нормальных уравнений МНК, поскольку векторы, входящие в скалярные произведения, коммутативны. Матрица, элементы которой симметричны относительно главной диагонали, называется симметричной. Если все элементы матрицы вне главной диагонали равны нулю, то такая матрица называется диагональной. Диагональная матрица, все элементы которой являются единицами, называется единичной.

$$X^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Для получения системы нормальных уравнений в матричном виде следует умножить обе части исходной системы уравнений (7.2) слева на X^T :

$$X^T Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Теперь на основании полученных матриц систему уравнений можно записать так:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}. \quad (7.5)$$

Решить систему нормальных уравнений – это значит записать в явном виде элементы вектора $B(b_0, b_1)$. Для матриц вместо деления используется специальная операция умножения на обратную матрицу. Задача состоит в том, чтобы превратить матрицу, стоящую перед матрицей неизвестных коэффициентов, в единичную E . Тогда умножение вектора B на единичную матрицу его не изменит, а чтобы равенство не нарушилось, и правую часть придется домножить на соответствующую матрицу.

Если условиться обозначать обратную матрицу степенью -1 , то предыдущие рассуждения приведут к следующей записи: $(X^T X)^{-1} (X^T X) B = (X^T X)^{-1} X^T Y$. Здесь система нормальных уравнений МНК умножена слева на матрицу, обратную к матрице системы нормальных уравнений.

Произведение обратной матрицы на прямую справа равно единичной матрице, которую условимся обозначать E :

$$E = (X^T X)^{-1} (X^T X).$$

В этом равенстве участвуют три матрицы. Матрица системы нормальных уравнений $X^T X$, которую называют прямой матрицей, $(X^T X)^{-1}$, – обратная матрица. Перепишем это равенство для нашей задачи

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}. \quad (7.6)$$

Неизвестные элементы обратной матрицы обозначены a_{ij} , где $i = 1, 2$, соответствует строке, а $j = 1, 2$ – столбцу. Найдем эти элементы

$$\begin{aligned} 1 &= a_{11} \cdot 5 + a_{12} \cdot 0; \\ 0 &= a_{21} \cdot 5 + a_{22} \cdot 0; \\ 0 &= a_{11} \cdot 0 + a_{12} \cdot 10; \\ 1 &= a_{21} \cdot 0 + a_{22} \cdot 10. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $a_{11} = 1/5$, $a_{12} = 0$, $a_{21} = 0$, $a_{22} = 1/10$. Запишем обратную матрицу

$$(X^T X)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 1/10 \end{bmatrix}. \quad (7.7)$$

Лишь благодаря простоте примера можно было воспользоваться столь элементарной процедурой. В общем случае приходится прибегать к более сложным алгоритмам и вычислительной технике. Отметим некоторые существенные свойства обратной матрицы. Произведение прямой и обратной матриц коммутативно. Если прямую матрицу обозначить A , то

$$A A^{-1} = A^{-1} A = E.$$

Матрица, обратная к симметричной, тоже будет симметрична. На главной диагонали матрицы, обратной к диагональной, будут

стоять числа, обратные соответствующим числам, стоящим на диагонали прямой матрицы.

Продолжим вычисление для примера. Подставим известные матрицы в уравнение для вектора коэффициентов

$$B = (X^T X)^{-1} X^T Y. \quad (7.8)$$

Имеем

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 1/10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Осталось перемножить матрицы и получить

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 \cdot 10 & +0 \cdot 10 \\ 0 \cdot 10 & +1/10 \cdot 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (7.9)$$

Две матрицы равны, когда равны их соответствующие элементы, поэтому $b_0 = 2$, $b_1 = 1$. Таким образом получен результат, совпадающий с полученным ранее без использования матриц.

Введем еще одно важное понятие: каждой квадратной матрице можно поставить в соответствие некоторое число, называемое определителем этой матрицы. Определитель представляет собой алгебраическую сумму всех возможных произведений, в каждое из которых входит по одному элементу от каждой строки и от каждого столбца. Причем знак произведения («+») или («-») зависит от положения элементов данного произведения матрицы.

Посчитаем определитель для матрицы системы нормальных уравнений. Здесь возможны два произведения, каждое из которых содержит два сомножителя $5 \cdot 10 = 50$ и $0 \cdot 0 = 0$.

Определитель принято обозначать $\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} = 50 - 0 = 50$ или $\det \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} = 50$ (det – определитель). Вычислим определитель обратной матрицы

$$\begin{vmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 1/10 \end{vmatrix} = \frac{1}{50} - 0 = \frac{1}{50}.$$

Между определителями прямой и обратной матриц существует в данном случае простое соотношение: они являются взаимнообратными числами. Такое соотношение выполняется и в общем случае.

Определитель может быть любым действительным числом, как положительным, так и отрицательным. Он может оказаться и равным нулю. С последним случаем связаны некоторые особенности свойств матрицы. Матрица, определитель которой равен нулю, не имеет

обратной. Такую матрицу называют особенной, вырожденной или сингулярной. Если же определитель матрицы не равен нулю, то матрица называется неособенной, невырожденной или несингулярной.

Значит, решение системы нормальных уравнений возможно только тогда, когда матрица невырождена, т.е. $\det(X^T X) \neq 0$. Это предполагалось и имело место в нашем примере.

7.3. ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ НА МНОГОФАКТОРНЫЙ СЛУЧАЙ

Пусть имеется k факторов и известно, что отклик и факторы связаны линейно: $y = b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_k x_k$. Выпишем для этого случая матрицы X , Y и B :

$$X = \begin{matrix} \begin{matrix} x_{01} & x_{11} & \dots & x_{k1} \\ x_{02} & x_{12} & \dots & x_{k2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{0N} & x_{1N} & \dots & x_{kN} \end{matrix} \end{matrix}; Y = \begin{matrix} \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{matrix} \end{matrix}; B = \begin{matrix} \begin{matrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{matrix} \end{matrix}.$$

Запишем исходную систему линейных уравнений:

$$Y = XB; \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{01} & x_{11} & \dots & x_{k1} \\ x_{02} & x_{12} & \dots & x_{k2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{0N} & x_{1N} & \dots & x_{kN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix}. \quad (7.10)$$

После преобразований придем к формуле

$$B = (X^T X)^{-1} X^T Y;$$

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} x_{01} & x_{02} & \dots & x_{0N} \\ x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{k1} & x_{k2} & \dots & x_{kN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{01} & x_{11} & \dots & x_{k1} \\ x_{02} & x_{12} & \dots & x_{k2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{0N} & x_{1N} & \dots & x_{kN} \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x_{01} & x_{02} & \dots & x_{0N} \\ x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{k1} & x_{k2} & \dots & x_{kN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}. \quad (7.11)$$

Скалярные произведения удобно представлять в виде сумм, т.е. матрицу системы нормальных уравнений можно записать в следующем виде:

$$X^T X = \begin{bmatrix} \sum x_0^2 & \sum x_0 x_1 & \sum x_0 x_2 & \dots & \sum x_0 x_k \\ \sum x_0 x_1 & \sum x_1^2 & \sum x_1 x_2 & \dots & \sum x_1 x_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum x_0 x_k & \sum x_1 x_k & \sum x_2 x_k & \dots & \sum x_k^2 \end{bmatrix}. \quad (7.12)$$

Аналогично $X^T Y$ есть вектор сумм произведений

$$X^T Y = \begin{bmatrix} \sum yx_0 \\ \sum yx_1 \\ \sum yx_2 \\ \vdots \\ \sum yx_k \end{bmatrix}. \quad (7.13)$$

Пример 7.2. Проведем обработку данных табл. 7.2 матричным способом.

7.2. Матрица планирования эксперимента

Номер опыта	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1	+	+	+	+	+	+	+	+
2	+	+	-	-	-	-	-	+
3	+	-	-	+	+	-	-	+
4	+	-	+	-	-	+	-	+
5	+	-	-	-	+	+	+	-
6	+	-	+	+	-	-	+	-
7	+	+	+	-	+	-	-	-
8	+	+	-	+	-	+	-	-

Чтобы получить вектор B , остается обратить матрицу $X^T X$ и умножить обратную матрицу на $X^T Y$:

$$X = \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 \end{bmatrix};$$

$$X^T = \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix};$$

$$X^T X = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix};$$

$$(X^T X)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/8 \end{bmatrix}; \quad X^T Y = \begin{bmatrix} \sum y_i x_{0i} \\ \sum y_i x_{1i} \\ \sum y_i x_{2i} \\ \sum y_i x_{3i} \\ \sum y_i x_{4i} \\ \sum y_i x_{5i} \\ \sum y_i x_{6i} \\ \sum y_i x_{7i} \end{bmatrix}.$$

Аналогичным путем можно оценить эффекты взаимодействия, входящие в модель. Для этого надо расширить матрицу X , включив в нее столбцы взаимодействий, все остальные операции производятся совершенно аналогично. В векторе Y появляются при этом элементы, соответствующие эффектам взаимодействий. Расширение матрицы X подобным образом называют линеаризацией. Это эквивалентно замене эффектов взаимодействия новыми линейными членами. Подобная

процедура возможна только тогда, когда все коэффициенты входят в уравнение линейно. Такие уравнения называются линейными по параметрам, и только они нами рассматриваются.

7.4. СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ В МАТРИЧНОЙ ФОРМЕ

Перейдем к статистическому анализу в матричной форме. Будем предполагать, что постулаты регрессионного анализа выполняются. Провести статистический анализ, значит проверить ряд статистических гипотез: гипотезу об адекватности заданной модели, гипотезы о значимости отдельных коэффициентов регрессии и др.

Фундаментальную роль в анализе уравнения регрессии играет матрица

$$M^{-1} = (X^T X s_{\{y\}}^2)^{-1}, \quad (7.14)$$

которая называется матрицей дисперсий-ковариаций. Прямая матрица M называется информационной матрицей.

В структуре матрицы дисперсий-ковариаций содержится вся информация о статистических свойствах модели. Провести статистический анализ, значит извлечь эту информацию. Для этого перейдем от матрицы, обратной к матрице системы нормальных уравнений, к матрице M^{-1} . Оценка дисперсии воспроизводимости $s_{\{y\}}^2$ – скаляр; $X^T X$ – квадратная матрица. Умножить матрицу на скаляр – значит умножить на этот скаляр каждый элемент матрицы.

Полученные таким образом произведения имеют определенный статистический смысл. Так, на главной диагонали матрицы-произведения стоят оценки дисперсий коэффициентов регрессии, S_{bi} вне главной диагонали расположены оценки ковариаций.

Чтобы понять, что такое ковариация, рассмотрим два произвольных вектор-столбца матрицы X . Во многих случаях важно знать, сколь сильна линейная связь между этими векторами. Ковариация является одной из мер такой связи. Чтобы найти ковариацию, сначала центрируют оба вектора, а затем вычисляют их скалярное произведение. Центрирование используется для устранения неопределенности, связанной с выбором начала координат. Ковариация определяется по формуле

$$\text{cov}\{x_1 x_2\} = \sum_{i=1}^N (\bar{x}_{1i} - x_{1i})(\bar{x}_{2i} - x_{2i}). \quad (7.15)$$

Построим матрицу M^{-1} для однофакторной линейной модели. Информационная матрица M равна

$$M = (X^T X s_{\{y\}}^2) = \begin{bmatrix} N & \sum x_{1i} \\ \sum x_{1i} & \sum x_{1i}^2 \end{bmatrix} s_{\{y\}}^2. \quad (7.16)$$

Матрица дисперсий-ковариаций M^{-1} равна

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sum x_{1i}^2}{N \sum x_{1i}^2 - (\sum x_{1i})^2} s_{\{y\}}^2 - \frac{\sum x_{1i}}{N \sum x_{1i}^2 - (\sum x_{1i})^2} s_{\{y\}}^2 & \\ -\frac{\sum x_{1i}}{N \sum x_{1i}^2 - (\sum x_{1i})^2} s_{\{y\}}^2 & \frac{N}{N \sum x_{1i}^2 - (\sum x_{1i})^2} s_{\{y\}}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{\{b_0\}}^2 & \text{cov}\{b_0, b_1\} \\ \text{cov}\{b_0, b_1\} & s_{\{b_1\}}^2 \end{bmatrix}. \quad (7.17)$$

Ортогональные планы обладают тем свойством, что ковариации между всеми парами коэффициентов регрессии равны нулю. Это можно проиллюстрировать примером для эксперимента, состоящего из восьми опытов $N = 8$:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} s_{\{y\}}^2 / 8 & & & & & & & \\ & s_{\{y\}}^2 / 8 & & & & & & 0 \\ & & s_{\{y\}}^2 / 8 & & & & & \\ & & & s_{\{y\}}^2 / 8 & & & & \\ & & & & s_{\{y\}}^2 / 8 & & & \\ & & & & & s_{\{y\}}^2 / 8 & & \\ & 0 & & & & & s_{\{y\}}^2 / 8 & \\ & & & & & & & s_{\{y\}}^2 / 8 \end{bmatrix} \quad (7.18)$$

(так принято сокращенно записывать квадратные матрицы, когда все внедиагональные элементы равны нулю). В этом примере $s_{\{y\}}^2 = 1$ и поэтому дисперсии b -коэффициентов $s_{\{b_j\}}^2 = 0,125$. Формула выглядит следующим образом:

$$s_{\{b_j\}}^2 = s_{\{y\}}^2 / N,$$

которая уже фигурировала раньше. Она справедлива для ортогональных планов.

Рассмотрим теперь проверку адекватности линейного уравнения регрессии. Дисперсия адекватности равна

$$s_{\text{ад}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2}{N - (k + 1)}.$$

Числитель этого выражения – остаточная сумма квадратов – в матричной форме имеет вид

$$\sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2 = (Y - \hat{Y})^T (Y - \hat{Y}) = Y^T Y - B^T X^T Y.$$

Приведем конкретный пример расчета остаточной суммы квадратов (табл. 7.3).

7.3. Расчет остаточной суммы квадратов

Номер опыта	x_i	x_1	x_2	y	\hat{y}	$y - \hat{y}$	$(y - \hat{y})^2$
1	+	-	+	5,0	4,5	0,5	0,25
2	+	+	+	0,0	0,5	-0,5	0,25
3	+	-	-	5,0	5,5	-0,5	0,25
4	+	+	-	2,0	1,5	0,5	0,25

Линейное уравнение регрессии имеет вид

$$\hat{y} = 3 - 2x_1 - 0,5x_2.$$

Обычный способ вычисления остаточной суммы дает

$$\sum_{i=1}^4 (y_i - \hat{y}_i)^2 = (0,25 + 0,25 + 0,25 + 0,25) = 1,00.$$

Воспользуемся теперь матричной записью. Для этого придется ввести еще одну матричную операцию – операцию вычитания. Разностью двух матриц одинакового размера называется матрица, элементы которой являются разностями соответствующих элементов матриц уменьшаемого и вычитаемого, взятых в том же порядке

$$Y - \hat{Y} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4,5 \\ 0,5 \\ 5,5 \\ 1,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +0,5 \\ -0,5 \\ -0,5 \\ +0,5 \end{bmatrix}.$$

Транспонирование и перемножение дают аналогичный результат

$$(Y - \hat{Y})^T (Y - \hat{Y}) = [+0,5 - 0,5 - 0,5 + 0,5] \begin{bmatrix} +0,5 \\ -0,5 \\ -0,5 \\ +0,5 \end{bmatrix} = 0,25 + 0,25 + 0,25 + 0,25 = 1.$$

8. ОПТИМАЛЬНЫЕ ПЛАНЫ ИСПЫТАНИЙ

8.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

Будем полагать, что вид модели задан, а обработка экспериментальных данных осуществляется с помощью метода наименьших квадратов (МНК). Основное внимание уделим здесь вопросам выбора наилучшего плана эксперимента, причем качество плана будем рассматривать с точки зрения достигаемой точности модели.

Легко показать, что точность оценок коэффициентов, получаемых из экспериментальных данных, существенно зависит от расположения точек в факторном пространстве. Действительно, пусть ищется оценка коэффициента, связывающего переменные x и y (рис. 8.1). Истинная зависимость представлена здесь прямой 1. Пусть в точках x^1 и x^2 поставлены опыты, по результатам которых построена прямая 2. Если бы те же экспериментальные ошибки имели место при постановке двух опытов в точках x^3 и x^4 , то результат получился бы в виде прямой 3. Видно, что прямая 3 значительно ближе к истинной зависимости, хотя ошибки эксперимента остались теми же. Эффект повышения точности в данном случае явился результатом разнесения экспериментальных точек, или, в общем случае, результатом изменения условий проведения экспериментов.

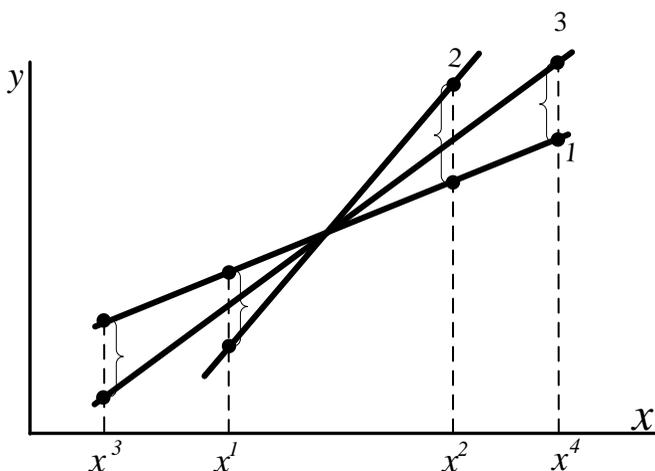


Рис. 8.1. Влияние выбора условий эксперимента на точность модели

В практических задачах области варьирования факторов некоторым образом ограничены Ω_x – областью возможных значений варьируемых переменных. Задача планирования заключается в том, чтобы наилучшим образом расположить экспериментальные точки в области Ω_x .

Построение плана эксперимента можно интерпретировать как выбор строк матрицы X , их числа и последовательности проведения. Этот выбор осуществляется разными способами и позволяет получить требуемые результаты, затратив минимальные средства и время на проведение исследования.

Множество всех точек проведения экспериментов

$$x^i = (x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i), i = 1, 2, \dots, N,$$

представляется с помощью матрицы плана

$$X = (x_j^i) = \begin{bmatrix} x_1^1 x_2^1 & \dots & x_n^1 \\ x_1^2 x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^N x_2^N & \dots & x_n^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x^1)^1 \\ (x^2)^1 \\ \vdots \\ (x^N)^1 \end{bmatrix}$$

и называется планом эксперимента.

Все точки x^i плана X должны принадлежать области Ω_x . Это требование мы будем записывать следующим образом: $x_i \in \Omega_x$ или $X \in \Omega_x$. Независимые переменные x называют факторами. Область планирования эксперимента может быть задана, например, с помощью неравенств $-1 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n$. В этом случае говорят, что областью планирования является гиперкуб. В выражении предельные (максимальное и минимальное) значения варьируемых переменных обозначены через $+1$ и -1 соответственно. Эти границы отвечают стандартизованному или нормированному масштабу изменения переменных. Переход к стандартизованному масштабу может быть осуществлен, например, следующим образом:

$$x_i = \frac{x_i^* - \frac{x_{i \max}^* + x_{i \min}^*}{2}}{\frac{x_{i \max}^* - x_{i \min}^*}{2}}.$$

В формуле x_i^* – значение i -й переменной в натуральном масштабе измерения.

Оптимальное планирование связано с разработкой планов, представляемых в некоторой стандартной форме. При этом целесообразно рассматривать центральные планы. Точка

$$x^0 = N^{-1} \sum_{i=1}^N x^i$$

называется центром плана (центральной точкой плана). Каждая координата x_i^0 вектора x^0 является средним значением i -х координат всех точек плана

$$x_i^0 = \frac{x_i^1 + x_i^2 + \dots + x_i^N}{N}.$$

План называется центральным, если его центр расположен в начале координат $x = 0$, т.е. $x^0 = 0$.

Выбором значений факторов необходимо обеспечить экстремальное значение целевой величины $y = \text{extr}$. Разработан ряд критериев оптимальности планов эксперимента, которые существенным образом зависят от конкретных особенностей исследуемого объекта.

Одной из важнейших характеристик плана, влияющей, с одной стороны, на стоимость и длительность исследования, а с другой – на точность результатов, является число опытов. Заметим, что план с минимально возможным числом опытов $N = k + 1$ (насыщенный план) не позволяет проверить адекватность модели. Поэтому обычно выбирают $N > k + 1$, где $k + 1$ – число оцениваемых параметров модели.

Важное значение для оценки качества плана эксперимента имеет вид информационной матрицы плана $M = X^T X$ размера $(k + 1) \times (k + 1)$. Матрица M должна быть невырожденной, т.е. $|M| \neq 0$. Только в этом случае система линейных уравнений, к которой приводит критерий наименьших квадратов, имеет единственное решение. Фундаментальную роль в анализе уравнения регрессии играет матрица

$$M^{-1} = (X^T X S_{\{y\}}^2)^{-1},$$

которая называется матрицей дисперсий-ковариаций.

8.2. ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ И РОТАТАБЕЛЬНОСТЬ ПЛАНОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

Критерий ортогональности требует такого выбора плана X для оценки коэффициентов модели, при котором информационная матрица плана диагональна.

Использование критерия ортогональности имеет целью упрощение вычислений и получение независимых оценок коэффициентов. При ортогональном планировании матрица является диагональной и,

следовательно, ковариации оценок коэффициентов равны нулю. Это значит, например, что замена нулем любого коэффициента в уравнении модели не изменит значений оценок остальных коэффициентов. Такое свойство ортогональных планов оказывается очень полезным, когда точный вид модели неизвестен, и исследователь использует экспериментальные данные для отбора переменных, существенно влияющих на выходную величину.

План X называется ортогональным, если информационная матрица M диагональная:

$$M = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N x_0^2(j) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_{j=1}^N x_1^2(j) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{j=1}^N x_k^2(j) \end{bmatrix} \cdot S_{\{y\}}^2.$$

Пример 8.1. Пусть модель имеет вид $y(b, x) = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$. Область планирования Ω_x определяется неравенствами

$$-1 \leq x_1 \leq 1, -1 \leq x_2 \leq 1.$$

Рассмотрим план X при $S_{\{y\}}^2 = 1$. Для коэффициента b_0 в матрицу планирования вводят вектор-столбец фиктивной переменной x_0 , которая принимает во всех опытах значение $+1$.

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & +1 & -1 \\ 1 & -1 & +1 \\ 1 & +1 & +1 \end{bmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что центр плана $x^0 = 0$, и, следовательно, план X – центральный. Определим транспонированную матрицу плана X :

$$X^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Определим информационную матрицу M плана X :

$$M = X^T X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & +1 & -1 \\ 1 & -1 & +1 \\ 1 & +1 & +1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = 4E,$$

где E – единичная матрица.

Информационная матрица M плана X диагональная, и, следовательно, план X ортогонален.

Критерий ротатабельности требует такого расположения экспериментальных точек в области планирования Ω_x , при котором дисперсия воспроизводимости $S_{\hat{y}}^2$ оценки значений выходной переменной в точке x зависит только от расстояния от этой точки до центра плана. Такой критерий хорошо согласуется с требованием равнозначности всех направлений от центра плана.

План X называется ротатабельным, если дисперсия оценки $\hat{y}(x)$ зависимой (выходной) переменной в точке x зависит только от расстояния точки x от центра плана x^0 .

Дисперсия $S_{\hat{y}(x)}^2$ оценки зависимой переменной выражается в виде

$$S_{\hat{y}(x)}^2 = f^T(x)(X^T X)^{-1} f(x) S^2, \quad (8.1)$$

где $(X^T X)^{-1}$ – дисперсионная матрица плана; $f(x)$ – известные функции уравнения регрессии,

$$y(b, x) = b_0 f_0(x) + b_1 f_1(x) + \dots + b_k f_k(x),$$

используя векторные обозначения $y = b^T f(x) = f^T b$,

$$f(x) = (1, x_1, x_2, x_1, x_2, \dots), \text{ т.е. для линейной модели} \\ f_0(x) = x_0; f_1(x) = x_1; f_2(x) = x_2.$$

Обозначим расстояние точки x от центра плана x^0 через r :

$$r = \sqrt{(x - x^0)^T (x - x^0)} = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2}. \quad (8.2)$$

Тогда условие ротатабельности плана имеет вид

$$f^T(x)(X^T X)^{-1} f(x) = \text{const}, \quad (8.3)$$

при $r = \sqrt{(x - x^0)^T (x - x^0)} = \text{const}$.

Ротатабельные планы обеспечивают одно и то же значение дисперсии оценки целевой величины во всех точках, равноудаленных от центра плана.

Пример 8.2. Пусть модель имеет вид

$$y(b, x) = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2,$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & +1 & -1 \\ 1 & -1 & +1 \\ 1 & +1 & +1 \end{bmatrix}.$$

Информационная матрица M плана X

$$X^T X = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & +1 & -1 \\ 1 & -1 & +1 \\ 1 & +1 & +1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4E,$$

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}; f^T = [1 \ x_1 \ x_2].$$

Можем определить дисперсионную матрицу плана:

$$X^T X = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \rightarrow (X^T X)^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{vmatrix}.$$

Домножим ее на транспонированный вектор входных переменных:

$$f^T (X^T X)^{-1} = [1 \ x_1 \ x_2] \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = \left[\frac{1}{4} \ \frac{1}{4} x_1 \ \frac{1}{4} x_2 \right]$$

и на сам вектор

$$f^T (X^T X)^{-1} f(x) = \left[\frac{1}{4} \ \frac{1}{4} x_1 \ \frac{1}{4} x_2 \right] \begin{vmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} x_1^2 + \frac{1}{4} x_2^2 =$$

$$= \frac{1}{4} (1 + x_1^2 + x_2^2) = \frac{1}{4} (1 + r^2).$$

Проверим условие ротатабельности плана:

$$f^T(x) (F^T F)^{-1} f(x) = \frac{1}{4} (1 + x_1^2 + x_2^2) = \frac{1}{4} (1 + r^2).$$

Дисперсия $S_{\hat{y}(x)}^2$ зависит только от расстояния r точки x до центра плана, и, следовательно, план X ротатабельный.

Названные критерии обеспечивают некоторые полезные и удобные свойства оценок коэффициентов, однако они никак не связаны с требованием максимальной точности построения модели. Критерии, приводимые ниже, обеспечивают оптимальность планов эксперимента с точки зрения точности оценки параметров модели или зависимой переменной.

8.3. КРИТЕРИЙ D -ОПТИМАЛЬНОСТИ

Суть критерия D -оптимальности состоит в требовании выбора таких планов, которые обеспечивают минимальный объем эллипсоида рассеяния оценок коэффициентов. Объем этого эллипсоида характеризует рассеяние случайного вектора относительно его математического ожидания. Таким образом, D -оптимальный план позволяет получить оценки, имеющие минимально возможное рассеяние относительно центра распределения.

Критерий D -оптимальности требует такого выбора плана X , содержащего N опытов, при котором определитель дисперсионной матрицы имеет минимальную величину.

Заметим, что требование минимальной величины определителя дисперсионной матрицы M^{-1} эквивалентно требованию максимальной величины определителя информационной матрицы M :

$$\begin{aligned} |M^{-1}(X^*)| &= \min_{X \in \Omega_x} |M^{-1}(X)| = \min_{X \in \Omega_x} |(X^T X)^{-1}|, \\ |M(X^*)| &= \max_{X \in \Omega_x} |M(X)| = \max_{X \in \Omega_x} |X^T X|. \end{aligned}$$

Здесь X^* – оптимальный план в смысле критерия D -оптимальности.

Поясним смысл критерия D -оптимальности. Для этой цели воспользуемся понятием эллипсоида рассеяния случайного вектора. Для случайного вектора $\{b\}$ размерности $k + 1$, ковариационная матрица которого есть $\text{cov}\{b\}$, уравнение эллипсоида рассеяния имеет вид

$$(b - E\{b\})^T \text{cov}^{-1}\{b\} (b - E\{b\}) = k + 3.$$

Данное выражение представляет эллипсоид в $(k + 1)$ -мерном пространстве с центром в точке $E\{b\}$. Этот эллипсоид имеет такие размеры, что ковариационная матрица случайного вектора, равномерно распределенного на нем, совпадает с матрицей $\text{cov}\{b\}$. Поэтому чем больше рассеяние вектора относительно центра распределения, тем большие размеры имеет эллипсоид рассеяния. Таким образом, объем эллипсоида рассеяния является мерой концентрации случайного вектора b около его математического ожидания.

Запишем теперь объем эллипсоида рассеяния для вектора b оценок коэффициентов уравнения регрессии:

$$V_{k+1}(\hat{b}) = \sqrt{|M^{-1}(X)|}.$$

Объем эллипсоида рассеяния вектора \hat{b} оценок коэффициентов уравнения регрессии пропорционален корню квадратному из опреде-

лителя дисперсионной матрицы. Чем меньше величина этого определителя, тем меньше разброс оценок коэффициентов относительно их математических ожиданий, равных истинным значениям коэффициентов.

План, заданный с помощью матрицы X размером $N \times n$, где n – число варьируемых переменных, а N – количество экспериментов, называется точным планом.

В плане X не обязательно все точки различные, т.е. в матрице X могут быть повторяющиеся строки. Предположим, что план X сосредоточен в r различных точках x^i , причем каждая из этих точек встретится в плане h_i раз. Тогда план X может быть представлен следующим образом:

$$\begin{bmatrix} x^1 & x^2 & \dots & x^r \\ h_1 & h_2 & \dots & h_r \end{bmatrix}.$$

Причем $\sum_{i=1}^r h_i = N$.

Точный план, заданный с помощью совокупности величин

$$\begin{bmatrix} x^1 & x^2 & \dots & x^r \\ l_1 & l_2 & \dots & l_r \end{bmatrix},$$

где $l_i = h_i/N$, называется нормированным планом. Очевидно, что l_i – доля наблюдений, приходящаяся на i -ю точку. Величину l_i мы будем называть частотой i -й точки плана.

План, заданный с помощью совокупности величин

$$l = \begin{bmatrix} x^1 & x^2 & \dots & x^r \\ l_1 & l_2 & \dots & l_r \end{bmatrix},$$

где $\sum_{i=1}^r l_i = 1$, а величины l_i могут принимать любые значения между нулем и единицей, называется непрерывным.

В общем случае непрерывный план может определяться некоторой непрерывной функцией $l(x)$, заданной на области Ω_x , т.е. не содержать конечного числа точек, однако всегда существуют непрерывные D -оптимальные планы с конечным числом точек.

Всякому точному плану X соответствует некоторый нормированный, а, следовательно, и непрерывный план l . Этот непрерывный план сосредоточен в точках x^1, x^2, \dots, x^r точного плана с частотами $l_1 = h_1/N, \dots, l_r = h_r/N$. Однако не для всякого N можно найти точный план, такой, чтобы соотношение частот было точно таким же, как у непрерывного плана l . Это можно сделать лишь тогда, когда все произведения Nl_i ($i = 1, 2, \dots, r$) являются целыми числами.

Пример 8.3. Пусть задан точный план X :

$$X = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ +1 & -1 \\ -1 & +1 \\ +1 & +1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Обозначим через x^1 точку с координатами $x_1^1 = -1$ $x_2^1 = -1$
 " " x^2 " " " $x_1^2 = +1$ $x_2^2 = +1$
 " " x^3 " " " $x_1^3 = -1$ $x_2^3 = 1$
 " " x^4 " " " " $x_2^4 = 1$
 " " x^5 " " " " $x_2^5 = 0$

Плану X соответствует непрерывный план

$$l = \begin{bmatrix} x^1 & x^2 & x^3 & x^4 & x^5 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 2/6 \end{bmatrix}.$$

Пример 8.4. Пусть задан непрерывный план

$$l = \begin{bmatrix} x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

Этому плану соответствуют точные планы при $N = 4m$, где $m = 1, 2, \dots$:

$$\begin{bmatrix} x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ m & m & m & m \end{bmatrix}.$$

Пример 8.5. Рассмотрим непрерывный план l , точки сосредоточения которого показаны на рис. 8.2. План содержит $r = 9$ точек, в число которых входят вершины квадрата (точки x^1, x^2, x^3, x^4), центр квадрата (x^5) и середины ребер (x^6, x^7, x^8, x^9). Частоты во всех вершинах квадрата одинаковы: $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 0,14805$, частота в центре квадрата $l_5 = 0,0962$, а в серединах ребер $l_6 = l_7 = l_8 = l_9 = 0,08015$. Этот план является непрерывным D -оптимальным планом в случае, когда область планирования задана в виде квадрата с вершинами в точках ± 1 , а уравнение модели имеет вид

$$y(x, b) = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_1^2 + b_3x_2^2 + b_4x_1x_2.$$

Минимальная величина N , при которой все Nl_i – целые числа, есть $N = 210^4$. Для меньших значений N могут быть найдены точные планы, в которых частоты заданного непрерывного D -оптимального плана соблюдаются лишь приближенно.

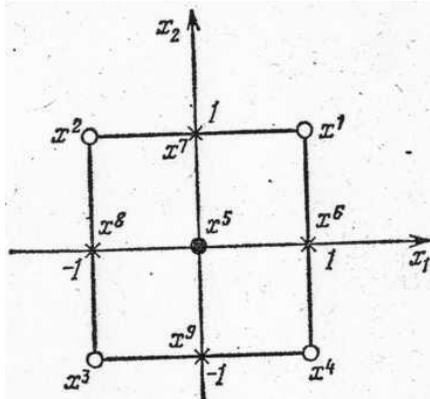


Рис. 8.2. Точки непрерывного D -оптимального плана

8.4. КРИТЕРИИ ОПТИМАЛЬНОСТИ ПЛАНОВ ДЛЯ ОЦЕНОК КОЭФФИЦИЕНТОВ МОДЕЛИ И ПРЕДСКАЗАТЕЛЬНЫХ СВОЙСТВ МОДЕЛИ

В зависимости от того, какие требования экспериментатор предъявляет к модели, он может придти к той или иной формулировке требований к матрице X . Так, например, при диагональной матрице M план оказывается ортогональным, т.е. все столбцы матрицы X взаимно ортогональны и коэффициенты модели независимы: $\text{cov}\{b_i, b_j\} = 0$.

Таким образом, подходим к критерию, который относится к группе критериев, связанных с оценками свойств коэффициентов. В их основе лежит концепция совместных эффективных оценок, т.е. получения наилучших оценок при обработке экспериментальных данных. Различные критерии этой группы приведены в табл. 8.1.

В таблице каждый критерий определяется тремя различными, но эквивалентными способами. Таблица начинается с критерия D -оптимальности. Смысл его – минимизация дисперсии всех коэффициентов регрессии, рассматриваемых как нечто единое, как вектор. Чем меньше определитель, тем меньше обобщенная дисперсия. Наряду с алгебраическим представлением можно использовать и геометрическое. В этом случае вместо уже знакомого нам факторного пространства приходится вводить пространство параметров, в котором координатные оси задаются значениями коэффициентов регрессии.

Эллипсоид является многомерным аналогом обычного доверительного интервала. Для одномерного пространства параметров он вырождается в отрезок, который и есть доверительный интервал.

8.1. Критерии оптимальности планов для оценок коэффициентов модели

Критерий	Интерпретация		
	алгебраическая	геометрическая	статистическая
<i>D</i> -оптимальность	Минимум определителя матрицы дисперсий-ковариаций $\min \det M^{-1}$	Минимум объема эллипсоида рассеяния оценок параметров	Минимум обобщенной дисперсии
<i>A</i> -оптимальность	Минимум следа матрицы дисперсий-ковариаций $\min \text{tr } M^{-1}$	Минимум суммы квадратов длин осей эллипсоида рассеяния эллипсоида	Минимальная средняя дисперсия оценок коэффициентов
<i>E</i> -оптимальность	Минимакс собственного значения матрицы дисперсий-ковариаций $\min \max \lambda (M^{-1})$	Минимум максимальной оси эллипсоида рассеяния	Отдельные оценки параметров не обладают слишком большими дисперсиями и ковариациями
Минимум суммы относительных ошибок оценок	$\min \sum_{j=0}^k \frac{S\{b_j\}}{b_j}$	–	Минимум суммы относительных ошибок оценок
Ортогональность	Диагональ матрицы дисперсий-ковариаций $\sum_{j=0}^N x_{ij}x_{ui} = \begin{cases} 0, & i \neq u \\ 1, & i = u \end{cases}$	Направление главных осей эллипсоида совпадает с направлением координатных осей пространства параметров	Оценки параметров независимы $\text{cov}\{b_j, b_u\} = 0$ $j \neq u$

На плоскости (когда имеются два параметра) получится эллипс. Эллиптическая форма доверительного интервала связана с предпосылкой регрессионного анализа о нормальном распределении. Геометрическая интерпретация в пространстве параметров характерна для критериев этой группы.

Для критерия A -оптимальности матрица X выбирается так, чтобы достигнуть минимума суммы квадратов длин главных осей эллипсоида рассеяния. Алгебраически это соответствует минимуму еще одной функции матрицы дисперсий-ковариаций, которая называется следом и обозначается $\text{tr } M^{-1}$ или $\text{sp } M^{-1}$. Следом квадратной матрицы называется сумма ее диагональных элементов. Вспомним, что на диагонали матрицы M^{-1} находятся дисперсии b -коэффициентов. Значит, A -оптимальность обеспечивает минимум суммы дисперсий b -коэффициентов без учета их ковариаций и, следовательно, минимум средней дисперсии.

Кроме таких функций от матрицы M^{-1} , как определитель и след для критериев оптимальности, можно использовать и другие ее функции. Критерий E -оптимальности, минимизирует максимальное собственное значение этой матрицы. Собственное значение принадлежит к характеристикам структуры матрицы.

Описание критериев оптимальности планов для предсказательных свойств модели проводится не на языке пространства параметров b_i , а в более привычных терминах факторного пространства и функции отклика (табл. 8.2).

G - и Q -критерии связаны с дисперсией предсказания значений отклика, критерий минимизирует максимальную дисперсию предсказания, Q -критерий – среднюю дисперсию. Если план G -оптимален, то экспериментатор имеет гарантию, что в области планирования не окажется точек, в которых точность оценки поверхности отклика будет слишком низкой.

Критерии ротатабельности и равномерности связаны с требованием постоянства дисперсии предсказания на некоторых фиксированных расстояниях от центра эксперимента (ρ).

Ротатабельность плана означает, что оценки дисперсии предсказания инвариантны относительно вращения координатных осей факторного пространства. Иными словами, дисперсия предсказания не будет зависеть от того, в каком направлении осуществляется движение из начала координат, а зависит только от расстояния между интересующей нас точкой и началом.

Наиболее естественное желание экспериментатора – уменьшение числа опытов. Минимальное число опытов задается числом коэффициентов модели, а приближение к нему служит мерой насыщенности плана.

8.2. Критерии оптимальности планов для предсказательных свойств модели

Критерий	Интерпретация	
	алгебраическая	статистическая
G -оптимальность	$\min \max M^{-1}X_i$	Минимум максимального значения дисперсии оценки поверхности отклика
Q -оптимальность	$\min \sum_{i=1}^N X_i^T M^{-1}X_i$	Минимум средней дисперсии оценки поверхности отклика
Ротатабельность	$X_i^T M^{-1}X_i = f(\rho)$	Постоянство дисперсии предсказания на равных расстояниях от центра эксперимента
Униформность	$X_i^T M^{-1}X_i \approx \text{const}$ при $0 \leq \rho \leq 1$	Дисперсия предсказания постоянна в некоторой области вокруг центра эксперимента

Таким образом, насыщенность плана оказывается одним из возможных критериев оптимальности. Именно стремление удовлетворить этому критерию привело к созданию дробных реплик. Заметим, что дробные реплики одновременно удовлетворяют двум критериям: они ортогональны и насыщены.

Большое значение имеет требование композиционности, позволяющее разделить эксперимент на части и в случае необходимости последовательно реализовывать одну часть за другой без потери информации. Примером может служить переход от $1/4$ -реплики к полуреплике, а затем к полному факторному эксперименту. Это соответствует последовательному переходу от простой линейной модели к модели с взаимодействиями. То же самое возможно и при переходе от линейных моделей к модели второго порядка.

9. МЕТОДИКА СТРУКТУРНОГО СИНТЕЗА АЛГОРИТМА УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ БПЛА

В работах [15, 23, 24] было рассмотрено движение управляющего объекта в n -мерном фазовом пространстве переменной $x = (x_1, \dots, x_n)$, описываемое системой дифференциальных уравнений

$$\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}, \bar{u}). \quad (9.1)$$

Полагалось, что в каждый фиксированный момент времени t вектор состояния x принадлежит заданной области G n -мерного фазового пространства системы, а вектор управления и принадлежит r -мерной области управления Ω . Кусочно-непрерывную функцию $\bar{u}(t) \in \Omega$, заданную на отрезке $t_0 \leq t \leq T$, будем считать допустимым управлением в G относительно точки $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0 \in G$, если при подстановке в (9.1) функции $\bar{u}(t)$ решение этой системы с начальным условием \bar{x}_0 определено и находится в G при $t_0 \leq t \leq T$. Допустимое относительно $\bar{x}_0 \in G$ управление $\bar{u}(t)$ при $t_0 \leq t \leq T$ переводит фазовую точку из положения \bar{x}_0 в область S , если $\bar{x}(T) \in S$.

Если задан критерий качества

$$J(\bar{x}_0, \bar{u}) = \int_{t_0}^T F(\bar{x}, \bar{u}) dt + R(x(T)) \quad (9.2)$$

то обычно [14] выбирают алгоритм управления, оптимизирующий показатель качества (9.2), требуя непрерывности $F(\bar{x}, \bar{u})$ и $\partial F(\bar{x}, \bar{u}) / \partial x_i$ при всех $\bar{x} \in G$ и $\bar{u} \in \Omega$. При решении задачи с критериями $F(\bar{x}, \bar{u}) = 1$ вдали от начала координат и $F(\bar{x}, \bar{u}) = \bar{u}^2$ в некоторой окрестности G_1 функция $F(\bar{x}, \bar{u})$ может быть разрывной. В работе [14] показано, что оптимальную систему можно получить с разрывной функцией $F(\bar{x}, \bar{u})$. При этом G_i ($i = 1 \dots k$) – взаимно непересекающиеся области фазового пространства X такие, что $G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4 = G$. Для каждой области фазового пространства G_i в работах [23, 24] получены требуемые критерии качества. Предполагается, что все $F_i(\bar{x}, \bar{u})$ и $\partial F(\bar{x}, \bar{u}) / \partial x_j$ непрерывны в своей области определения и все $F_i(\bar{x}, \bar{u}) > 0$ при $\bar{x} \in G$ и $\bar{u} \in \Omega$.

На границах областей G_i функции $F(\bar{x}, \bar{u})$ и $\partial F(\bar{x}, \bar{u})/\partial x_j$ терпят разрывы первого рода. При этом на поверхности $g_{ie}(\bar{x}) = 0$, которая является границей между G_i и G_e , $F(\bar{x}, \bar{u}) = F_i(\bar{x}, \bar{u})$ и $\partial F(\bar{x}, \bar{u})/\partial \bar{x}_j = \partial F_i(\bar{x}, \bar{u})/\partial \bar{x}_j$, если вектор $\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}, \bar{u}^0)$, для таких x , что $g_{ie}(\bar{x}) = 0$, направлен внутрь области G_i , т.е. оптимальные фазовые траектории, пересекающие поверхность $g_{ie}(\bar{x}) = 0$, направлены внутрь области G_i . Если оптимальные траектории, пересекающие поверхность $g_{ie}(\bar{x}) = 0$, направлены внутрь области G_e , то на границе $F(\bar{x}, \bar{u}) = F_e(\bar{x}, \bar{u})$ и $\partial F(\bar{x}, \bar{u})/\partial \bar{x}_j = \partial F_e(\bar{x}, \bar{u})/\partial \bar{x}_j$.

Следовательно, функции $F(\bar{x}, \bar{u})$ и $\partial F(\bar{x}, \bar{u})/\partial x_i$ терпят разрывы первого рода на границах областей G_i .

Синтезируем алгоритм управления системой, оптимальный по критерию (9.2), с разрывной подынтегральной функцией методами динамического программирования [14, 23, 24].

Пусть S_i^0 – часть границы конечной области S , которая является одновременно границей области G_i . Пусть область G'_i такова, что для всех $\bar{x}_0 \in G'_i$ оптимальная фазовая траектория системы, начинающаяся в точке $\bar{x}_0 \in G'_i$, целиком лежит в G'_i и $\bar{x}(T) \in S_i^0$. Допустим, что для $\bar{x} \in S_i^0$ существует функция

$$V'_1(\bar{x}_0) = \min_{\bar{u} \in \Omega} \left[\int_{t_0}^T F_i(\bar{x}, \bar{u}) dt + R(\bar{x}(T)) \right], \quad (9.3)$$

удовлетворяющая условию

$$\min_{\bar{u} \in \Omega} [F(\bar{x}, \bar{u}) + \text{grad} V'_1(\bar{x}) f(\bar{x}, \bar{u})] = 0 \quad (9.4)$$

с граничными условиями $V'_1(\bar{x}) = R(\bar{x})$.

В работе [14] показано, что для того, чтобы управление $\bar{u}(t)$ и траектория $\bar{u}(t)$ были оптимальными, достаточно существования непрерывной и непрерывно дифференцируемой в G_i функции $V'_1(\bar{x})$, удовлетворяющей уравнению (9.3) с граничными условиями.

Решив уравнение в частных производных и найдя функцию $V'_1(\bar{x})$ для $\bar{x} \in G'_i$, мы проведем синтез оптимального алгоритма управления, т.е. найдем $\bar{u}_0(\bar{x}) = \bar{u}_1^0(x)$ для $\bar{x} \in G'_i$.

Построив границу области G'_i , для которой справедлив оптимальный закон управления $u_1^0(\bar{x})$, используем понятное движение и найдем область M , представляющую собой множество оптимальных фазовых траекторий системы, оканчивающихся на S_i^0 при $\bar{u} = \bar{u}_1^0(x)$. Тогда G'_i есть пересечение области M и G_i , а $g'_{i_e}(\bar{x}) = 0$ – поверхность, разделяющая области G'_i и G_e .

Оптимальный алгоритм управления в области $G'_e \in G_e$ будет таким, что оптимальная траектория изображающей точки $\bar{x}_0 \in G'_e$ пересекает $g'_{i_e}(\bar{x}) = 0$ в некоторый момент времени t'_i . Определим функцию Беллмана для $\bar{x} \in G'_e$ с учетом $F(\bar{x}, \bar{u}) > 0$.

$$\begin{aligned}
 V'_e(\bar{x}_0) &= \min_{\bar{u} \in \Omega} \left[\int_{t_0}^T F(\bar{x}, \bar{u}) + R(x(T)) \right] = \\
 &= \min_{\bar{u} \in \Omega} \left[\int_{t_0}^{t'_i} F_e(\bar{x}, \bar{u}) dt \right] + \min_{\bar{u} \in \Omega} \left[\int_{t'_i}^T F_i(\bar{x}, \bar{u}) dt + R(\bar{x}(T)) \right] = \\
 &= \min_{\bar{u} \in \Omega} \int_{t_0}^{t'_i} F_e(\bar{x}, \bar{u}) dt + V'_i(x(t'_i)). \tag{9.5}
 \end{aligned}$$

После нахождения функции $V'_e(\bar{x})$ построим методом попятного движения границу области G'_e и проведем синтез оптимального алгоритма управления в области G'_m , имеющей общую границу $g'_{e_m}(\bar{x}) = 0$ с областью G'_e . Этот процесс будем продолжать до тех пор, пока не будет проведен синтез алгоритма управления по всей области G .

Таким образом, синтез алгоритма управления с несколькими показателями качества сводится к решению не менее k задач синтеза алгоритма управления в областях G_1, \dots, G_k . При этом возникает и задача построения методом попятного движения и границ областей G'_i .

Ранее для обеспечения принципа равной стойкости к поражающим воздействиям на основе особенностей динамики аэродинамически неустойчивой ракеты обоснованы и определены критерии качества, оптимизирующие управляемость, перегрузку, устойчивость, точ-

ность, расход топлива на управление. Установлены условия получения решения многокритериальной задачи.

Для обеспечения равной стойкости к воздействиям поражающих факторов необходимо решить задачу определения управления. При этом состояние системы описывается вектором $x = (x_1, \dots, x_n)^T$. Переход из начального состояния в конечное, т.е. фазовая траектория, может быть разбит на N участков.

Динамика системы описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{U}(N), \quad (9.6)$$

где $\bar{U}(N)$ – вектор управления, т.е. искомая на каждом участке фазового пространства альтернатива.

На фазовую траекторию и управление налагаются ограничения:

$$\begin{aligned} x^k &\in X_k, k = 0, \dots, N, \\ u^k &\in U_k(x^{k-1}), k = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (9.7)$$

Последовательность выбираемых альтернатив образует стратегию $\{u_N\}$ [6, 13, 14, 16, 18, 21, 24].

Пусть заданы участки фазовой траектории x_1, x_2, \dots, x_N и множество альтернатив. На участке $x_k \neq x_0$ альтернатива $u(x_k)$ выбирается из множества $u(u(N_0, \dots, u(N_{k-1})))$. Каждой альтернативе $u(x_k)$ ставится в соответствие векторная оценка

$$\begin{aligned} f(u(x_k)) &= \\ &= \{f_1(u(x_k, x_k, u(x_0), \dots, u(x_{k-1}))), \dots, f_n(u(x_k, x_k, u(x_0), \dots, u(x_{k-1})))\}. \end{aligned}$$

Векторную оценку стратегии $\{u_N\}$ будем определять следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi_1\{u(x_k)\} &= \sum_k f_1(u(x_k, x_k, u(x_0), \dots, u(x_{k-1}))), \\ \varphi_n\{u(x_k)\} &= \sum_k f_n(u(x_k, x_k, u(x_0), \dots, u(x_{k-1}))), \\ \varphi_{n+1}\{u(x_k)\} &= f_{n+1}(u(x_{n-1})), \\ \varphi_{n+2}\{u(x_k)\} &= f_{n+2}(u(x_N)). \end{aligned} \quad (9.8)$$

Необходимо найти Парето-оптимальное (П-оптимальное) решение. Следовательно, необходимо установить связь между качеством стратегии и входящих в нее альтернатив и выработать условия, которыми должна удовлетворять выбираемая на каждом участке фазовой траектории альтернатива, чтобы стратегия была П-оптимальна.

Рассмотрим всевозможные состояния, которые достижимы системой (9.6) на участке x_k . Пусть управление $u_1(x_k)$ переводит систему в состояние x_{k+1} , а управление $u_2(x_k)$ в состояние x_{k+2} , следовательно, на следующем участке фазовой траектории выбирается альтернатива $u(x_{k+1})$ и ее векторная оценка будет зависеть от того, в каком состоянии в этот момент находилась система, а следовательно, и от того, какие альтернативы выбирались в прошлом.

$$f_i(u_1(x_{k+1}), x_{k+1}) \neq f_i(u_1(x_{k+1}), x'_{k+1}). \quad (9.9)$$

Следовательно, задача не является задачей независимого выбора. Таким образом, необходимо решить задачу многокритериальной оптимизации модифицированным методом динамического программирования.

Будем называть стратегию $\{u(x_k)\}$ Парето-оптимальной, если для любой другой допустимой траектории $\{u(x_k)\}$ из соотношения

$$\varphi_i\{u(x_k)\} \geq \varphi_i\{u(x_k)\}, i = 1, \dots, n,$$

вытекает, что

$$\varphi_i\{u(x_k)\} = \varphi_i\{u(x_k)\}, i = 1, \dots, n.$$

Следовательно, стратегия $\{u(x_k)\}$ будет эффективной, если на множестве допустимых стратегий не существует такой стратегии $\{u(x_k)\}$, для которой выполнялись бы неравенства

$$\begin{aligned} \varphi_i\{u(x_k)\} &\geq \varphi_{i_1}\{u(x_k)\}, \forall i \in I_1, \\ \varphi_i\{u(x_k)\} &\geq \varphi_{i_1}\{u(x_k)\}, \forall i \in I_2, \end{aligned} \quad (9.10)$$

и хотя бы одно из них было строгим.

Здесь I_1 – множество индексов, соответствующих функциям цели (9.8), которые необходимо максимизировать, I_2 – множество индексов, соответствующих функциям цели, которые необходимо минимизировать. При отыскании эффективных стратегий следует помнить, что они могут быть несравнимы по множеству функций цели. Поэтому в процессе синтеза необходимо решить вопрос о существовании эффективных альтернатив.

Анализ условий оптимальности можно провести, сравнивая поставленную задачу с аналогичной задачей, но со скалярным критерием. При этом множество векторных оценок альтернатив и множество векторных оценок стратегий являются подмножествами вещественной прямой. Оптимальная стратегия $\{u_N^*\}$ в скалярном случае обладает следующими свойствами:

1) если стратегия $\{u_N^*\}$ оптимальна, то альтернативы u_N также оптимальны, т.е. $f(u_N^*) \geq f(u_N)$;

2) если альтернативы u_N^* оптимальны, то составленная из них стратегия $\{u_N^*\}$ оптимальна;

3) для любой оптимальной альтернативы на участке N существует содержащая ее стратегия.

Анализ показывает, что свойство 1 сохраняется при замене оптимальности на Парето-оптимальность. Действительно, пусть стратегия $\{u_N^*\}$ П-оптимальна, но альтернатива u_N^* для некоторого участка управления П-оптимальной не является. Это означает, что существует такая альтернатива u_i , что

$$\begin{aligned} f_j(u_i) &> f_j(u_i^*), j \in I, \\ f_j(u_i) &= f_j(u_i^*), j \in \{1, \dots, n\}/I, \end{aligned} \quad (9.11)$$

где $I \neq \emptyset$. Образует новую стратегию $\{u_k^*\}$, которая совпадает с $\{u_k^*\}$ при $k \neq I$, а на участке I содержит u_i вместо u_i^* . Ее векторная оценка

$$\varphi_j\{u_k^*\} = \sum_{k \neq i} f_i(u_k^*) + f_j(u_i), j = 1, \dots, n,$$

следовательно:

$$\begin{aligned} \varphi_j\{u_k^*\} &> \varphi_j\{u_k^*\}, j \in I, \\ \varphi_j\{u_k^*\} &= \varphi_j\{u_k^*\}, j \in \{1, \dots, n\}/I, \end{aligned} \quad (9.12)$$

что противоречит исходному положению о Парето-оптимальности стратегии $\{u_k^*\}$.

Для проверки второго свойства допустим, что стратегия состоит из двух альтернатив, векторная оценка которых определяется двумя составляющими:

$$\begin{aligned} f(u_1(x_n)) &= \{\min f_1(u_1(x_n)), f_2(u_1(x_n))\}, \\ f(u_2(x_n)) &= \{f_1(u_2(x_n)), \min f_2(u_2(x_n))\}, \\ f(u_1(x_{n+1})) &= \{\min f_1(u_1(x_{n+1})), f_2(u_1(x_{n+1}))\}, \\ f(u_2(x_{n+1})) &= \{f_1(u_2(x_{n+1})), \min f_2(u_2(x_{n+1}))\}. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Как видно, эти альтернативы являются эффективными, т.е. доминирующие по Парето. Из данных альтернатив составим четыре возможные стратегии:

$$\begin{aligned} \{u(x)\} &= \{u_1(x_n), (u_1(x_{n+1}))\}, \\ \{u(x)\} &= \{u_2(x_n), (u_2(x_{n+1}))\}, \\ \{u(x)\} &= \{u_1(x_n), (u_2(x_{n+1}))\}, \\ \{u(x)\} &= \{u_2(x_n), (u_1(x_{n+1}))\}. \end{aligned}$$

Как видно из (9.13), векторные оценки первых двух стратегий являются получаемыми соответственно по первой и второй составляющим векторных оценок, следовательно, они принадлежат множеству Парето. Для следующей стратегии составляющие векторных оценок с учетом особенностей решаемой задачи имеют вид:

$$\begin{aligned}\varphi_1\{u(x_k)\} &= \min f_1(u(x_n))f_1(u(x_{n+1})), \\ \varphi_2\{u(x_k)\} &= f_2(u(x_n)) \min f_2(u(x_{n+1})).\end{aligned}\quad (9.14)$$

Определим, можно ли найти стратегию эффективнее данной, для чего рассмотрим четвертую стратегию (9.14):

$$\begin{aligned}\varphi'_1\{u(x_k)\} &= f_1(u(x_n)) \min f_1(u(x_{n+1})), \\ \varphi'_2\{u(x_k)\} &= \min f_2(u(x_n))f_2(u(x_{n+1})).\end{aligned}\quad (9.15)$$

Пусть минимальные значения показателей качества на различных участках равны. С учетом того, что возможно выполнение следующих соотношений:

$$\begin{aligned}f_1(u(x_n)) &< f_1(u(x_{n+1})), \\ f_2(u(x_n)) &< f_2(u(x_{n+1})),\end{aligned}\quad (9.16)$$

получаем соотношения между составляющими векторных оценок стратегий:

$$\begin{aligned}\varphi_1\{u(x_k)\} &> \varphi'_1\{u(x_k)\}, \\ \varphi_2\{u(x_k)\} &> \varphi'_2\{u(x_k)\}.\end{aligned}\quad (9.17)$$

Из чего следует, что четвертая стратегия (9.15) эффективнее стратегии (9.14). Следовательно, можно сделать вывод о том, что не все стратегии, составленные из Парето-оптимальных альтернатив, принадлежат множеству Парето.

Для проверки выполнимости третьего свойства при решении поставленной задачи рассмотрим случай при выпуклом множестве. При этом выполняются необходимые условия Парето-оптимальности [6, 14, 16, 18], которые для решаемой задачи означают, что для любой Парето-оптимальной стратегии $\{u(x_k)\}$ найдется неотрицательный вектор $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i > 0$, $\sum \alpha_i = 1$, такой, что

$$\begin{aligned}\left\langle \alpha, \sum_k f_1(u(x_n)) \right\rangle &\leq \left\langle \alpha, \sum_k f_1(u(x_k)) \right\rangle, u(x_k) \in \prod(x_k), \\ \left\langle \alpha, \sum_k f_2(u(x_n)) \right\rangle &\leq \left\langle \alpha, \sum_k f_2(u(x_k)) \right\rangle, u(x_k) \in \prod(x_k),\end{aligned}\quad (9.18)$$

В силу своей линейности скалярные произведения (9.18) приводятся к виду

$$\begin{aligned} \sum_k \langle \alpha, f_1(u(x_n)) \rangle &\leq \sum_k \langle \alpha, f_1(u(x_k)) \rangle, \\ \sum_k \langle \alpha, f_2(u(x_n)) \rangle &\leq \sum_k \langle \alpha, f_2(u(x_k)) \rangle. \end{aligned} \quad (9.19)$$

Но данные задачи (9.19) являются задачами со скалярной целевой функцией, а для них третье условие выполняется.

Анализ свойств оптимальности стратегий в невыпуклом случае удобнее проводить в пространстве векторных оценок.

Наличие опасных векторных оценок хотя бы для одного участка фазового пространства означает, что свойство 3 не имеет места.

Оптимальную по Парето векторную оценку f , принадлежащую множеству векторных оценок, необходимо считать опасной, если существует такое множество векторных оценок, что оценка $f + g$ не будет оптимальной по Парето. Доказано, что любая П-оптимальная векторная оценка, не принадлежащая границе выпуклой оболочки, т.е. границе пересечения всех выпуклых множеств его содержащих, является опасной.

Если опасные векторные оценки существуют, то выбор на некотором участке фазового пространства П-оптимальной альтернативы, обладающей опасной оценкой, может привести к тому, что независимо от того, как осуществляется выбор в будущем, стратегия уже не будет П-оптимальна.

При получении условий многокритериальной оптимизации определение опасных векторных оценок имеет большое значение, особенно для реальной задачи с векторной оценкой стратегии.

Таким образом, на участке фазового пространства x_k альтернатива, через векторную оценку которой нельзя провести опорную плоскость к множеству векторных оценок, может привести к тому, что траектория не будет П-оптимальной.

Особенностью решенной задачи является то, что в классе кусочно-непрерывных стратегий осуществляют П-оптимальные стратегии, т.е. множество векторных оценок замкнуто. В литературе [6, 14, 16, 18] показано, что при анализе ситуации, когда множество u конечно, предъявляемое к u_k требование кусочной непрерывности сводится просто к кусочному постоянству. При этом показано, что, выбирая на каждом участке фазового пространства x_k альтернативу u_k^* , удовлетворяющую условию

$$\{f_1(u_k^*, x_k), \dots, f_n(u_k^*, x_k)\} \in [\text{пс}oF(x)] \cap F(x), \quad (9.20)$$

а также обеспечивая определенную согласованность такого выбора, можно получить П-оптимальную стратегию.

С учетом вышеизложенного, для решаемой задачи, в которой часть векторных оценок стратегии связана с качеством альтернатив неаддитивно, условия П-оптимальности можно определить следующим образом.

На участках фазового пространства x_k , характеризующихся максимальными требованиями по $f_i(u(x_k))$, альтернатива u_k^* выбирается таким образом, что при этом составляющая вектора принимает свое наименьшее значение. При этом векторная оценка будет принадлежать границе выпуклого множества, следовательно, не будет являться опасной.

Утверждение. При выполнении условия, что часть векторных оценок стратегии связана с качеством альтернатив неаддитивно, то, если хотя бы для одного участка фазового пространства x_k альтернатива $u(x_k)$ выбирается таким образом, что векторная оценка Парето-оптимальна, и при этом составляющая вектора принимает свое оптимальное значение, то данная стратегия будет слабо эффективна, если данный участок x_k характеризуется максимальными требованиями по $f_i(u(x_k))$.

Обоснование утверждения. Для обоснования утверждения воспользуемся определением слабой Парето-оптимальности (оптимальности по Слейтеру) [6, 16, 18]. Из данного определения следует, что альтернатива $u(x_k)$ будет слабо эффективной, если на множестве допустимых альтернатив не существует такой альтернативы $u(x_k)$, для которой выполнялось бы неравенство

$$f_i(u(x_k)) > f_i(u(x_k)) \forall i \in I. \quad (9.21)$$

Стратегия является слабо эффективной, если не существует такой стратегии, для которой бы выполнялись неравенства

$$\varphi_i\{u(x_k)\} > \varphi_i\{u(x_k)\} \forall i \in I. \quad (9.22)$$

Так как принято предположение о том, что для одной из векторных оценок, имеющей неаддитивную связь с качеством альтернативы на участке фазового пространства x_k , эта составляющая векторной оценки альтернативы $f_i(u(x_k))$ принимает свое минимальное значение, и при этом этот участок характеризуется максимальными требованиями по этой составляющей, то на любом другом участке фазовой

траектории при неизменных альтернативах на других участках фазового пространства невозможно получить составляющую векторной оценки альтернативы, удовлетворяющую условию

$$f_i(u(x_k)) < f_i(u(x_i)), \quad (9.23)$$

следовательно, $\varphi_i = f_i(u(x_k))$.

Таким образом, нет стратегии, имеющей по данной составляющей более эффективное решение. Следовательно, эта стратегия является слабо эффективной, т.е. утверждение обосновано.

Таким образом, методика многошагового принятия решения на управление движением ракеты должна основываться на следующих особенностях решаемой задачи.

1. Если на каждом участке фазового пространства, характеризуемом максимальными требованиями по соответствующей составляющей векторной оценки, выбирается альтернатива, структурно оптимизирующая данную составляющую, то такая стратегия $\varphi\{u_n\}$ – Парето-эффективна при условии $\varphi_{n+1}\{u(x_k)\} = \min f_{n+1}(u(x_n))$, для x_n , на котором $f_{n+1}\{u(x_k)\} = \max f_{n+1}(u(x))$.

2. Наилучшей будет стратегия, в которой число участков фазового пространства равно числу составляющих векторных оценок, неаддитивно связанных с качеством альтернатив, и на каждом участке выбирается альтернатива, минимизирующая составляющую, к которой на данном участке предъявляются максимальные требования.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение сделаем несколько замечаний по поводу отбора материала, составившего данное учебное пособие. Современная теория оптимального управления, созданная трудами выдающихся математиков Л. С. Понтрягина, Р. Беллмана и их сотрудников, а также работами многочисленных коллективов специалистов прикладного профиля, представляет ныне весьма обширную науку. Детальное владение всеми аспектами этой науки под силу только весьма узким специалистам с высоким уровнем математической подготовки. Однако для успешного решения конкретных практических задач чаще всего не требуется знания всех нюансов теории. Достаточно знакомства с ее идейными и алгоритмическими основами, что вполне доступно инженеру-прикладнику, имеющему подготовку по программе инженерного вуза. Данное учебное пособие предназначено именно для такого первичного знакомства с основами теории оптимального управления. По этой причине за рамками данного пособия остались такие сложные вопросы теории, как детальные доказательства ее основных положений, условия существования оптимальных управлений, достаточные условия оптимальности и ряд других. Эти сведения читатель сможет почерпнуть из более полных публикаций по вопросам теории оптимального управления, опираясь на учебный материал, нашедший отражение в данной книге.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Современная прикладная теория управления. Ч. I. Оптимизационный подход в теории управления / под ред. А. А. Колесникова. ФЦ «Интеграция». – Москва–Таганрог : Изд-во ТРТУ, 2000, - 400 с.
2. Колесников, А. А. Современная прикладная теория управления: Синергетический подход в теории управления / А. А. Колесников, Г. Е. Веселов, О. Т. Вавилов ; под ред. А. А. Колесникова. – Таганрог : Изд-во ТРТУ, 2000. – Ч. II. – 559 с.
3. Колесников, А. А. Современная прикладная теория управления. Ч. III. Новые классы регуляторов технических систем / А. А. Колесников. – Таганрог : Изд-во ТРТУ, 2000. – 656 с.
4. Зайцев, А. В. Разработка алгоритмов оптимизации систем стабилизации методом аналитического конструирования агрегированных регуляторов / А. В. Зайцев, С. В. Канушкин, А. В. Волков // Известия института инженерной физики. – Серпухов : МОУ «ИИФ», 2015. – № 4. – С. 10 – 12.
5. Синергетические методы управления сложными системами: теория системного синтеза / А. А. Колесников и др. – М. : УРСС/КомКнига, 2012. – 153 с.
6. Рогов, В. А. Методика и практика технических экспериментов : учеб. пособие / В. А. Рогов. – М. : Академия, 2005. – 288 с.
7. Берестова, С. А. Экстремальные и оптимальные методы в инженерной деятельности : учеб. пособие / С. А. Берестова, Л. С. Горужева, Е. Ю. Просвиряков. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2023. – 70 с.
8. Моделирование и стабилизация нелинейных управляемых систем : учеб. пособие / О. Н. Масина, А. А. Петров, О. В. Дружинина, Л. Б. Рапопорт. – Елец : Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, 2020. – 117 с.
9. Алгоритмы и примеры решения задач многомерной оптимизации : метод. указания / сост. : С. П. Мочалов, И. А. Рыбенко. СибГИУ. – Новокузнецк, 2004. – 34 с.
10. Алгоритмы и примеры решения задач одномерной оптимизации : метод. указания / сост. : С. П. Мочалов, И. А. Рыбенко. СибГИУ. – Новокузнецк, 2004. – 18 с.

11. Канушкин, С. В. Основы моделирования элементов систем управления : практикум. Ч. 1 / С. В. Канушкин, Д. Н. Глазов. – ФВА РВСН, 2023. – 64 с.

12. Канушкин, С. В. Основы моделирования и испытания приборов и систем : учеб. пособие. Ч. 1 / С. В. Канушкин // Основы моделирования, идентификации и планирования эксперимента. – МО РФ, 2013. – 207 с.

13. Пупков, К. А. Методы современной классической теории автоматического управления : учебник : в 5 т. / К. А. Пупков, Н. Д. Егупов. – М. : Изд-во МГТУ им. Баумана, 2004.

14. Подиновский, В. В. Многокритериальные задачи принятия решений: теория и методы анализа : учебник для вузов / В. В. Подиновский. – М. : Юрайт, 2022. – 486 с.

15. Ногин, В. Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход / В. Д. Ногин. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 176 с.

16. Ногин, В. Д. Принятие решений при многих критериях : учеб.-метод. пособие / В. Д. Ногин. – СПб. : ЮТАС, 2007. – 104 с.

17. Лотов, А. В. Многокритериальные задачи принятия решений : учеб. пособие / А. В. Лотов, И. И. Поспелова. – М. : МАКС Пресс, 2008. – 197 с.

18. Адлер, Ю. П. Введение в планирование эксперимента / Ю. П. Адлер. – М. : Металлургия, 1969. – 270 с.

19. Рогов, В. А. Методика и практика технических экспериментов : учеб. пособие / В. А. Рогов. – М. : Академия, 2005. – 288 с.

20. Шенк, Х. Теория инженерного эксперимента / Х. Шенк. – М. : Мир, 1972. – 382 с.

21. Канушкин, С. В. Основы моделирования и испытания приборов и систем : учеб. пособие. Ч. 2 / С. В. Канушкин // Контроль, диагностика и обработка результатов испытаний. – МО РФ, 2014. – 210 с.

22. Грешилов, А. А. Математические методы принятия решений / А. А. Грешилов. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. – 584 с.

23. Дубов, Ю. А. Многокритериальные модели формирования и выбора вариантов систем / Ю. А. Дубов, С. И. Травкин, В. И. Якимец. – М. : Наука, 1986. – 296 с.

24. Зайцев, И. А. Поэтапная процедура принятия решений в условиях риска / И. А. Зайцев, С. В. Канушкин // Известия Института инженерной физики. – 2011. – № 2(20). – С. 49 – 53.
25. Черноруцкий, И. Г. Методы принятия решений / И. Г. Черноруцкий. – СПб. : БХВ-Петербург, 2005. – 416 с.
26. Чечнев, В. Б. Анализ и классификация многокритериальных методов принятия решений / В. Б. Чечнев // Онтология проектирования. – 2024. – Т.14, № 4(54). – С. 607 – 624.
27. Разоренов, Г. Н. Теория и системы оптимального управления / Г. Н. Разоренов, А. А. Самарин. – М. : МО РФ, 2007. – 472 с.
28. Захаров, В. Н. Кибернетика в системах военного назначения / В. Н. Захаров. – М. : МО РФ, 1979. – 359 с.
29. Проектирование систем управления летательными аппаратами / под ред. А. В. Зайцева. – М. : МО РФ, 2009. – 343 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ КИБЕРНЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ.....	4
1.1. Принцип действия кибернетической системы	4
1.2. Классификация кибернетических систем	6
1.3. Метод параметров состояния	12
1.4. Определение алгоритма управления многоконтурной дискретной САУ	18
1.5. Синтез дискретной САУ, оптимальной по обобщенному квадратичному показателю качества	22
1.6. Динамическое программирование	29
1.7. Применение принципа максимума для определения оптимальных алгоритмов управления	34
1.8. Метод программного управления движением беспилотного летательного аппарата.....	39
1.8.1. Разработка метода программного управления	39
1.8.2. Методика синтеза алгоритма оптимального программного управления	44
1.8.3. Методика разработки алгоритма оптимального программного управления с учетом возмущений.....	46
2. АНАЛИЗ ПОДХОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ АЛГОРИТМОВ СТАБИЛИЗАЦИИ.....	52
3. СИНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ СИНТЕЗА РЕГУЛЯТОРОВ ДВИЖЕНИЯ	55
4. СИНТЕЗ СИНЕРГЕТИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМЫ СТАБИЛИЗАЦИИ	63
4.1. Аналитическое конструирование агрегированных регуляторов	63
4.2. Синтез синергетического управления динамическим объектом с обобщенным критерием качества.....	74
4.3. Модели требований	79

4.4. Преобразование частных откликов в частные функции желательности.....	86
5. ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ПОИСКОВЫМИ МЕТОДАМИ.....	89
5.1. Экспериментальная оптимизация в случае одной переменной.....	89
5.2. Эквидистантные планы и методы дихотомического поиска.....	90
5.3. Планы, использующие числа Фибоначчи.....	92
5.4. Правило золотого сечения.....	95
5.5. Алгоритм учета дополнительной информации о свойствах унимодальных функций.....	97
6. МЕТОДЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ.....	100
6.1. Методы случайного поиска.....	100
6.2. Метод Гаусса–Зейделя.....	103
6.3. Градиентные методы.....	104
6.4. Расчет крутого восхождения.....	105
6.5. Планирование испытаний в производственных условиях.....	107
6.5.1. Последовательный симплексный метод.....	107
6.5.2. Метод эволюционного планирования.....	110
6.6. Алгоритм расчета методом равномерного поиска (эквидистантные планы).....	111
6.7. Алгоритм расчета методом последовательного дихотомического поиска (половинного деления).....	112
6.8. Алгоритм расчета методом золотого сечения.....	113
7. МЕТОДЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ИСПЫТАНИЙ.....	116
7.1. Идентификация динамических объектов методом наименьших квадратов.....	116
7.2. Метод наименьших квадратов для одного фактора.....	118
7.3. Обобщение метода наименьших квадратов на многофакторный случай.....	124
7.4. Статистический анализ в матричной форме.....	127

8. ОПТИМАЛЬНЫЕ ПЛАНЫ ИСПЫТАНИЙ	130
8.1. Постановка задачи оптимального планирования эксперимента	130
8.2. Ортогональность и ротатабельность планов эксперимента	132
8.3. Критерий D -оптимальности	136
8.4. Критерии оптимальности планов для оценок коэффициентов модели и предсказательных свойств модели	139
9. МЕТОДИКА СТРУКТУРНОГО СИНТЕЗА АЛГОРИТМА УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ БПЛА	143
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	153
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	154

Учебное электронное издание

ЗАЙЦЕВ Александр Владимирович
КАНУШКИН Сергей Владимирович

МЕТОДЫ И ТЕОРИЯ ОПТИМИЗАЦИИ

Учебное пособие

Редактор Л. В. Комбарова
Графический и мультимедийный дизайнер Т. Ю. Зотова
Обложка, тиражирование, упаковка Л. В. Комбаровой

ISBN 978-5-8265-2948-5



Подписано к использованию 22.10.2025.
Тираж 50 экз. Заказ № 107

Издательский центр ФГБОУ ВО «ТГТУ»
392000, г. Тамбов, ул. Советская, д. 106/5,
помещение 2, к. 14
Тел. 8(4752) 63-81-08;
E-mail: izdatelstvo@tstu.ru