Министерство образования и науки Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
“Тамбовский государственный технический университет”

ФИЗИКА

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ.
ЕГО СВОЙСТВА И ХАРАКТЕРИСТИКИ

Конспект лекций

Утверждено Ученым советом ТГТУ
в качестве учебного пособия

Тамбов 2008

УДК 535. 338 (0765)
ББК В 36 я 73-5
Б261

Р е ц е н з е н т :

Кандидат физико-математических наук, доцент
В. М. Иванов

С о с т а в и т е л и
В.И.Барсуков
О.С.Дмитриев

Б261 Физика. Электростатика.(Электростатическое поле. Его свойства и характеристики): конспект лекций / В.И. Барсуков, О.С. Дмитриев. Тамбов: Тамб. гос. техн. ун-т, изд-во ООО «Центр-пресс», 2008.- 120 с.

Представляет собой конспект лекций по разделу “Электромагнетизм” курса общей физики, читаемого в соответствии с Государственным стандартом для высших технических учебных заведений.

Оно предназначено для студентов первых курсов всех специальностей инженерного профиля дневного и заочного отделений.

УДК 535. 338 (0765)
ББК В 36я 73-5

ВВЕДЕНИЕ

В представленном учебном пособии рассматриваются основные современные положения из раздела учения об электричестве.

Само же учение достаточно бурно начало развиваться только с середины XIX в., когда, в связи с развитием техники и теплотехники, встал вопрос о дополнительных мощных и удобных источниках энергии.

Возникшие проблемы были разрешены с помощью использования электрической энергии, благодаря исключительным, по сравнению с другими видами, ее свойствам.

Электрическую энергию можно передавать в практически неограниченных количествах на большие расстояния и с незначительными потерями. Если к этому добавить легкость преобразования электрической энергии в другие виды энергии, высокие коэффициенты полезного действия устройств, в которых эти превращения происходят, при самой различной мощности, то станет ясным, что практическое использование электрической энергии в промышленности привело к революции в технике.

В настоящее время с помощью электрической энергии осуществляется искусственное освещение, приводятся в действие станки и транспорт, осуществляются сигнализация, связь, телевидение и почти все измерения величин в науке и технике. Без электрической энергии были бы крайне затруднены, а иногда и невозможны, автоматизация производства в широких масштабах, управление агрегатами на расстоянии, изучение космического пространства. Электроэнергия получила разнообразные специальные применения в металлургии (электроплавка, получение легких металлов), в машиностроении (сварка, резка металлов), в химии (электролиз), на транспорте и т.д. Общеизвестно и широкое применение электроприборов в быту.

Не менее важна и теоретическая роль учения об электричестве и магнетизме.

Именно к электромагнитным взаимодействиям сводятся в конечном итоге межатомные и межмолекулярные силы, в том числе и так называемые “обменные силы”, являющиеся своеобразным квантовомеханическим результатом электромагнитных взаимодействий между заряженными частицами – электронами и ядрами.

Действиями электромагнитных сил объясняется громадное количество явлений, в том числе и таких, которые на первый взгляд никакого отношения к электричеству не имеют, как, например, механические (упругость твердых тел и жидкостей), тепловые (теплопроводность металлов), оптические (показатель преломления) и т.д.

Электрохимические явления указали на тесную связь, существующую между веществом и электричеством, и в настоящее время учение о строении материи неразрывно связано с учением об электричестве.

С другой стороны, учение об электромагнитных волнах включило в область электромагнетизма и учение о свете.

Кроме того, электромагнитные явления лежат в основе процессов, происходящих внутри атома. Не зная закономерностей электромагнитных явлений, нельзя было бы изучать строение атомов и атомных ядер.

Таким образом, учение об электромагнетизме занимает одно из центральных мест в современной физике.

Нельзя не отметить, что в этой области русским ученым принадлежит весьма почетное место. Достаточно напомнить имена М. В. Ломоносова и Г. В. Рихмана, изучавших атмосферное электричество; В. В. Петрова, открывшего электрическую дугу; Э. Х. Ленца, изучившего тепловые действия электрического тока и открывшего закон, которому следует электромагнитная индукция; Б. С. Якоби, сконструировавшего первый электромагнитный двигатель и применившего его для приведения в действие речного бота и железнодорожного вагона и открывшего и применившего гальванопластику и гальваностегию; А. Г. Столетова, изучившего явления фотоэлектричества; П. Н. Яблочкова, который изобрел первый, практически удобный способ освещения электрической дугой; А. Н. Лодыгина - изобретателя электрической лампочки накаливания; Н. Г. Славянова и Н. Н. Бенардоса – изобретателей электросварки; М. О. Доливо-Добровольского – изобретателя трехфазного тока и вращающегося магнитного поля и их многочисленных применений; А. С. Попова – знаменитого изобретателя радио и многих, многих других, являющихся предметом законной гордости славной русской науки.

Крупных успехов в различных областях учения об электричестве достигли и советские ученые. Ими были разработаны многие проблемы, имеющие не только большой теоретический интерес, но и огромное практическое значение. Сюда относятся вопросы физики диэлектриков, полупроводников, магнетиков, физики газового разряда и физики плазмы больших энергий, термоэлектронной эмиссии, фотоэффекта, электромагнитных колебаний и волн, лазерной техники и т.д.

Таким образом, раздел физики, посвященный электромагнетизму имеет особо важное значение для изучения науки и для освоения современной техники.

Часть 1. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ И ЕГО ХАРАКТЕРИСТИКИ

1.1 ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ – МАТЕРИАЛЬНЫЙ НОСИТЕЛЬ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

1 В основе учения об электричестве лежит представление об *электромагнитном поле.*

Напомним, что термин «поле» в физике применяется для обозначения нескольких различных по своему содержанию понятий.

Во-первых, словом «поле» характеризуют *пространственное распределение* какой-либо физической величины, векторной или скалярной. Изучая, например, тепловое состояние в различных точках среды, говорят о скалярном поле температур, рассматривая процесс распространения механических колебаний в упругой среде, говорят о механическом волновом поле и т.д. В этих примерах термин «поле» описывает *физическое состояние* изучаемой материальной среды.

Во - вторых, полем называют особый *вид материи*. Понятие поля как особого вида материи возникло в связи с проблемой *взаимодействия*. Как передается действие сил – мгновенно или с конечной скоростью, через посредство промежуточной среды или без ее участия?

Теория, утверждающая, что действие сил передается *через пустоту мгновенно*, носит название теории *дальнодействия.*

Теория, утверждающая, что действие сил передается с *конечной скоростью* через посредство промежуточной *материальной среды*, называется теорией *близкодействия.*

Современная физика признает только близкодействие и отвергает дальнодействие.

2 Как уже говорилось ранее (в механике), в настоящее время известны следующие типы взаимодействия: гравитационное, электромагнитное, сильное и слабое.

Каждый тип взаимодействия с механической точки зрения характеризует соответствующие силы: гравитационные, электромагнитные, ядерные.

Передачу того или иного взаимодействия, передачу сил современная физика мыслит как процесс распространения *возмущений* соответствующего *поля,* связанного с взаимодействующими объектами.

Электромагнитное поле – это особый вид материи, посредством которого осуществляется электромагнитное взаимодействие между частицами, обладающими электрическим зарядом.

Говоря кратко, - это *особый вид материи, передающий действие электромагнитных сил.*

Электромагнитное поле отличается *непрерывным распределением в пространстве* (доказательством тому служит существование *электромагнитных волн).* Вместе с тем, электромагнитное поле обнаруживает *дискретность структуры*, о чем говорит существование *фотонов.* Электромагнитное поле обладает способностью распространяться в вакууме со скоростью 3.10^8 м/с и оказывать на заряженные частицы силовое воздействие, зависящее от их заряда и скорости.

Опытом установлено, что электромагнитное поле обладает массой, энергией, импульсом и т.д. Все это - неоспоримые доказательства физической реальности этого вида материи.

3 При исследовании электромагнитного поля обнаруживаются два его проявления, две неразрывно связанные стороны – электрическое и магнитное поля.

Электрическое поле – одна из двух сторон электромагнитного поля, обусловленная *электрическими зарядами* и *изменением магнитного поля* и передающая действие *электрических сил.*

Электрическая сила – одна из двух *составляющих* электромагнитной силы. Величина и направление ее зависят от *положения* заряженного тела или частицы в электромагнитном поле.

Выявляется электрическое поле по *силовому воздействию на неподвижные* заряженные тела или частицы (хотя оно действует и на движущиеся заряженные частицы и тела).

Магнитное поле - одна из двух сторон электромагнитного поля, обусловленная *движением* электрических зарядов и *изменением электрического поля* и передающая действие магнитных сил.

Магнитная сила – другая составляющая электромагнитной силы. Особенностью этой силы является то, что она действует только на *движущиеся* заряды, ее величина и направление зависят от *скорости движения* заряженных частиц относительно электромагнитного поля.

Обнаруживается магнитное поле по *силовому воздействию* на *движущиеся* заряженные тела или частицы, направленному нормально к направлению движения этих тел и частиц.

4 Электрические и магнитные явления обычно рассматриваются раздельно, хотя в действительности «чисто» электрических или «чисто» магнитных явлений не существует. Существует единый электромагнитный процесс. В связи с этим разделение электромагнитного взаимодействия на электрическое и магнитное, разделение единых электромагнитных сил на электрические и магнитные носит условный характер, и эта условность легко может быть доказана. Столь же условна и сама терминология - «электрические», «магнитные» силы. Поэтому в последующем мы, как правило, будем говорить просто о силе, действующей на тот или иной заряд, не называя ее - электрической или магнитной.

1.2 ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЗАРЯДЫ

1 *Электрический заряд - неотъемлемое свойство, присущее некоторым «простейшим» частицам материи – так называемым «элементарным» частицам.* Электрический заряд вместе с массой, энергией, спином и т.д. образуют «комплекс» фундаментальных свойств частиц.

Из известных в настоящее время элементарных частиц электрическим зарядом обладают электроны, позитроны, протоны, антипротоны, некоторые мезоны и гипероны, и их античастицы. Не обладают электрическим зарядом нейтроны, нейтрино, нейтральные мезоны и гипероны, и их античастицы, а также фотоны.

2 Известны только два рода электрических зарядов, условно называемые *положительными* и *отрицательными* (термины «положительное» и «отрицательное» электричество впервые введены В. Франклином (США) в XVIII в.).

3 Многочисленными опытами установлено, что абсолютная величина заряда всех заряженных элементарных частиц одинакова и равна $1{,}6.10^{-19}$ Кл. Этот минимальный электрический заряд (положительный или отрицательный) называется элементарным зарядом или атомом электричества.

Любой заряд q состоит из целого числа элементарных зарядов:

$$q = \pm\ eN$$

где e**-** абсолютная величина заряда; N **-** любое целое положительное число (1,2,3…).

Изменение любого заряда может происходить только скачком, сразу на величину одного или нескольких элементарных зарядов.

Идея о дискретном, атомистическом строении электричества была выдвинута В. Вебером и Г. Гельмгольцем (Германия) во второй половине XIX в. Опытным обоснованием этой идеи было открытие законов электролиза (М. Фарадей. Англия) и исследование свойств катодных и анодных лучей (Крукс, Англия).

4 Если заряд q содержит весьма большое число элементарных зарядов, его называют *макроскопическим*. Изменение такого заряда можно считать *непрерывным,* т.к. элементарный заряд по сравнению с ним весьма мал.

5 Прямое экспериментальное определение величины элементарного заряда (заряда электрона) было впервые осуществлено в 1909 – 1904 гг. Р. Э. Милликеном (США) и А. Ф. Иоффе (Россия). После опытов Милликена и Иоффе была отвергнута выдвинутая было гипотеза о существовании субэлектронов, т.е. зарядов, меньших заряда электрона.

6 Электрический заряд *неотделим* от частиц, которым он принадлежит. Неуничтожимость материи влечет за собой *неуничтожимость электрического заряда.* К известным из механики и теоретической механики законам сохранения массы, импульса, момента импульса, энергии следует добавить ***закон сохранения электрического заряда: в замкнутой системе тел или частиц алгебраическая сумма зарядов есть величина постоянная, какие бы процессы не происходили в системе.*** Закон сохранения заряда был установлен экспериментально Ф. Эпинусом (Россия) и М. Фарадеем (Англия).

7 Все элементарные заряженные частицы всегда находятся в состоянии *движения*. Рассматриваемые в электростатике «неподвижные» заряды есть результат макроскопического усреднения: если геометрическая сумма скоростей всех элементарных зарядов, образующих данный макроскопический заряд q , в среднем равна нулю, то такой заряд проявляет себя в окружающем пространстве как «неподвижный».

8 Элементарные заряды, имеющиеся в телах, будем называть *свободными,* если заряженные частицы могут перемещаться по всему объему тела, и *связанными,* если они прочно связаны со своими атомами или молекулами.

9 Макроскопический заряд будем называть свободным, если состоит из свободных элементарных зарядов, и связанным, если он состоит из связанных элементарных зарядов.

10 С движением любого элементарного заряда связано наличие *электромагнитного микрополя.* Электрическое и магнитное поля, изучаемые электростатикой и макроскопической электродинамикой, являются *усредненными*: они представляют собой наложение (суперпозицию) микрополей, создаваемую большой совокупностью движущихся элементарных зарядов.

Опыт показывает, что усредненное электрическое поле может быть отлично от нуля не только тогда, когда его «источник» - макрозаряд неподвижен, но и тогда, когда он *движется*. Усредненное магнитное поле отлично от нуля только тогда, когда создающий его макрозаряд находится *в движении*. Если макрозаряд неподвижен, то магнитные поля элементарных зарядов *компенсируют* друг друга, поэтому суммарное магнитное поле не обнаруживается и, наблюдаемые явления, выглядят как «чисто» электрические.

11 Предметом электростатики является изучение взаимодействия *макроскопических зарядов*, находящихся в условии *равновесия*, а также свойств электрических полей, связанных с такими зарядами. Электрические поля, связанные с *неподвижными* зарядами, называются *электростатическими,* а электрические силы, характеризующие взаимодействие таких зарядов, - *электростатическими или кулоновскими.*

1.3 ЗАКОН КУЛОНА

1 Наличие у тела электрического заряда проявляется в том, что такое тело оказывает (через посредство электрического поля) силовое воздействие на другие заряженные тела.

Французский ученый Ш. Кулон установил (1785 г.) закон взаимодействия неподвижных точечных электрических зарядов**.**

Заряд называется точечным, если размеры тела, обладающего этим зарядом, малы по сравнению с расстояниями до других заряженных тел.

Согласно закону Кулона *сила электростатического взаимодействия между двумя точечными зарядами в вакууме прямо пропорциональна величине каждого из зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и направлена по прямой, соединяющей эти заряды:*

$$F_0 = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \qquad (1.3.1)$$

где q_1 и q_2 - величины зарядов; r_{12} - расстояние между ними; k - коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора единиц измерения *q, F,* r_{12}.

2 Сила взаимодействующих зарядов в безгранично однородной и изотропной среде уменьшается в ε раз

$$F = k\frac{q_1 q_2}{\varepsilon\, r_{12}^2} \qquad (1.3.2)$$

ε - относительная диэлектрическая проницаемость среды, показывающая, во сколько раз уменьшается силовое взаимодействие зарядов в среде по сравнению с взаимодействием этих же зарядов в вакууме:

$$\varepsilon = \frac{F_0}{F}$$

3 Чтобы формуле Кулона придать *векторный* вид, правую часть (1.3.2) надо умножить на единичный вектор $\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$

$$\vec{F}_{12} = -k\frac{q_1 q_2}{\varepsilon\, r_{12}^2}\cdot\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}; \qquad (1.3.3)$$

$$\vec{F}_{21} = k\frac{q_1 q_2}{\varepsilon\, r_{12}^2}\cdot\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}, \qquad (1.3.4)$$

где $\vec{F}_{12}$ – сила, действующая на *первый* заряд со стороны второго; $\vec{F}_{21}$ – сила, действующая на *второй* заряд со стороны первого; $\vec{r}_{12}$ – вектор, проведенный от первого заряда ко второму

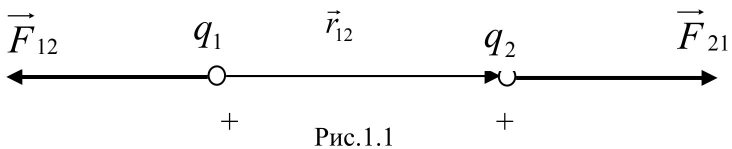


Рис.1.1

Направления силы $\vec{F}_{12}$ и $\vec{F}_{21}$ на рис.1.1 и знаки «минус» и «плюс» в формулах (1.3.3) – (1.3.4) соответствуют *одноименным* зарядам.

Как видно из формул (1.3.3) и (1.3.4), направление $\vec{F}_{21}$ *совпадает* с направлением $\vec{r}_{12}$, а направление $\vec{F}_{12}$ *противоположно* $\vec{r}_{12}$.

Напомним, что силы притяжения принято считать отрицательными, а силы отталкивания – положительными.

На рис.1.2 изображена зависимость силы взаимодействия одноименных (кривая *а*) и разноименных (кривая *б*) точечных зарядов.

4 Закон Кулона выражает силу взаимодействия между *неподвижными* электрическими зарядами, т.е. является, в сущности, *электростатическим законом*. Для *движущихся* зарядов этот закон перестает быть точным.

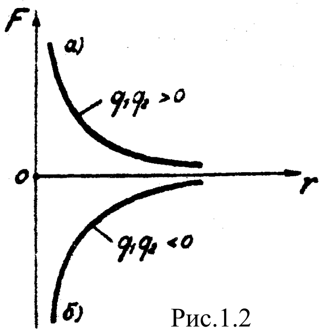


Рис.1.2

5 Силы электростатического взаимодействия подчиняются третьему закону Ньютона: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

6 Нетрудно подметить формальную *аналогию* между законом Кулона и законом всемирного тяготения Ньютона. И электрические, и гравитационные силы являются центральными – направлены по прямой, соединяющие взаимодействующие тела. И те, и другие силы *обратно пропорциональны квадрату расстояния* между ними. Однако между этими законами есть и принципиальное *различие*: электростатические силы могут быть как силами *притяжения*, так и силами *отталкивания*, гравитационные – только притяжения; на электростатическое взаимодействие существенное влияние оказывает среда, на гравитационное – нет.

7 Закон Кулона справедлив только для *точечных* зарядов. Чтобы вычислить силу взаимодействия между зарядами q_1 и q_2, сосредоточенными

на телах *конечных* размеров, поступают следующим образом. Каждый из зарядов разбивают на столь малые порции dq, что их можно считать точечными, затем по формуле (1.3.4) находят силы взаимодействия между всеми парами, после чего геометрически складывают эти силы:

$$\vec{F}_{21} = \int d\vec{F}_{ki}, \qquad (1.3.5)$$

здесь $d\vec{F}_{ki} = k\dfrac{dq_i dq_k}{\varepsilon\ \ r_{ik}^2}\cdot\dfrac{\vec{r}_{ik}}{r_{ik}}$ – сила, с которой i - й заряд первого тела действует на k – й заряд второго тела (рис.1.3), а $\vec{F}_{21}$ – сила, действующая на второе тело со стороны первого.

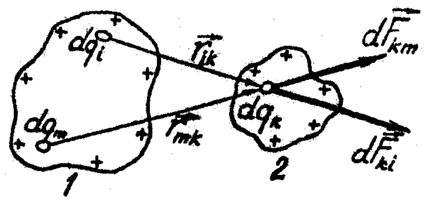


Рис. 1.3

Можно показать теоретически и убедиться на опыте, что если заряды распределены равномерно по поверхности или объему тел сферической формы, то сила электростатического взаимодействия между ними такова, как если бы были сосредоточены в геометрических *центрах* этих тел. В этом случае силу можно рассчитывать по закону Кулона (1.3.2), понимая под r_{12} расстояние между центрами сфер (рис.1.4, *а*)

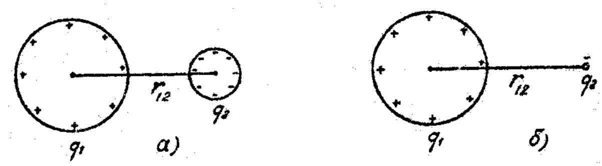


Рис.1.4

Наконец, формулу Кулона (3.2) можно применять в случае, когда один из зарядов точный, а другой сосредоточен на сфере и распределен по ней равномерно (рис.1.4, *б*)

1.4 СИСТЕМА ЕДИНИЦ В ЭЛЕКТРОСТАТИКЕ. РАЦИОНАЛИЗАЦИЯ ФОРМУЛ

1 Единица измерения заряда может быть установлена на основе закона Кулона, а может быть введена *независимо* от него.

Если единица заряда устанавливается из закона Кулона, то ее разумно выбрать такой, чтобы коэффициент пропорциональности в формуле (1.3.1) оказался равным 1 (при этом используются единицы силы и расстояния, установленные в механике).

Если единицей силы является дина, расстояния – сантиметр, то единица заряда, соответствующая k=1 в законе Кулона, называется *абсолютной электростатической единицей заряда* (сокращенное обозначение СГСЭ q).

Абсолютная электростатическая единица заряда – это такой заряд, который действует на равный ему заряд, расположенный на расстоянии 1 см в вакууме, с силой в 1 дину.

Система единиц, в которой за основные единицы приняты сантиметр, грамм, секунда и в которой заряд измеряется в абсолютных электростатических единицах, называется СГСЭ – системой (абсолютной электростатической системой).

Закон Кулона в системе СГСЭ имеет вид:

$$F = \frac{q_1 q_2}{\varepsilon \ r^2} \qquad (1.4.1)$$

2 В системе СИ единица заряда, называемая *кулоном,* устанавливается не из закона Кулона, а из других закономерностей.

Кулон определяется через четвертую основную единицу системы СИ – единицу тока – *ампер* (напомним, что первыми тремя основными единицами этой системы являются метр, килограмм, секунда). Определяющим условием для единицы заряда в системе СИ является выражение $q = I \cdot t$.

Кулон (Кл) - заряд, протекающий через поперечное сечение проводника за 1 сек при токе в проводнике, равном 1А:

1Кл = 1А1сек

Определение ампера будет дано позднее.

Опытом установлено, что

1Кл = 3.10^9 СГСЭq.

3 Введение единицы заряда в системе СИ *независимо от закона Кулона* приводит к тому, что в формуле (1.3.2) сохраняется размерный коэффициент пропорциональности k:

$$F = k\frac{q_1 q_2}{\varepsilon \ r^2} \qquad (1.4.2)$$

Как видно из этой формулы, коэффициент k в системе СИ численно равен силе, с которой взаимодействовали бы в вакууме два точечных заряда величиной по 1 кулону каждый, расположенные на расстоянии 1 м друг от друга, т.е. если $q_1 = q_2 = 1Кл, \quad r = 1м, \varepsilon = 1,$ то $|k| = |F|$.

Коэффициент k может быть найден из опыта. Для этого необходимо измерить силу F, с которой взаимодействуют два точечных заряда q_1 и q_2, расположенных на некотором расстоянии r друг от друга в вакууме (практически в воздухе или, лучше молекулярном вакууме). Не следует думать при этом, что заряды обязательно должны быть единичными (кстати, заряд в 1*Кл* не удержится даже на шаре радиусом несколько метров: он пробьет любую изоляцию!), что расстояние между зарядом должно быть 1 м. И заряды и расстояния, в принципе могут быть любыми.

Подставив F (в ньютонах), q_1 и q_2 (в кулонах) и r (в метрах) в формулу (1.4.2), можно вычислить k. Многочисленные измерения дают для k значение:

$$k = 9 \cdot 10^9 \ \frac{Нм^2}{Кл^2}$$

Таким образом, при вычислении силы взаимодействия зарядов в системе СИ можно пользоваться формулой (4.2), понимая под

$$k = 9 \cdot 10^9 \ \frac{Нм^2}{Кл^2}$$

4 Было замечено, что во многие важные формулы электродинамики входит множитель 4π, делающий расчеты неудобными. Чтобы избавиться от этого множителя в наиболее важных формулах, О. Хевисайд (Англия) предложил ввести его искусственно в закон Кулона, представив коэффициент пропорциональности k в виде произведения двух сомножителей – безразмерного $\frac{1}{4\pi}$ и размерного $\frac{1}{\varepsilon_0}$:

$$k = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{\varepsilon_0} \qquad (1.4.3)$$

где ε_0 - новый коэффициент пропорциональности, называемый электрической постоянной.

Тогда закон Кулона в системе СИ примет вид:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{\varepsilon r^2} \qquad (1.4.4)$$

5 Введение в закон Кулона вместо коэффициента k равного ему коэффициента $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ видоизменяет все формулы электростатики: из наиболее употребительных формул множитель 4π исчезает (в результате сокращения), и это делает формулы более простыми, в других же формулах, наоборот, он появляется, что, к сожалению, приводит к усложнению их вида.

«Исправленные» указанным образом формулы называются *рационализированными,* а система единиц, построенная на использовании рационализованных формул – *рационализованной.*

Система СИ является рационализованной системой, система СГСЭ – нерационализованной.

Как и в предыдущих разделах курса, в электростатике мы будем пользоваться только системой СИ. Будет, однако, полезным самостоятельным упражнением переход от системы СИ к системе СГСЭ. Этот переход осуществляется просто: если в формуле, записанной в системе СИ, электрическая постоянная ε_0 стоит в знаменателе, то для перехода к нерационализованной СГСЭ – системе числитель надо умножить на $4\pi\varepsilon_0$, если ε_0 стоит в числителе, то на $4\pi\varepsilon_0$ умножается знаменатель.

6 Найдем теперь численное значение и наименование величины ε_0 системы СИ.

Из формулы (4.3) $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{4\pi k}$, а так как $k = 9\cdot10^9\,\dfrac{Нм^2}{Кл^2}$, то

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\cdot3.14\cdot9\cdot10^9\,\dfrac{Нм^2}{Кл^2}} = 8{,}85\cdot10^{-12}\,\frac{Кл^2}{Нм^2}$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1 Что такое электромагнитное поле?

2 Что называется магнитным полем?

3 Что называется электрическим полем?

4 Какой заряд называется элементарным и какой – макроскопическим?

5 Какой заряд называется свободным и какой - связанным?

6 Сформулируйте закон сохранения электрического заряда?

7 Какой заряд называется точечным и какой - протяженным?

8 Сформулируйте закон Кулона.

9 В чем заключается сходство и различие между законом электростатического взаимодействия зарядов и гравитационного взаимодействия материальных тел?

10 В каких единицах измеряется заряд в системе СИ?

11 Объясните, почему в законе Кулона, записанном в системе СИ, имеется размерный коэффициент пропорциональности.

12 В чем состоит рационализация формул электростатики и чем она вызвана?

1.5 НАПРЯЖЕННОСТЬ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Перейдем к описанию свойств электрического поля

1 Следует различать *две* разновидности электрического поля: *электростатическое* или безвихревое и *вихревое* или соленоидальное.

Электростатическое поле характеризуется тем, что оно *не изменяется* с течением времени. Кроме того, такое поле *не может существовать в отрыве от электрических зарядов:* электрические заряды являются его «источником».

Вихревое электрическое поле характеризуется тем, что *оно может изменяться с* течением времени и может существовать в отрыве от электрических зарядов.

2 Электрическое поле оказывает *силовое воздействие* на вносимые в него электрические заряды

Заряженное тело, при помощи которого обнаруживается и исследуется электрическое поле, называется *пробным зарядом*. Пробный заряд должен отвечать некоторым вполне определенным требованиям.

а) Пробный заряд должен быть достаточно малым по величине.

С пробным зарядом связано его собственное электрическое поле. Это поле, воздействуя на заряды, создающие исследуемое поле, вызывает их перераспределение. В результате исследуемое поле «искажается», оно становиться не таким, каким было раньше, до внесения пробного заряда. Чем меньше величина пробного заряда, тем меньше он искажает исследуемое поле.

б) Пробный заряд должен быть точечным.

Сила, действующая на пробный заряд, характеризует свойства поля, усредненные по тому объему, который занимает этот заряд. Чем меньше объем, занимаемый пробным зарядом, тем ближе найденный средние характеристики поля к истинным «точечным» характеристикам.

в) Условились в качестве пробного заряда выбирать *положительный* заряд, чтобы отразить это, будем обозначать пробный заря индексом «+»: q_+.

3 Как показывает опыт, сила $\vec{F}$, действующая на пробный заряд q_+, помещенный в данную точку поля, зависит как от *свойств* поля в этой точке, так и от *величины пробного заряда.*

Сила же, отнесенная к *единице* заряда (чтобы найти эту силу, достаточно взять отношение $\dfrac{F}{q_+}$), зависит *только от свойств поля* в рассматриваемой точке и, следовательно, может служить его характеристикой в этой точке. Это *векторная* величина характеризует *силовое действие* поля на вносимые в него заряды и называется *напряженностью* (ее часто называют просто «полем», иногда электрическим вектором).

Таким образом, *напряженность электрического* (и статического, и вихревого) *поля есть векторная физическая величина, характеризующая силовое действие поля на вносимые в него электрические заряды и численно равная силе, с которой поле действовало бы на единичный точечный заряд, помещенный в данную точку. Направление* вектора напряженности совпадает с направлением силы, действующей на *положительный* пробный заряд:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_+} \qquad (1.5.1)$$

4 Заметим: напряженность характеризует любую точку поля *независимо* от того, есть в ней пробный заряд или нет.

5 За единицу напряженности в системе СИ принимается напряженность такой точки поля, в которой на заряд в *1Кл* действует сила в *1Н*:

$$1\,СИ_E = \frac{1Н}{1К}.$$

6 Если *вектор* напряженности во всех точках поля одинаков по величине и имеет *одно и то же направление*, то такое *поле* называется *однородным:*

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_2 = ... \qquad (1.5.2)$$

7 Найдем выражение для напряженности поля, созданного точечным зарядом. Силу, действующую на пробный заряд со стороны заряда, создающего поле, можно найти по формуле Кулона (так как оба заряда точечные):

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_0} \cdot \frac{q\ q_+}{\varepsilon\ r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

$\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из точки, где находится заряд q, создающий поле, в точку, где находится пробный заряд q_+.

Разделив силу $\vec{F}$ на величину пробного заряда, найдем величину и направление векторов напряженности:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_+} = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{\varepsilon\ r^2}\right)\frac{\vec{r}}{r} \qquad (1.5.3)$$

Величина, стоящая в формуле (5.3) в скобках, определяет численное значение напряженности:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{\varepsilon\ r^2} \qquad (1.5.4)$$

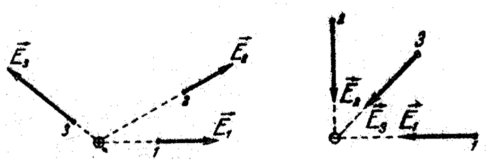


Рис.1.5

Из формулы (1.5.3) видно, что векторы $\vec{E}$ электрического поля во всех точках направлены радиально *от заряда*, если он *положителен*, и *к заряду,* если он *отрицателен* (рис.1.5).

8 Из определяющего уравнения для напряженности (1.5.1) следует, что на всякий точечный заряд в электрическом поле с напряженностью $\vec{E}$ действует сила

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} \qquad (1.5.5)$$

Если $q > 0$, направление $\vec{F}$ совпадает с направлением $\vec{E}$, если $q < 0$, направление $\vec{F}$ противоположно направлению $\vec{E}$.

9 Наряду с напряженностью для описания электрического поля вводится вспомогательная, чисто *расчетная* характеристика, называемая *электростатической индукцией* или электрическим смещением $\vec{D}$ (подробнее об этой величине речь пойдет в п.1.19).

Если среда *изотропна*, то связь между индукцией $\vec{D}$ и напряженностью $\vec{E}$ в любой точке поля выражается формулой:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} \qquad (1.5.6)$$

где ε_0 – электрическая постоянная; ε – относительная проницаемость среды.

10 Найдем индукцию для *точечного* заряда. Для этого в формулу (1.5.6) подставим выражение для $\vec{E}$ по (1.3.5). Получим:

$$\vec{D} = \frac{q}{4\pi r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \qquad (1.5.7)$$

Численное значение индукции в этом случае:

$$D = \frac{q}{4\pi r^2} \qquad (1.5.8)$$

Существенно подчеркнуть, что по формулам (1.5.7) и (1.5.8) можно находить величину и направление индукции только в случае, если поле создано в *однородной, изотропной и безграничной среде.*

1.6 ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ ПОЛЕЙ

1 «Источники» *электростатических* полей обычно представляют собой *систему* сосредоточенных (точечных) или распределенных (непрерывных) *макроскопических* зарядов.

2 Пусть поле создано *в вакууме* системой точечных зарядов q_1, q_2, $...q_n$. Каждый из этих зарядов, взятый в отдельности (т.е. в *отсутствие* других зарядов), действует на пробный заряд q_+ соответственно с силой F_1, F_2, $..., F_n$. Измерения показывают, что *результирующая* сила $\vec{F}$, действующая со стороны *всех* зарядов, равна геометрической сумме сил F_1, F_2, $..., F_n$

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n \qquad (1.6.1)$$

Разделив левую и правую части этого соотношения на величину пробного заряда q_+, мы получим выражение для напряженности:

$$\frac{\vec{F}}{q_+} = \frac{\vec{F}_1}{q_+} + \frac{\vec{F}_2}{q_+} + ... + \frac{\vec{F}_n}{q_+},$$

т.е. $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + ... + \vec{E}_n$ или кратко

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i, \qquad (1.6.2)$$

где $\vec{E}_i$ – напряженность электрического поля, которую создавал бы заряд q_i в данной точке, если бы он был одиночным, т.е. если бы всех других зарядов не было.

$\vec{E}$ – напряженность результирующего поля, т.е. поля, которое существует при наличии всех зарядов системы.

Таким образом, *напряженность* электростатического поля, созданного *в вакууме системой точечных зарядов, равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности*.

Соотношение (1.6.2) выражает весьма важный принцип независимости действия полей или принцип *суперпозиции* (наложения) полей.

3 Принцип суперпозиции справедлив и для поля, созданного системой непрерывно распределенных зарядов. Только в этом случае суммирование (1.6.2) заменяется интегрированием:

$$\vec{E} = \int_q d\vec{E} \qquad (1.6.3)$$

где $d\vec{E}$ – напряженность, создаваемая в данной точке бесконечно малым зарядом dq, а символ «q» означает, что интегрирование распространяется на весь непрерывно распределенный заряд q.

4 При наличии *среды* соотношения (1.6.2) и (1.6.3) будут иметь место только при условии, если диэлектрическая проницаемость среды ε *не зависит от напряженности поля.*

В самом деле, если ε зависит от напряженности поля (такие среды называют *сегнетоэлектрическими*), то один и тот же заряд при *наличии* других зарядов создаст в данной точке напряженность $E_i^{/} = \dfrac{q_i}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon^{/} r_i^2}$, *отличную* от напряженности $E_i^{//} = \dfrac{q_i}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon^{//} r_i^2}$, которую он создавал бы, будучи одиночным (так как в этом случае $\varepsilon^{/} \neq \varepsilon^{//}$).

1.7 РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА СУПЕРПОЗИЦИИ

1 Одной из важных прикладных задач электростатики является расчет электрических полей, имеющихся в различных приборах и аппаратах (конденсаторах, электронных лампах, кабелях и т.д.)

Рассчитать поле – это значит определить в любой его точке величину и направление вектора напряженности.

Эта задача в общем случае может быть решена на основе закона Кулона и принципа суперпозиции.

2 *Схема* решения задачи в случае системы *точечных* зарядов такова.

1) По формуле поля точечного заряда находят напряженности $\vec{E}_1,...,\vec{E}_i$, создаваемые каждым зарядом в отдельности:

$$\vec{E}_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\ r_1^2}\cdot\frac{\vec{r}_1}{r_1},...,\vec{E}_i = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\ r_i^2}\cdot\frac{\vec{r}_i}{r_i}, \qquad (1.7.1)$$

где $\vec{r}_1,...,\vec{r}_i$ – радиус-векторы, проведенные из точек, где находятся заряды $q_1,...,q_i$ в точку, где определяется напряженность.

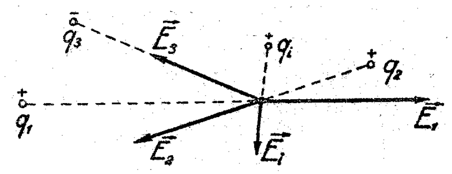


Рис.1.6

2) Напряженности, создаваемые отдельными зарядами, геометрически складываются:
$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n}\vec{E}_i \qquad (1.7.2)$$

(на рис.1.6 вектор результирующей напряженности не показан).

3 *Схема* решения в случае *непрерывно распределенных зарядов.*

1) Протяженный *заряд* q *разбивается* на достаточно малые порции dq с тем, чтобы каждую такую порцию можно было рассматривать как точечный заряд. Чтобы вычислить dq, надо знать *закон распределения зарядов в пространстве*. Вводятся понятия объемной (ρ), поверхностной (σ) и линейной плотности (τ) зарядов. Объемная плотность $\rho = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \dfrac{\Delta q}{\Delta V} = \dfrac{dq}{dV}$ измеряется зарядом единицы объема тела, поверхностная $\sigma = \lim\limits_{\Delta S \to 0} \dfrac{\Delta q}{\Delta S} = \dfrac{dq}{dS}$ – зарядом единицы поверхности и линейная $\tau = \lim\limits_{\Delta l \to 0} \dfrac{\Delta q}{\Delta l} = \dfrac{dq}{dl}$ – зарядом единицы длины тела.

Закон распределения зарядов известен, если известна зависимость *ρ, σ, τ* от соответствующих координат. Малые пропорции dq выражаются через объемную, поверхностную или линейную плотности зарядов следующим образом:

$$dq = \rho\ dV; \quad dq = \sigma\ dS; \quad dq = \tau\ dl\ .$$

2) По формуле поля точечного заряда рассчитываются напряженность $d\vec{E}$, создаваемая каждой отдельной порцией dq

$$\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\ r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \qquad (1.7.3)$$

3) Геометрически складываются напряженности, создаваемые отдельными точечными зарядами:

$$\vec{E} = \int_q d\vec{E} \qquad (1.7.4)$$

4 Примеры:

В качестве простейшего примера расчета поля, созданного системой точечных зарядов, рассмотрим поле электрического диполя (дипольное строение имеют многие молекулы, например, молекулы воды, спиртов, органических кислот и т.д.).

Электрический диполь – это система двух равных по величине и противоположных по знаку точечных зарядов q_+ и q_- смещенных на небольшое расстояние друг относительно друга.

Ориентацию диполя в пространстве указывает *его плечо* $\vec{l}$.

Плечо диполя $\vec{l}$ – это вектор, проведенный от отрицательного заряда к положительному и численно равный расстоянию между ними (рис.1.7).

Вектор, численно равный произведению величины плеча на абсолютную величину одного из зарядов диполя и совпадающий по направлению с $\vec{l}$, называется *электрическим моментом диполя:*

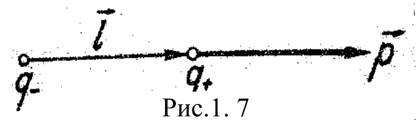


Рис.1. 7

$$\vec{p} = q\vec{l} \qquad (1.7.5)$$

В соответствии с принципом суперпозиции напряженность, создаваемая диполем в любой точке пространства, равна

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- \qquad (1.7.6)$$

где $\vec{E}_+$ и $\vec{E}_-$ - напряженности, создаваемые зарядами диполя q_+ и q_- (предполагается при этом, что диэлектрическая проницаемость среды не является функцией напряженности поля, в противном случае принцип суперпозиции не будет справедлив).

Найдем сначала напряженность поля в точке *M*, лежащей на оси диполя, т.е. на прямой, проходящей через заряд. Пусть интересующая нас точка отстоит от центра диполя на расстоянии r, причем $r >> l$ (рис.1.8). Так как во всех точках на оси диполя (не между зарядами) векторы $\vec{E}_+$ и $\vec{E}_-$ направлены в противоположные стороны, модуль результирующей напряженности в выбранной нами точке будет равен разности модулей $\vec{E}_+$ и $\vec{E}_-$

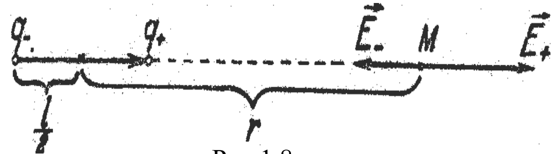


Рис.1.8

$$E_{//} = E_+ - E_- \qquad (1.7.7)$$

$\vec{E}_+$ и $\vec{E}_-$ - находим по формуле напряженности точечного заряда:

$$\vec{E}_+ = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\left(r - \frac{l}{2}\right)^2} \text{ и } \vec{E}_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\left(r + \frac{l}{2}\right)^2}$$

Тогда

$$E_{//} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left[\frac{1}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2}\right] = \frac{2qlr}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right)^2}$$

Пренебрегая в знаменателе величиной $\frac{l^2}{4}$ по сравнению с r^2 и сокращая числитель и знаменатель на r, получим $E_{//} = \frac{2qlr}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\ r^3}$. Но $ql = p$ – электрический момент диполя.

Следовательно,

$$E_{//} = \frac{2p}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\ r^3} \tag{1.7.8}$$

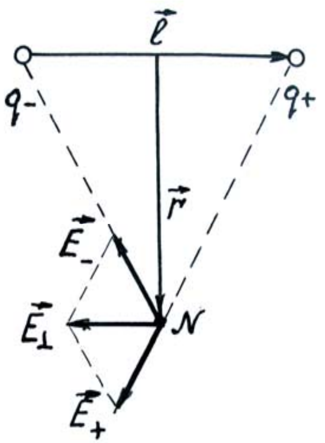


Рис.1.9

Таким образом, *напряженность* поля на оси диполя прямо пропорциональна *электрическому моменту* диполя и обратно пропорциональна кубу расстояния от диполя до точки наблюдения.

Найдем теперь напряженность в точке, лежащей на перпендикуляре к оси диполя, проходящем через центр диполя. Пусть точка наблюдения *N* отстоит от центра диполя на расстоянии r (рис.1.9), причем снова $r >> l$.

Так как точка *N* отстоит от заряда q_+ и q_- на *одинаковых* расстояниях, то $\left|\vec{E}_+\right| = \left|\vec{E}_-\right|$, а треугольники, опирающиеся на вектор $\vec{E}_\perp$ и плечо $\vec{l}$, - равнобедренные и подобны друг другу. Из подобия треугольников:

$$\frac{E_\perp}{E_+} = \frac{l}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}}$$

или $E_\perp = E_+ \frac{l}{r}$, так как $l << r$

$$E_+ = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)^2} \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\ r^2} \tag{1.7.9}$$

Подставив (1.7.9) в формулу для $\vec{E}_\perp$, получим

$$E_{\perp} = \frac{ql}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\ r^3} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\ r^3} \qquad (1.7.10)$$

Поле в точках, лежащих на перпендикуляре к оси диполя, в два раза слабее поля в точках на оси диполя (при условии, что соответствующие точки отстоят от центра диполя на одинаковых расстояниях).

Можно показать, что напряженность, создаваемая диполем в произвольной точке A, положение которой определяется радиус – вектором $\vec{r}$ (рис.1.10), численно равна

$$E = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^3}\sqrt{1+3Cos^2\alpha}, \qquad (1.7.11)$$

где r – модуль радиус-вектора; α – угол между направлением радиус – вектора $\vec{r}$ и плечом диполя.

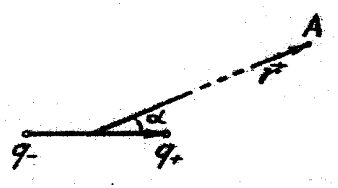


Рис.1.10

5. Рассмотрим теперь пример расчета поля, созданного *непрерывно распределенным зарядами*. Найдем напряженность поля на оси равномерно заряженного проволочного кольца на расстоянии h от его центра (рис.1.11). Пусть радиус кольца r_0, линейная плотность зарядов τ_+, величина полного заряда кольца $q = 2\pi r_0\tau$.

Разобьем все кольцо на малые элементы dl. Каждый из таких элементов несет заряд τdl и создает в интересующей нас точке напряженность,

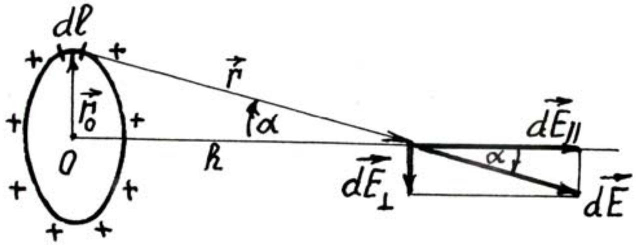


Рис.1.11

численное значение которой равно:

$$dE = \frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\ r^2}, \qquad (1.7.12)$$

где r – расстояние от элемента dl до точки наблюдения.

Разложим каждый из векторов $d\vec{E}$ на две составляющие - $dE_{//}$, направленную вдоль оси кольца, и $d\vec{E}_{\perp}$, направленную перпендикулярно этой оси (см. рис.1.11). При суммировании полей, создаваемых всеми элементами кольца, составляющие $d\vec{E}_{\perp}$ в сумме дадут нуль ($d\vec{E}_{\perp}$ на нашем чертеже скомпенсируется такой же составляющей напряженности $d\vec{E}'_{\perp}$, созданной диаметрально противоположным элементом dl'). Результирующее поле E будет складываться лишь из суммы составляющих $dE_{//}$:

$$E = \int dE_{//} \tag{1.7.13}$$

Как видно из чертежа, $dE_{//} = dECos\alpha$

Выразим r и $Cos\alpha$ через h и r_0:

$$r = \sqrt{h^2 + r_0^2} \quad ; \quad Cos\alpha = \frac{h}{r} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + r_0^2}}$$

Таким образом,

$$dE_{//} = \frac{\tau\ h\ dl}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\ \left(h^2 + r_0^2\right)^{3/2}}$$

Интегрируя по l от 0 до $2\pi r_0$, получим:

$$E = \int_0^{2\pi r_0} \frac{\tau\ h\ dl}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\ \left(h^2 + r_0^2\right)^{3/2}} = \frac{\tau\ h\ r_0}{2\varepsilon_0\varepsilon\ \left(h^2 + r_0^2\right)^{3/2}} \tag{1.7.14}$$

Таким образом, напряженность пропорциональна h – расстоянию от центра кольца.

В центре кольца ($h=0$) напряженность поля получается равной нулю.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1 В чем заключается различие между электростатическим и электрическим вихревым полем?

2 Что такое пробный заряд? Какие требования предъявляются к пробному заряду?

3 Что называется напряженностью электрического поля?

4 Что принимается за направление вектора напряженности?

5 Запишите выражение для напряженности поля точечного заряда в системе СИ.

6 Какова связь между электрической индукцией и напряженностью электрического поля?

7 Сформулируйте принцип суперпозиции полей.

8 Что такое электрический диполь?

9 Что определяет ориентацию электрического диполя в пространстве?

10 Чему равна напряженность электростатического поля, создаваемая электрическим диполем в произвольной точке?

11 Как рассчитывается напряженность электростатического поля в случае непрерывно распределенных зарядов?

ТЕОРЕМА ГАУССА

1.8 ЛИНИИ ВЕКТОРОВ НАПРЯЖЕННОСТИ И ИНДУКЦИИ

1 Электрическое поле можно описать *аналитически,* задав формулы, выражающие зависимость вектора напряженности от координат.

2 Электрическое поле можно представить *графически,* изобразив для некоторых точек величину и направление вектора напряженности $\vec{E}$. Однако такой способ графического представления электрического поля весьма неудобен, так как стрелки, изображающие напряженность, накладываются друг на друга, пересекаются и тем самым запутывают картину распределения $\vec{E}$.

3 М. Фарадеем был предложен более наглядный метод изображения электрического поля *при помощи линий вектора напряженности* (их называют также *силовыми линиями или линиями поля).*

Линией вектора напряженности называется линия, проведенная в поле так, что касательная в каждой ее точке совпадает с направлением вектора напряженности в этой же точке (рис.1.12). При помощи линий вектора напряженности удается охарактеризовать не только *направление* вектора $\vec{E}$, но и его *численное значение*. Линии поля обычно проводят так, чтобы число их через единичную площадку, перпендикулярную линиям, было равно или пропорционально напряженности в этом месте. Чем «гуще», «плотнее» идут линии вектора $\vec{E}$, тем больше здесь напряженность поля.

Рис. 1.12

4 Отметим некоторые *особенности линий электростатического поля:*

а) Линии электростатического поля всегда *разомкнуты:* они начинаются на положительных зарядах и обрываются на отрицательных. Допускается также, что линии поля могут уходить в бесконечность или приходить из бесконечности.

б) Линии электростатического поля нигде *не пересекаются*. Это является следствием того, что напряженность – *однозначная* характеристика поля: в каждой точке поля вектор $\vec{E}$ имеет *единственное* направление. Если бы линии поля пересекались, то в точке пересечения можно было бы провести две касательные и, следовательно, в этой точке вектор $\vec{E}$ имел бы два направления, что невозможно.

в) Линии *однородного* поля *параллельны* друг другу и проходят с одинаковой густотой; линии неоднородного поля непараллельны.

г) Линии поля *нельзя отождествлять с траекториями* движения положительно заряженных частиц. Касательные к траекториям указывают направление *скорости*, касательные к силовым линиям – направление *силы.* В случае криволинейного движения направления силы и скорости не совпадают.

5 Так же, как для вектора $\vec{E}$ вводят линии вектора напряженности, для вектора $\vec{D}$ вводят *линии вектора электростатической индукции* (кратко – лини индукции). Линии индукции проводятся так же, как и линии напряженности – чтобы направление касательной в каждой точке линии совпадало с направлением вектора $\vec{D}$. Остается в силе и соглашение о «густоте» линий: число линий индукции, пересекающих единичную площадку, перпендикулярно линиям поля, равно или пропорционально величине вектора $\vec{D}$ в этом месте.

1.9 ПОТОК ВЕКТОРА ИНДУКЦИИ

1 Расчет электрических полей, основанный на непосредственном применении закона Кулона и принципа суперпозиции, - задача несложная принципиально, но достаточно громоздкая *математически.*

Для облегчения расчетов при решении этой задачи был разработан *ряд вспомогательных методов и приемов.* Один из таких методов основан на применении *теоремы Гаусса.*

Прежде чем сформулировать эту теорему, введем понятие *потока вектора индукции.*

2 Назовем *элементарным потоком вектора индукции* через бесконечно малую площадку dS, ориентированную в электрическом поле произвольно, скалярную величину

$$dN = DdSCos\alpha \qquad (1.9.1)$$

где α – угол между направлением нормали $\vec{n}$ к площадке и направлением индукции $\vec{D}$ в том месте, где находится площадка (рис.1.13).

Легко видеть, что в правой части выражения (1.9.1) записано численное значение скалярного произведения вектора $\vec{D}$ на вектор $d\vec{S}$:

$$dN = \vec{D}d\vec{S} \qquad (1.9.2)$$

где $d\vec{S} = dS\vec{n}$ – вектор, численно равный величине площадки dS и совпадающий по направлению с направлением *единичной* нормали $\vec{n}$ к этой площадке. Произведение $DCos\alpha$ в выражении (1.9.1) можно рассматривать как проекцию вектора $\vec{D}$ на направление нормали $\vec{n}$:

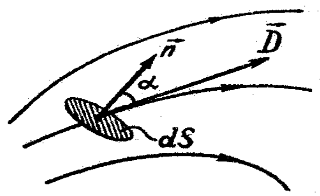


Рис.1.13

$$DCos\alpha = D_n$$

Следовательно,

$$dN = D_n dS \qquad (1.9.3)$$

С таким же правом можно рассматривать произведение $dSCos\alpha$ как проекцию площадки dS на плоскость, перпендикулярную D:

$$dSCos\alpha = dS_0$$

В этом случае

$$dN = DdS_0 \qquad (1.9.4)$$

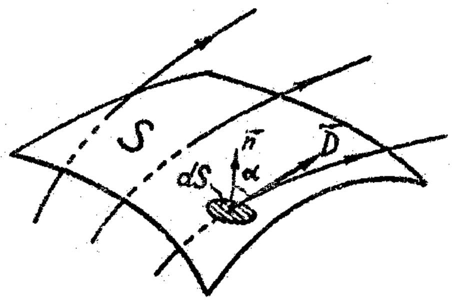


Рис.1.14

3 Формула (1.9.1) – *дифференциальная.* Она справедлива для *любого поля* - однородного и неоднородного. Площадка dS выбирается настолько малой, что ее можно считать плоской, а индукцию поля одинаковой во всех ее точках.

Чтобы найти полный поток, пронизывающий произвольную поверхность S (рис.1.14), нужно сложить потоки dN через все элементарные площадки dS рассматриваемой поверхности:

$$N = \int_S dN = \int_S D_n dS \qquad (1.9.5)$$

В некоторых частных случаях интегрирование формулы (1.9.5) приводит к весьма простым результатам. Так, если поле однородно (вектор $\vec{D}$ не зависит от координат), а поверхность S плоская, то поток вектора индукции сквозь эту поверхность равен:

$$N = DSCos\alpha = D_n S$$

К такому же простому результату можно прийти и в случае *неоднородного поля и криволинейной поверхности:* если форма поверхности такова, что численное значение вектора $\vec{D}$ во всех ее точках одинаково, а направление $\vec{D}$ составляет со всеми нормалями один и тот же угол.

4 Если число линий индукции, пронизывающих единичную площадку, перпендикулярную линиям поля, равно величине вектора $\vec{D}$ в этом месте, то поток вектора $\vec{D}$ можно определить как *число линий индукции*, пронизывающих данную поверхность S.

Не следует, однако преувеличивать роль этого определения. Оно не более, как вспомогательный прием, своеобразная геометрическая модель этого важного физического понятия.

5 *Поток вектора индукции* - величина *алгебраическая.* Знак потока зависит от выбора направления нормалей к элементарным площадкам dS, на которые разбивается поверхность S.

Условимся в случае замкнутых поверхностей (именно о таких поверхностях пойдет речь в теореме Гаусса) под нормалью к площадке dS понимать *внешнюю* нормаль, т.е. нормаль, обращенную наружу, вовне. При таком выборе направления нормали поток через площадку dS будет *положительным,* если угол между вектором $\vec{D}$ и нормалью $\vec{n}$ – *острый* (вектор $\vec{D}$ направлен *наружу*, линии поля *«выходят»* из объема, ограниченного поверхностью, поток «вытекает» из этого объема). Если же угол между внешней нормалью и направлением $\vec{D}$ тупой, то поток будет *отрицательным* (вектор $\vec{D}$ направлен *внутрь* объема, линии $\vec{D}$ «*входят»* в объем). Рис. 15 поясняет сказанное.

$$dN_1 = D_1 dS_1 Cos\alpha_1 < 0$$
$$dN_2 = D_2 dS_2 Cos\alpha_2 > 0$$

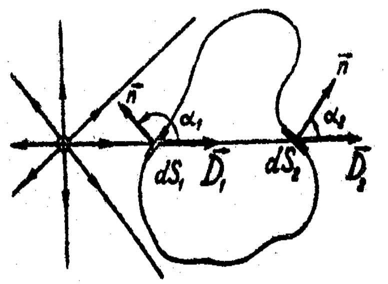


Рис.15

6 Совершенно аналогично вводится понятие *потока вектора напряженности.*

Элементарный поток вектора напряженности:

$$dN_E = EdSCos\left(\vec{E},\vec{n}\right) = E_n dS \qquad (9.6)$$

Полный поток вектора напряженности через произвольную поверхность S:

$$N_E = \int_S E_n dS \qquad (9.7)$$

10 ТЕОРЕМА ГАУССА

1 Теорема Гаусса устанавливает *связь* между *потоком вектора индукции* (или напряженности) через произвольную *замкнутую поверхность* и суммарным *свободным зарядом*, находящимся *внутри* объема, ограниченного этой поверхностью. По соображениям, которые будут изложены позднее, сформулируем теорему Гаусса для потока вектора $\vec{D}$.

2 Пусть электрическое поле создано свободным положительным точечным зарядом q_+ (знак заряда мы выбрали произвольно; заряд находится в однородной, безграничной, изотропной среде). Охватим мысленно этот заряд произвольной замкнутой поверхностью S (рис. 16).

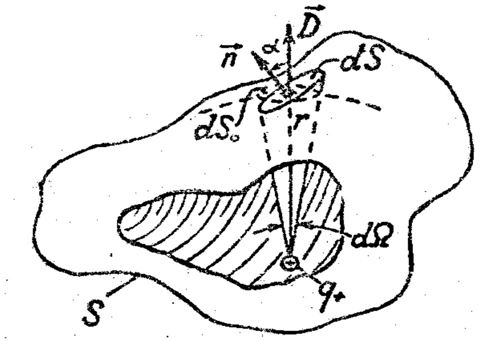


Рис.16

Вычислим поток вектора $\vec{D}$ через эту поверхность. Так как поле точечного заряда неоднородно, а выбранная нами поверхность имеет произвольную форму, при вычислении потока нам придется *интегрировать*.

Найдем сначала поток индукции через элементарную площадку dS. Нормаль к этой площадке образует с направлением $\vec{D}$ в том месте, где находится площадка, угол α (рис. 16). Согласно определению потока:

$$dN = D\ dSCos\alpha$$

Выделенная нами площадка отстоит от заряда, создающего поле, на расстоянии *r*. Следовательно, индукция поля в том месте, где находится площадка, равна (5.8):

$$D = \frac{q}{4\pi\ r^2}.$$

$dS\ Cos\alpha = dS_0$ – проекция площадки dS на плоскость, перпендикулярную радиальной прямой *r*. Таким образом,

$$dN = \frac{qdS_0}{4\pi\ r^2}.$$

Обратим внимание на величину $\frac{dS_0}{r^2}$. Так как площадка dS_0 бесконечно мала, ее можно рассматривать как участок сферической поверхности радиуса *r,* но тогда $\frac{dS_0}{r^2} = d\Omega$ – телесный угол, под которым видна площадка dS из точки, где находится заряд *q*. Следовательно,

$$dN = \frac{q}{4\pi} d\Omega \qquad (10.1)$$

Вся поверхность *S* видна из точки, где находится заряд, под телесным углом 4π. Суммирование элементарных потоков по *S* свелось к суммированию по *Ω* от 0 до 4π:

$$N = \frac{q}{4\pi} \int_0^{4\pi} d\Omega = q \qquad (10.2)$$

Итак, мы нашли, что поток вектора $\vec{D}$ через *произвольную замкнутую* поверхность *S* равен *q*, где *q* - *свободный заряд*, заключенный *внутри объема*, ограниченного этой поверхностью. *«Источниками» линий индукции являются свободные заряды.*

3 Формулу (10.2) нетрудно обобщить на случай поля, созданного любой системой точечных или протяженных зарядов. В этом случае под *q* в формуле (10.2) следует понимать алгебраическую сумму свободных зарядов, попадающих внутрь объема, ограниченного поверхностью *S*. Покажем это. Пусть в объеме, ограниченном выбранной поверхностью, находится *n* точечных зарядов: $q_1,\ q_2,\ ..., q_n$. Поток индукции сквозь эту поверхность, обусловленный наличием заряда q_1, согласно (10.2) равен

$$N_1 = q_1,$$

поток, обусловленный зарядом q_2,

$$N_2 = q_2,$$

и т.д. Полный поток индукции, пронизывающий рассматриваемую поверхность, равен алгебраической сумме потоков N_1, N_2, $...N_n$:

$$N = N_1 + N_2 + \ ... + N_n$$

Подставим вместо N_1, N_2, $...N_n$ заряды q_1, q_2, $...q_n$.

Получим:

$$N = q_1 + q_2 + ... + q_n = \sum_{i=1}^{n} q_i \qquad (10.3)$$

Обратим внимание на то, что суммирование здесь распространяется только на те заряды, которые *охватываются* поверхностью, находятся *внутри* объема, ограниченного поверхностью.

4 Если заряды распределены непрерывно, то $q = \int_{V'} \rho \, dV$ или $q = \int_{S'} \sigma \, dS$, или $q = \int_{l'} \tau \, dl$, где ρ, σ, τ – соответственно объемная, поверхностная и линейная плотности зарядов, а V', S', l' – объем, поверхность, линия, по которым распределены заряды, попадающие внутрь поверхности *S*.

5 Если замкнутая поверхность *S не охватывает* заряд, то *поток* вектора $\vec{D}$ через такую поверхность равен *нулю.*

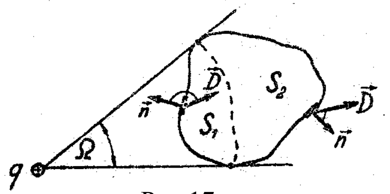


Рис.17

Убедимся в этом. Построим коническую поверхность, *касательную* к поверхности *S* и с вершиной в точке, где находится заряд *q* (рис. 17). Точки касания конической поверхности образуют линию, которая рассекает всю поверхность *S* на две части – S_1 и S_2. Обе эти части видны из точки, где находится заряд, под одним и тем же телесным углом *Ω*. Следовательно, потоки, пронизывающие S_1 и S_2 по (10.1) *равны по величине*: $|N_1| = |N_2|$.

Легко видеть, однако, что эти *потоки противоположны по знаку*: $N_1 < 0$, $N_2 > 0$ (углы между $\vec{D}$ и $\vec{n}$ во всех точках поверхности S_2 – острые, а во всех точках поверхности S_1 – тупые). Поэтому

$$N = N_1 + N_2 = 0$$

Если привлечь «геометрическое» определение потока, то рассуждения будут еще проще: так как внутри поверхности *S* свободных зарядов *нет*, линии индукции ни начинаются, ни обрываются внутри объема, ограниченного поверхностью, т.е. идут, не разрываясь. Число линий, *входящих* в объем, *равно* числу линий, *выходящих* из него. Поток, образованный выходящими линиями, положителен, поток, образованный входящими линиями - отрицателен. Следовательно, полный поток сквозь такую поверхность равен нулю.

6 Если поток рассчитывается через *замкнутую* поверхность, то записывается так:

$$N = \oint_S D_n dS. \qquad (10.4)$$

Кружок у знака интеграла означает, что суммирование ведется по всем элементам поверхности S.

7 Теперь можно дать окончательную формулировку теоремы Гаусса и ее математическую запись:

Поток вектора индукции электростатического (и только электростатического!) поля через произвольную замкнутую поверхность S равен алгебраической сумме свободных зарядов, охватываемых этой поверхностью:

$$N = \oint_S D_n dS = q, \qquad (10.5)$$

где q – *полный свободный* заряд, находящийся в объеме, ограниченном поверхностью S.

8 Как видно из формулы (10.5), единицей потока индукции в системе СИ является *кулон*.

Кулон – это полный поток вектора $\vec{D}$, проходящий через произвольную замкнутую поверхность, если внутри ее сосредоточен свободный заряд в 1 кулон.

11 ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ГАУССА К РАСЧЕТУ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

1 Как уже отмечалось, теорема Гаусса облегчает математическое решение задачи расчета полей, т.е. нахождение характеристик $\vec{E}$ и $\vec{D}$. Заметим, однако что она действительно облегчает эту задачу только в том случае, если

а) электрическое поле обладает *симметрией*;

б) вспомогательная замкнутая поверхность выбрана *правильно* (форма поверхности должна быть такова, чтобы ее элементы dS были либо *параллельны*, либо *перпендикулярны* линиям поля. Численное значение индукции на всех площадках, перпендикулярных полю, должно быть о*динаковым*.

Последнее достигается выбором поверхности, *симметричной* относительно заряда, попадающего внутрь поверхности).

2 Расчет индукции и напряженности поля на основе теоремы Гаусса проводится по следующей схеме.

- В зависимости от формы поля выбирается *симметричная замкнутая поверхность,* причем так, чтобы точка, в которой рассчитывается $\vec{D}$, принадлежала этой поверхности.
- Вычисляется *поток* индукции через эту поверхность (заметим, что в основе вычисления лежит только *определение* потока).
- Определяется *величина заряда*, попавшего внутрь выбранной поверхности.
- В соответствии с теоремой Гаусса найденный *поток приравнивается заряду*, попавшему внутрь поверхности.
- Составленное уравнение решается относительно *D*.
- Разделив найденное значение индукции на произведение $\varepsilon\varepsilon_0$, находят напряженность поля: $E = \dfrac{D}{\varepsilon\varepsilon_0}$

3 Рассмотрим ряд примеров.

а) *Поле сферы, равномерно заряженной по поверхности* (радиус сферы r_0, заряд q).

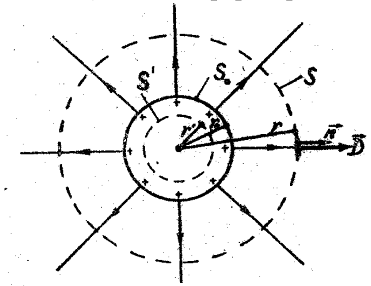


Рис.18

Электрическое поле равномерно заряженной сферы симметрично относительно ее центра, значит, геометрическое место точек, в которых численное значение индукции одинаково, представляет собой тоже сферу, центр которой совпадает с центром заряженной сферы. Поэтому в качестве вспомогательной поверхности следует выбрать сферу.

Найдем поток, пронизывающий мысленную сферу радиуса $r > r_0$ (рис. 18). Во всех точках этой сферы вектор $\vec{D}$ *перпендикулярен* к ее поверхности. Полный поток *N* через нее равен

$$N = DS = D4\pi\ r^2, \tag{11.1}$$

так как площадь поверхности сферы $S = 4\pi\ r^2$. Внутрь сферы попадает *весь* заряд q, создающий поле. По теореме Гаусса этот же поток N равен

$$N = q \qquad (11.2)$$

Приравнивая правые части выражений (11.1) и (11.2), получим:

$$D 4\pi r^2 = q .$$

Откуда
$$D = \frac{q}{4\pi r^2} \qquad (11.3)$$

Разделив D на $\varepsilon_0 \varepsilon$, получим выражение для напряженности:

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon r^2} \qquad (11.4)$$

Напряженность поля в точках на поверхности самой сферы $\left(r = r_0\right)$ равна:

$$E_0 = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon r_0^2} \qquad (11.5)$$

Формулы (10.4) и (10.5) в точности совпадают с формулой поля *точечного* заряда.

Электрическое поле равномерно заряженной сферы во внешнем пространстве таково, как если бы весь заряд был сосредоточен в центре этой сферы.

Поток индукции через вспомогательную сферу S' радиуса r', меньшего радиуса заряженной сферы, равен нулю, так как внутри этой сферы нет зарядов: все они, по условию задачи, распределены по поверхности сферы S_0:

$$N = DS' = 0$$

Из этого соотношения следует, что во всех точках поверхности S' индукция D равна нулю.

Таким образом, мы приходим к выводу*: внутри сферы, равномерно заряженной по поверхности, индукция и напряженность равны нулю:*

$$D_{внутри} = 0, \qquad E_{внутри} = 0. \qquad (11.6)$$

Позднее (п. 26) мы выясним, что электрическое поле отсутствует внутри любого заряженного проводника, если только заряды, сосредоточенные в нем, находятся в *равновесии*.

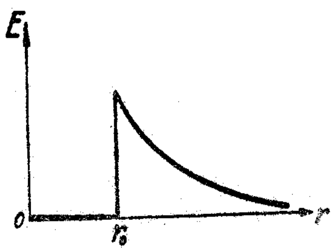


Рис.19

На рисунке 19 изображена зависимость напряженности E от расстояния r до центра заряженной сферы. При переходе через поверхность сферы напряженность поля меняется скачком от нуля до

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\ r^2}$$

б) *Поле безграничной равномерно заряженной плоскости.*

Пусть имеется бесконечно протяженная плоскость с поверхностной плотностью зарядов σ_+.

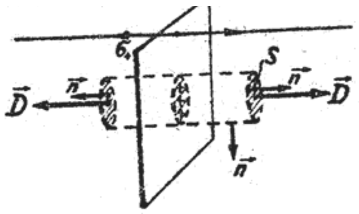


Рис.20

Электрическое поле такой плоскости *симметрично* относительно ее *поверхности.* Вследствие симметрии линии вектора $\vec{D}$ идут в обе стороны от плоскости *перпендикулярно к ней*. Следовательно, в качестве замкнутой вспомогательной поверхности можно выбрать *прямой цилиндр,* образующие которого параллельны линиям поля. Можно выбрать также прямой параллелепипед или прямую призму.

Пусть вспомогательной поверхностью будет прямой цилиндр с площадью основания S (рис. 20).

Полный поток, пронизывающий этот цилиндр, складывается из потоков через торцы:

$$N = DS + DS = 2DS$$

(поток через боковую поверхность равен нулю, так как образующие цилиндра параллельны вектору $\vec{D}$, поэтому $Cos\left(\vec{D},\vec{n}\right) = 0$)

Внутри цилиндра оказывается заряд $q = \sigma S$. По теореме Гаусса $N = q = \sigma\ S$. Следовательно $2DS = \sigma S$, откуда

$$D = \frac{\sigma}{2} \tag{11.7}$$

и

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon} \tag{11.8}$$

в) *Поле двух параллельных бесконечно протяженных равноименно заряженных плоскостей.* (рис.21).

Пусть поверхностные плотности зарядов плоскостей равны по величине и противоположны по знаку

$$|\sigma_+| = |\sigma_-|$$

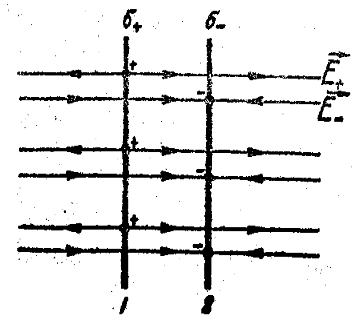


Рис.21

Результирующее поле, создаваемое обеими плоскостями, найдем, основываясь на принципе суперпозиции.

Положительно запряженная плоскость создает в окружающем пространстве однородное поле с напряженностью

$$E_+ = \frac{|\sigma_+|}{2\varepsilon_0\varepsilon}$$

В свою очередь, отрицательно заряженная плоскость создает поле с напряженностью $E_- = \dfrac{|\sigma_-|}{2\varepsilon_0\varepsilon}$

Так как поверхностные плотности σ_+ и σ_- численно равны, то равны и численные значения напряженностей

$\vec{E}_+$ и $\vec{E}_-$ т.е. $\vec{E}_+ = \vec{E}_-$

В пространстве между плоскостями оба поля имеют одинаковое направление (рис. 21), поэтому результирующая напряженность здесь равна *сумме напряженностей* $\vec{E}_+$ и $\vec{E}_-$, создаваемых плоскостями:

$$E = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{|\sigma_+|}{2\varepsilon_0\varepsilon} + \frac{|\sigma_-|}{2\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon} \qquad (11.9)$$

σ – абсолютная величина поверхностной плотности зарядов любой из плоскостей.

В пространстве *за* плоскостями оба поля имеют *противоположное направление*, поэтому при наложении они взаимно скомпенсируют друг друга. Результирующая напряженность здесь равна нулю:

$$E = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = 0 \qquad (11.10)$$

Таким образом, поле отлично от нуля только в пространстве между плоскостями.

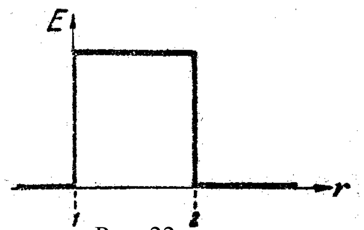


Рис. 22

На рис. 22 изображен ход напряженности поля двух плоскостей.

г) *Поле бесконечно длинного цилиндра, равномерно заряженного по поверхности* (радиус цилиндра r_0, линейная плотность зарядов τ).

Электрическое поле бесконечно протяженного равномерно заряженного цилиндра *симметрично* относительно оси цилиндра. Линии индукции представляют собой радиальные прямые, перпендикулярные к поверхности цилиндра. Геометрическое место точек, в которых величина $\vec{D}$ одинакова, представляют собой цилиндр. Следовательно, в качестве замкнутой поверхности следует выбрать прямой цилиндр.

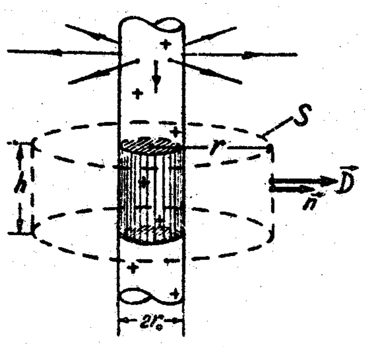


Рис. 23

Размеры вспомогательного цилиндра: высота - h, радиус оснований - $r > r_0$, ось совпадает с осью заряженного цилиндра (рис 23). Полный поток вектора индукции через этот цилиндр складывается из потока через *боковую поверхность*:

$$N = D2\pi r\ h$$

(потоки через основания цилиндра равны нулю, так как во всех точках этих оснований $\vec{D} \perp \vec{n}$ и $Cos\left(\vec{D},\vec{n}\right) = 0$). Вспомогательный цилиндр отсекает заряд $q = \sigma 2\pi r_0 h$. По теореме Гаусса $N = q = \sigma 2\pi r_0 h$

Приравнивая выражения для N, получим,

$$D \cdot 2\pi r h = \sigma 2\pi r_0 h, \qquad \text{откуда} \quad D = \frac{\sigma r_0}{r} \tag{11.11}$$

Для E получается выражение:

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{\sigma r_0}{\varepsilon_0 \varepsilon r} \tag{11.12}$$

Напряженность поля заряженного цилиндра во внешнем пространстве изменяется *обратно пропорционально расстоянию* от оси цилиндра.

В заключении еще раз подчеркнем, что теорема Гаусса позволяет рассчитывать электрическое поле только тогда, когда известна *симметрия поля,* когда заранее известно *направление линий* поля, когда есть возможность выделить мысленную поверхность, во всех точках которой численное значение вектора $\vec{D}$ *одинаково*. Короче говоря, универсального практического применения эта теорема не имеет.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1 Что называется потоком вектора индукции? Какая это величина – векторная или скалярная?

2 Сформулируйте и докажите теорему Гаусса.

3 Какова методика расчета напряженности электростатического поля на основе теоремы Гаусса?

4 Рассчитайте напряженность поля, создаваемого равномерно заряженной бесконечной плоскостью, двумя разноименно заряженными плоскостями, равномерно заряженным бесконечным цилиндром.

ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Изучая механику и молекулярную физику, мы не раз обращали внимание на то, что при решении целого ряда теоретических и прикладных задач физики можно не вдаваться в вопросы *строения* изучаемого объекта, а изучать только *изменение его энергетического состояния.* Энергетическое описание допустимо и при изучении свойств электростатического поля.

12 РАБОТА ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ СИЛ

1 В механике было установлено, что силы любого *потенциального поля консервативны.*

Напомним о том, что сила называется консервативной, если совершаемая ею работа *не зависит от формы пути.*

Выясним, являются ли силы электростатического поля консервативными.

2 Пусть поле создано неподвижным точечным зарядом q . В поле этого заряда по *произвольной* траектории перемещается другой точечный заряд q' (для определенности будем считать, что оба заряда *положительны*).

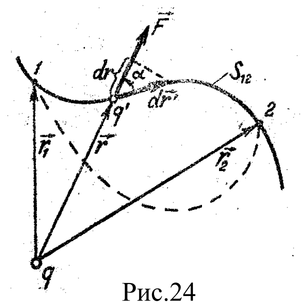


Рис.24

Вычислим работу, совершаемую силами поля при перемещении заряда q' из произвольной точки 1 в точку 2 (положение точек 1 и 2 относительно заряда, создающего поле, определяется соответственно радиус – векторами $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ – рис. 24).

Так как величина и направление силы, действующей на заряд q', при его перемещении *изменяются*, то расчет работы на пути S_{12} сведется к алгебраическому суммированию элементарных работ, совершаемых на всех бесконечно малых перемещениях между точками 1 и 2:

$$A_{12} = \int_1^2 dA$$

Элементарная работа, совершаемая на бесконечно малом перемещении $d\vec{r}\,'$, равна

$$dA = Fdr'Cos\alpha,$$

где α – угол между направлением силы и направлением перемещения. Силу F найдем по закону Кулона (так как оба заряда – и создающий поле, и перемещаемый - точечные):

$$F = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\ r^2}$$

Произведение $dr'Cos\alpha = dr$ есть проекция элементарного перемещения dr' на направление действия силы $\vec{F}$. Величина dr – *алгебраическая*. Она определяет *приращение модуля* радиус–вектора $\vec{r}$, т.е.

$$dr = \left|\vec{r} + d\vec{r}\,'\right| - \left|\vec{r}\right|$$

Итак, элементарная работа равна

$$dA = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \cdot \frac{dr}{r^2} \qquad (12.1)$$

Работа на участке 1-2 равна

$$A_{12} = \int_1^2 dA = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)_{r_1}^{r_2} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1} - \frac{qq'}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_2}. \qquad (12.2)$$

Мы видим, что работа, совершаемая электростатическими силами при перемещении заряда, зависит от величины заряда, создающего поле (q), и перемещаемого заряда q', от электрических свойств среды, в которой происходит перемещение (ε), от положения начальных и конечных точек пути (r_1 и r_2), но *не зависит от формы пути* (в выражении (12.2) отсутствуют величины, характеризующие форму пути, например, кривизна траектории). Если бы перемещение из точки 1 в точку 2 осуществлялось по другому пути (на рис. 24 этот путь изображен пунктиром), то и в этом случае величина работы определялась бы соотношением (12.2)

3 Утверждение, что работа электростатических сил не зависит от формы пути, справедливо не только для поля точечного заряда. Оно справедливо для электрических полей, созданных любой *статической системой*

зарядов. Этот вывод непосредственно вытекает из принципа суперпозиции полей.

В самом деле, результирующее поле, созданное системой зарядов (и сосредоточенных, и распределенных), равно сумме полей точечных зарядов, образующих систему.

Работа перемещения заряда в результирующем поле равна *алгебраической сумме* работ перемещения в поле *каждого* из зарядов системы. Так как работа перемещения в *каждом* из полей *не зависит* от форм пути, то она не зависит от формы пути и для суммарного поля.

4 Проиллюстрируем сказанное еще одним расчетом.

Пусть поле создано равномерно заряженной бесконечной плоскостью (заряды на плоскости распределены непрерывно с поверхностной плотностью σ_+). Положительный точечный заряд q' перемещается в этом поле по произвольной криволинейной траектории (рис. 25). Найдем работу, которую совершают электростатические силы при перемещении заряда из точки 1 в точку 2. В начальном положении (1) перемещаемый заряд отстоит от плоскости на расстоянии r_1

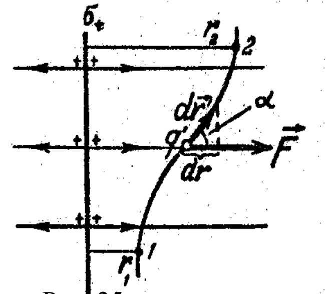


Рис. 25

, в конечном (2) – на расстоянии r_2. Поле, созданное равномерно заряженной плоскостью, *однородно*, но так как переход заряда из точки 1 в точку 2 совершается по *криволинейному пути*, нам снова придется находить сначала элементарную работу, а затем интегрировать.

Элементарная работа равна $dA = Fdr'Cos\alpha$

Силу, действующую на перемещаемый заряд, в рассматриваемом случае вычислять по формуле Кулона *нельзя* (так как заряд, создающий поле, *протяженный*). Ее можно выразить через напряженность поля: $F = q'E$. Напряженность, создаваемая равномерно заряженной плоскостью, численно равна $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}$.

Из чертежа видно, что $dr'Cos\alpha = dr$. Таким образом, элементарная работа равна

$$dA = \frac{q'\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}dr \qquad (12.3)$$

Работа, совершаемая при перемещении заряда из точки 1 в точку 2:

$$A_{12}=\int_1^2 dA=\frac{q'\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}\int_{r_1}^{r_2} dr=\frac{q'\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}r\Big|_{r_2}^{r_1}=$$
$$=\frac{q'\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}r_2-\frac{q'\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}r_1=\left(-\frac{q'\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}r_1\right)-\left(-\frac{q'\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}r_2\right) \qquad (12.4)$$

Мы снова убеждаемся в том, что работа, совершаемая электростатическими силами, зависит от *положения* начальной и конечной точек пути, но не зависит от формы пути.

Так как работа электростатических сил не зависит от формы пути, можно заключить, что электростатические силы *консервативны*, а их материальный носитель – электростатическое поле – *потенциально*.

Независимость работы сил электростатического поля от формы пути и есть признак его потенциальности.

5 Условие потенциальности электростатического поля можно сформулировать иначе, введя понятие о *циркуляции вектора напряженности (или индукции)*.

Легко показать, что работа, совершаемая электростатическими силами при перемещении заряда по любому *замкнутому пути* L, тождественно равна *нулю*: $A_{\circ}\equiv 0$

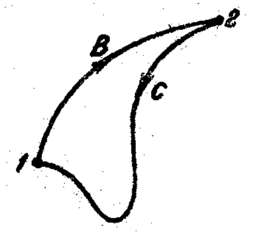


Рис. 26

В самом деле, если заряд перемещается из точки 1 в точку 2 по одному пути, например *1B2* (рис 26), а затем снова возвращается в точку 1, но уже по другому пути *2C1*, то согласно (12.2) или (12.4) работы, совершаемые при этом на участке *1B2* и *2C1*, будут равны по величине, но противоположны по знаку:

$$A_{1B2}=-A_{2C1}$$

Отсюда следует, что полная работа, совершаемая при перемещении заряда по замкнутому пути, равна нулю:

$$A_{\circ}=A_{1B2C1}=A_{1B2}+A_{2C1}=0$$

Эту работу можно выразить обычным образом – через сумму всех элементарных работ: $A_{\circ}=\oint_L dA$

Где кружок у знака интеграла означает, что интегрирование производится по всем элементам выбранного замкнутого контура L.

Элементарная работа dA равна:

$$dA=FdlCos\alpha=qEdlCos\alpha=qE_l dl,$$

так как $F = qE$ (q – перемещаемый заряд, E – напряженность поля), а $ECos\alpha = E_l$, (E_l – проекция вектора на направление перемещения dl).

$$\text{Итак, } A_{\circ} = \oint_L dA = \oint_L qE_l dl = q\oint_L E_l dl = 0$$

Сократив на q ($q \neq 0$), окончательно получим: $\oint_L E_l dl = 0$ (12.5)

Интеграл (12.5) численно равен работе, совершаемой силами поля при перемещении единичного заряда по замкнутому пути L.

Этот интеграл называется *циркуляцией вектора напряженности.*

Таким образом, *циркуляция вектора напряженности электростатического поля по любому замкнутому контуру равна нулю.*

Выражение (12.5) является условием потенциальности поля в *интегральной форме.*

13 СВЯЗЬ РАБОТЫ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ СИЛ С ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ ЗАРЯДА

1 В механике было установлено, что работа, совершаемая консервативными силами, однозначно связана с некоторой *функцией состояния*, зависящей от *положения* взаимодействующих тел и характеризующей интенсивность этого взаимодействия. Эта функция была названа *потенциальной энергией.*

Было показано, что работа консервативных сил, действующих на тело, равна *убыли* потенциальной энергии тела:

$$dA = -dW_n \tag{13.1}$$

если перемещение *бесконечно мало,* и $A_{12} = -\Delta W_n$ (13.2)

если перемещение *конечно*. Обратим внимание на обозначения:

$\Delta W_n = W_{n2} - W_{n1}$ – *приращение величины* W_n,

$-\Delta W_n = W_{n1} - W_{n2}$ – *убыль величины* W_n.

И приращение (ΔW_n), и убыль $(-\Delta W_n)$ - величины *алгебраические*.

2 Вычисляя *работу электростатических* сил, мы обнаружили, что она равна *разности* двух значений некоторой функции, зависящей от взаимного расположения зарядов – перемещаемого и создающего поле, причем вид этой функции и разность ее значений не зависят от того, каким способом, по какому пути заряд переходит из начального положения в конечное.

Это дает основание утверждать, что электрический заряд, помещенный в электростатическом поле, *обладает потенциальной энергией*, зависящей от положения заряда, и что ее убыль при изменении положения заряда равна работе сил поля, действующих на заряд. Следовательно, полученные нами выражения для работы электростатических сил (12.2) и (12.4) следует рассматривать как разность двух значений потенциальной энергии, которой обладает перемещаемый заряд в начальном и конечном состояниях:

$$A_{12} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\, r_1} - \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\, r_2} = W_{n1} - W_{n2}\,, \qquad (13.3)$$

$$A_{12} = \left(-\frac{q'\sigma}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon} r_1\right) - \left(-\frac{q'\sigma}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon} r_2\right) = W_{n1} - W_{n2} \qquad (13.4)$$

3 Формулы (13.3) и (13.4) позволяют найти лишь *изменение* потенциальной энергии заряда, но не ее абсолютное значение. Иначе говоря, как и в механике, потенциальная энергия заряда в электростатике определяется не однозначно, а с *точностью до произвольной постоянной С.* Любое из слагаемых W_n в выражениях (13.3) и (13.4) должно быть представлено в виде:

$$W_n = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\, r} + C_1 \qquad (13.5)$$

$$W_n = \frac{q'\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon} r + C_2 \qquad (13.6)$$

где C_1 и C_2 - некоторые постоянные.

Постоянные неопределенного интегрирования C_1 и C_2 зависят от начала отсчета потенциальной энергии, т.е. от выбора точки (или геометрического места точек) поля, в которых потенциальная энергия заряда условно полагается *равной нулю* (эта точка или геометрическое место точек иногда называют *нулевым уровнем*). Поэтому правильнее говорить не вообще о потенциальной энергии, а о потенциальной энергии *относительно* такой-то точки, такого-то уровня.

4 Наличие произвольной постоянной в выражении потенциальной энергии заряда не играет существенной роли, ибо мы всегда имеем дело не самой величиной, а с ее *изменениями*. При нахождении разности двух значений энергии эта постоянная исключается:

$$W_{n1} - W_{n2} = \left(\frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\, r_1} + C\right) - \left(\frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_2} + C\right) =$$

$$= \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\, r_1} - \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\, r_2}$$

5 Если все-таки интересуются величиной потенциальной энергии (хотя бы условной величиной), то необходимо договориться, какое значение следует приписать постоянной C.

Найдем постоянные C_1 и C_2 в выражениях для потенциальной энергии (13.5) и (13.6). Определение постоянной С (или выбор нулевого уровня W_n) называется нормировкой констант, нормировкой потенциальной энергии.

Нулевой уровень обычно выбирают таким образом, чтобы константа C обратилась в нуль (хотя, вообще говоря, необязательно).

В случае поля точечного заряда будем считать потенциальную энергию заряда равной нулю, когда он удален в *бесконечность.*

Подставив в (13.5) $r = \infty$ и $W_{n\infty} = 0$, найдем, что $C = 0$. При таком выборе нулевого уровня потенциальная энергия заряда q', находящегося на расстоянии r от заряда q, создающего поле, равна

$$W_n = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\ r} \qquad (13.7)$$

Полученное выражение определяет потенциальную энергию заряда относительно *бесконечности.* С равным успехом мы могли бы отсчитать ее от другого начала, но тогда $C_1 \neq 0$ и численное значение энергии будет *другим.*

В случае поля заряженной плоскости нулевой уровень потенциальной энергии выбирать в бесконечности бессмысленно, ибо при таком выборе постоянная $C_2 = \infty$. Будем считать потенциальную энергию заряда в этом случае равной нулю, когда $r = 0$ (r – кратчайшее расстояние от заряда q' до плоскости). Подставив в (13.6) $r = 0$ и $W_n = 0$, получим $C_2 = 0$. При таком выборе нулевого уровня потенциальная энергия заряда, находящегося на расстоянии r от положительно заряженной плоскости, равна

$$W_n = -\frac{q'\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon} r \qquad (13.8)$$

6 Потенциальная энергия заряда может быть и *положительной* и *отрицательной*.

Если заряд переносится из данной точки на нулевой уровень, то работа, совершаемая силами поля, равна

$$A_{10} = W_{n1} - 0 = W_{n1} \qquad (13.9)$$

Из этой формулы видно, что потенциальная энергия заряда *отрицательна,* если при переносе его из *данной* точки *на нулевой* уровень электростатические силы совершают *отрицательную работу,* и наоборот, соответственно.

7 Формулы (13.7) и (13.8) характеризуют, в сущности, энергию *системы* зарядов: заряда q' и заряда, создающего поле. Поэтому величину W_n правильно было бы назвать *взаимной потенциальной энергией этих зарядов.*

8 Еще раз обратимся к выражениям для потенциальной энергии (13.7) и (13.8):

$$W_n = +\frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\ r}; \qquad W_n = -\frac{q'\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon} r$$

Знак «+» в первой формуле и знак «-», во второй, получены в предположении, что заряды qq' и поверхностная плоскость σ *положительны*. Не составляет труда показать, что если бы заряд q' был *отрицательным,* то знаки в обеих формулах сменились бы на *противоположные.* Иначе говоря, знак потенциальной энергии будет автоматически учтен, если под qq' и σ в этих формулах понимать *алгебраические* величины.

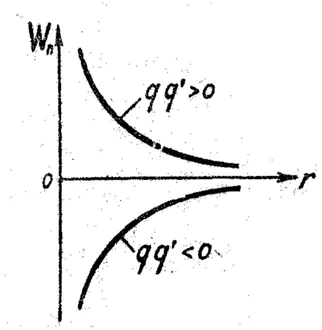


Рис. 27

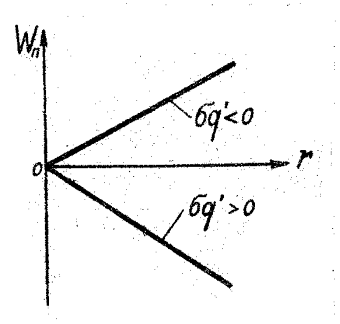


Рис. 28

Если произведение зарядов в первой формуле *положительно* (заряды *одноименные*, $qq' > 0$), то взаимная потенциальная энергия этих зарядов *положительна,* если $qq' < 0$, то энергия отрицательна.

Для случая поля заряженной плоскости энергия положительна, если $q'\sigma < 0$, и отрицательна, если $q'\sigma > 0$ (так как в формулу входит знак *минус).* Графики потенциальной энергии, соответствующие (13.7) и (13.8), приведены на рисунках 27 и 28.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1 Докажите, что силы электростатического поля являются консервативными.

2 Сформулируйте условие потенциальности силового поля.

3 Каков физический смысл циркуляции вектора напряженности электростатического поля?

4 Как связана работа, совершаемая электростатическими силами при перемещении заряда, с потенциальной энергией этого заряда?

5 Как выражается потенциальная энергия точечного заряда, находящегося в поле другого точечного заряда, в системе СИ ?

6 Изобразите графически взаимную потенциальную энергию одноименных и разноименных точечных зарядов.

14 ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

1 Будем изучать *энергетическое состояние* электростатического поля. Для этого вновь воспользуемся *пробным зарядом.*

Согласно (13.7) и (13.8) потенциальная энергия заряда, внесенного в электростатическое поле, зависит:

1) от положения точки, в которую помещен пробный заряд;
2) от свойств поля в рассматриваемой точке;
3) от величины заряда.

Разные по величине пробные заряды $q_+, q_+', q_+'', ...$ обладают в одной и той же точке поля разными потенциальными энергиями $W_n, W_n', W_n'', ...$.

Разделим потенциальную энергию одного из зарядов на величину этого заряда, например, W_n на q_+: $\frac{W_n}{q_+}$

Величина, численно равная этому соотношению, показывает, какова *была бы* потенциальная энергия *единичного* пробного заряда, если бы мы поместили его в данную точку (в действительности этого делать *нельзя:* такой большой заряд необычайно исказил бы исследуемое поле!).

Составленное отношение зависит от величин, характеризующих свойства поля в рассматриваемой точке, но не зависит от величины пробного заряда. Следовательно, это отношение может служить характеристикой поля в данной точке. Величина, численно равная $\frac{W_n}{q_+}$, называется *электрическим потенциалом* или просто *потенциалом* данной точки поля (понятие потенциала впервые было введено в 1777 г. Ж. Л. Лагранжем как добавление к закону всемирного тяготения, применительно к электрическому полю это понятие введено в 1811 г. С. Пуассоном).

Для обозначения потенциала используется буква φ, иногда U.

Потенциал данной точки электростатического поля – скалярная физическая величина, характеризующая энергетическое состояние поля в рассматриваемой точке и численно равная потенциальной энергии единичного точечного положительного заряда, помещенного в данную точку:

$$\varphi = \frac{W_n}{q_+} \tag{14.1}$$

2 Из соотношения (14.1) вытекает, что потенциальная энергия *любого* точечного заряда q (не обязательно положительного), помещенного в точку поля с потенциалом φ, равна $W_n = q\varphi$ (14.2)

Как известно, работа сил поля равна убыли потенциальной энергии перемещаемого заряда: $A_{12} = W_{n1} - W_{n2}$ (14.3)

Но согласно (14.2) $W_{n1} = q\varphi_1$, $W_{n2} = q\varphi_2$

Следовательно, $A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2)$ (14.4)

Важный практический результат: *работа,* совершаемая *силами электростатического поля* при перемещении заряда, *равна произведению величины этого заряда на разность потенциалов начальной и конечной точек пути.*

3 Как и численное значение потенциальной энергии, численное значение потенциала определяется не однозначно, а с точностью до произвольной постоянной, зависящей от выбора *нулевого уровня.*

Нулевой уровень потенциала, начало отсчета φ – это геометрическое место точек поля, потенциал которых условно принимается равным нулю: $\varphi_0 = 0$, где φ_0 – потенциал нулевого уровня.

Нулевой уровень потенциала может быть выбран в *бесконечности* (так поступают в случае полей, созданных пространственно ограниченными зарядами, и это оправдано, так как поле таких зарядов *исчезает* в бесконечности). Нулевой уровень может быть выбран на *поверхности Земли* и, вообще говоря, где угодно. Если заряд q из точки с потенциалом φ_1, перемещается в точку нулевого уровня, то работа сил поля будет равна

$$A_{10} = q_+(\varphi_1 - 0_2) = q_+\varphi_1 \tag{14.5}$$

Следовательно, потенциал данной точки поля *численно равен работе,* которую совершают силы поля при перемещении единицы положительного заряда *из данной точки в точку нулевого уровня.*

Говоря о потенциале какой либо точки, следует обязательно подчеркивать, относительно какого уровня определен этот потенциал. В противном случае говорить о потенциале бессмысленно.

Заметим, что определение потенциала при помощи понятия *потенциальной энергии* следует предпочесть определению его через работу. По своему смыслу потенциал и потенциальная энергия характеризуют *состояние* поля и заряда, в то время как работа – процесс *изменения этого состояния.*

4 *Потенциал* – величина, характеризующая *каждую* точку электростатического поля *независимо* от того, есть в ней пробный заряд или нет.

5 *Потенциал – величина алгебраическая.* Он может быть и положительным, и отрицательным. Из формулы $\varphi_1 = \dfrac{A_{10}}{q_+}$ ясно, что потенциал какой-либо точки поля *отрицателен,* если при перемещении *положительного* заряда из данной точки на поверхность нулевого уровня потенциала силы поля совершают *отрицательную* работу. Легко понять, что если поле создано отрицательным зарядом, то потенциал любой точки такого поля *отрицательный,* если же поле создано положительным зарядом, то потенциалы точек этого поля – *положительны.*

6 Еще раз обратимся к формуле $W_n = q\varphi$.

Из формулы видно, что знак потенциальной энергии *положительного* заряда *совпадает,* а *отрицательного - противоположен* знаку потенциала той точки поля, в которую заряд помещен (с вопросом о знаках потенциала и потенциальной энергии нам придется столкнуться при изучении энергетических состояний электронов в металлах).

На рис. 29, *а* и *б* пунктирной кривой изображен ход потенциала φ, созданного *положительным* точечным зарядов. Сплошной кривой изображена потенциальная энергия заряда q, внесенного в поле этого заряда: график *а*) соответствует $q > 0$; *б)* $q < 0$.

7 Если поле создано *системой* точечных или протяженных зарядов, то потенциал результирующего поля в данной точке равен *алгебраической сумме* потенциалов, создаваемых в этой точке каждым зарядом в отдельности (*принцип суперпозиции):*

$$\varphi = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i \tag{14.6}$$

в случае точечных зарядов и

$$\varphi = \int_q d\varphi \tag{14.7}$$

в случае непрерывно распределенных зарядов.

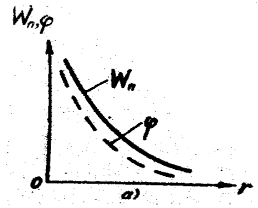
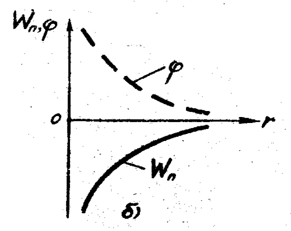


Рис.29



8 Электрическое поле графически может быть изображено не только *линиями* вектора напряженности (или индукции), но и поверхностями равного потенциала – *эквипотенциальными поверхностями*. Как следует из самого названия, *эквипотенциальная поверхность* – это мысленная поверхность, все точки которой имеют *одинаковый* потенциал. Работа при перемещении заряда между двумя точками одной и той же эквипотенциальной поверхности равна нулю:

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \text{, так как } \varphi_1 = \varphi_2$$

Легко показать, что вектор $\vec{E}$, а, следовательно, и линии поля *перпендикулярны* к эквипотенциальным поверхностям.

Выразим элементарную работу при перемещении заряда вдоль эквипотенциальной поверхности через напряженность поля, заряд и перемещение:

$$dA = qEdrCos\alpha \text{ ,}$$

α – угол между направлением напряженности $\vec{E}$ и направлением перемещения (т.е. между вектором $\vec{E}$ и эквипотенциальной поверхностью). Но $dA = 0$, следовательно,

$$qEdrCos\alpha = 0$$

$$E \neq 0, \quad q \neq 0, dr \neq 0. \text{ Значит } Cos\alpha = 0 \text{, откуда } \alpha = \frac{\pi}{2}$$

Эквипотенциальные поверхности обычно проводят так, чтобы разность потенциалов между любыми двумя соседними поверхностями была одна и та же.

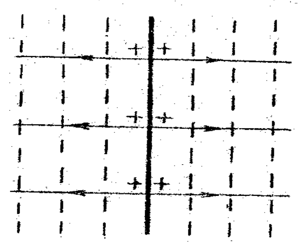


Рис.30

На рис 30 изображен вид линий напряженности (сплошные линии) и эквипотенциальных поверхностей (пунктиры) поля бесконечно протяженной равномерно заряженной плоскости.

9 Соотношение (14.4) может быть использовано в качестве *определяющего*

уравнения при установлении единиц измерения потенциала и разности потенциалов.

За единицу потенциала в системе СИ (это единица называется *вольтом)* принимается потенциал такой точки поля, в котором заряд в 1 кулон обладает энергией в 1 джоуль:

$$1В = \frac{1Дж}{1Кл}$$

Часто используется единица энергии, называемая *электронвольтом* (эВ). *Электронвольт* – это энергия, которую приобретает частица, обладающая элементарным зарядом ($1{,}6 \cdot 10^{-19} к$), при прохождении разности потенциалов в 1 вольт:

$$1эВ = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\, Кл \cdot 1В = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\, Дж$$

10 Найдем потенциал поля точечного заряда. Для этого подставим в (14.1) значение потенциальной энергии точечного заряда q_+ (пробный заряд), находящегося в поле другого точечного заряда q (13.7):

$$\varphi = \frac{W_n}{q_+} = \frac{qq_+}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\, rq_+} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\, r} \qquad (14.8)$$

Здесь r – расстояние от заряда, создающего поле, до данной точки.

15 СВЯЗЬ МЕЖДУ НАПРЯЖЕННОСТЬЮ И ПОТЕНЦИАЛОМ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

1 Электростатическое поле в каждой своей точке может быть описано либо с помощью векторной величины $\vec{E}$ (*силовое* описание), либо с помощью скалярной величины φ *(энергетическое* описание). Несомненно, что между этими величинами существует вполне определенная связь. Установим эту связь.

2 Рассмотрим в *неоднородном* электрическом поле две произвольные бесконечно близкие точки 1 и 2, лежащие на оси x.

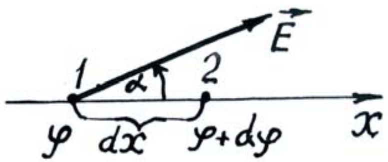


Рис.31

Пусть разность потенциалов между этими точками равна $d\varphi$, а расстояние dx (рис. 31).

Работа сил поля над зарядом q при перемещении его из точки 1 в точку 2 может быть выражена, с одной стороны, через напряженность и перемещение:

$$dA = qEdxCos\alpha = qE_x dx \qquad (15.1)$$

($ECos\alpha = E_x$ – проекция вектора $\vec{E}$ на направление x),

с другой стороны, через убыль потенциальной энергии заряда:

$$dA = -dW_n = -qd\varphi \qquad (15.2)$$

приравнивая правые части (15.1) и (15.2) и сокращая на q , получим,

$$E_x dx = -d\varphi, \qquad \text{откуда} \qquad E_x = -\frac{d\varphi}{dx}. \qquad (15.3)$$

Производная, стоящая в правой части этого равенства, выражает *быстроту изменения* потенциала вдоль оси x . Мы видим, что *проекция вектора напряженности на ось x равна быстроте изменения потенциала вдоль этой оси, взятой с обратным знаком.*

Так как потенциал поля может изменяться не только в направлении x , но и любом другом направлении, то правильнее было бы писать частную производную $\frac{\partial}{\partial x}$:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

В общем случае потенциал может изменяться в направлении всех трех координат осей x, y, z . Следовательно,

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}; E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}; E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} \qquad (15.4)$$

Как известно, для нахождения вектора по его проекциям необходимо каждую из проекций умножить на единичный вектор соответствующей оси и затем сложить полученные векторы:

$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k} \qquad (15.5)$$

принимая во внимание (15.4):

$$\overline{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right) \qquad (15.6)$$

Векторная величина, стоящая в скобках, называется *градиентом потенциала* и обозначается $grad\varphi$ или $\nabla\varphi$. Таким образом,

$$\vec{E} = -\vec{g}rad\varphi. \qquad (15.7)$$

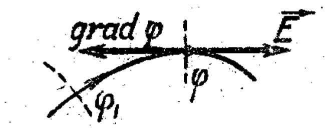


Рис.32

Вектор напряженности электростатического поля в каждой точке численно равен градиенту потенциала в этой же точке и противоположен ему по направлению (рис. 32).

Градиент потенциала – это вектор,

указывающий направление *наиболее быстрого возрастания* потенциала и численно равный изменению потенциала на единицу длины этого направления.

3 Градиент потенциала так же, как и вектор напряженности, направлен по *касательной* к силовой линии. Следовательно, *вдоль касательных* к линиям поля потенциал изменяется (растет или убывает) с наибольшей скоростью. Полезно запомнить, что направление вектора $\vec{E}$ в каждой точке поля указывает направление, в котором потенциал с наибольшей быстротой *уменьшается.*

Если r – направление быстрейшего изменения потенциала, то модуль градиента потенциала равен $\frac{d\varphi}{dr}$. Таков же будет и модуль вектора напряженности:

$$E = \left|\frac{d\varphi}{dr}\right| \tag{15.8}$$

Если поле однородно, напряженность численно равна разности потенциалов, приходящейся на единицу длины линии поля:

$$E = \left|\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{r}\right| \tag{15.9}$$

где r – расстояние между эквипотенциальными поверхностями $\varphi_1 - \varphi_2$, отсчитанное вдоль линии поля.

4 Из (15.9) видно, что в системе СИ напряженность измеряется в «вольтах на метр» $\left(\frac{В}{м}\right)$.

Вольт на метр – напряженность такого однородного поля, потенциал которого изменяется на 1 В при перемещении вдоль силовой линии на расстояние, равное 1м.

5 Умножим обе части равенства (15.7) на q (q - произвольный *точечный* заряд, внесенный в поле):

$$q\vec{E} = q(-grad\varphi)$$

$q\vec{E} = \vec{F}$ есть сила, действующая на заряд q в точке поля с напряженностью $\vec{E}$. $qgrad\varphi = gradq\varphi$ (q – величина постоянная, поэтому ее можно внести под знак производной). Под знаком *grad* стоит *потенциальная энергия* заряда: $q\varphi = W_n$. Следовательно,

$$\vec{F} = -gradW_n \tag{15.10}$$

Формула (15.10) выражает связь между силой, действующей на заряд, и его потенциальной энергией.

Сила, действующая на точечный заряд в данной точке электростатического поля, равна градиенту его потенциальной энергии в этой же точке, взятому с обратным знаком.

Из формулы (15.10) видно, что направление силы, действующей на заряд, и направление быстрейшего возрастания потенциальной энергии заряда всегда противоположны. Если r – направление быстрейшего изменения потенциальной энергии, то

$$F = \left|\frac{dW_n}{dr}\right| \qquad (15.11)$$

F и $\left|\frac{dW_n}{dr}\right|$ – модули $\vec{F}$ и $gradW_n$.

6 Напряженность поля и силу, действующую на заряд, можно найти из графика потенциала и потенциальной энергии. На рис. 33,*а* изображен график потенциала поля *отрицательного* точечного заряда, на рис. 33,*б* - график потенциальной энергии двух одноименных точечных зарядов.

Легко видеть, что $\frac{d\varphi}{dr}$ и $\frac{dW_n}{dr}$ есть *тангенсы* углов наклона *касательных* к графикам $\varphi(r)$ и $W_n(r)$ в соответствующих точках:

$$\frac{d\varphi}{dr} = tg\alpha \quad , \quad \frac{dW_n}{dr} = tg\beta$$

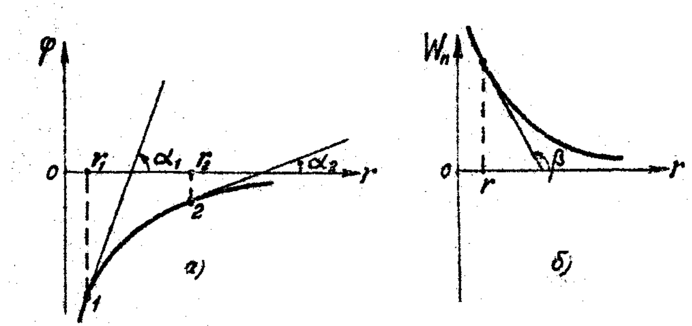


Рис.33

Но $\frac{d\varphi}{dr} = E_r$ и $\frac{dW_n}{dr} = -F_r$ - проекции напряженности $\vec{E}$ и силы $\vec{F}$ на направление r. Следовательно,

$$-tg\alpha = \vec{E}_r\,,\ -tg\beta = \vec{F}_r$$

По *наклону* касательных к графикам $\varphi(r)$ и $W_n(r)$ можно судить о величине и направлении (относительно оси r) напряженности поля и силы, действующей на заряд. Чем *круче* идет соответствующий график, тем *больше* численное значение силы и напряженности.

Так, в точке с координатой r_1 (рис 33,*а*) напряженность E_1 *больше*, чем напряженность E_2 в точке с координатой r_2 (так как касательная в точке r_1 наклонена под большим углом к оси r). Направление $\vec{E}$ *противоположно* направлению r (угол α – острый, $tg\alpha > 0$; проекция вектора напряженности на ось r, равная $E_r = -tg\alpha$ – *отрицательна,* следовательно, направления $\vec{E}$ и оси r противоположны).

В случае (Рис.33,*б)* сила $\vec{F}$ *совпадает* с направлением оси r и *уменьшается* по величине с увеличением r.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1 Что называют потенциалом электростатического поля?

2 Дайте определение единицы измерения потенциала в системе СИ.

3 Как связан потенциал какой либо точки поля с потенциальной энергией точечного заряда, помещенного в эту точку?

4 Запишите формулу для потенциала точечного заряда в системе СИ.

5 Какова связь между напряженностью и потенциалом в случае неоднородного и однородного поля?

6 Что называется градиентом потенциала?

7 Верно ли утверждение, что направление вектора напряженности в каждой точке электростатического поля указывает направление наибольшей быстроты падения потенциала? Объясните почему.

8 Как связана сила, действующая в электростатическом поле на точечный заряд, с потенциальной энергией этого заряда?

16 РАСЧЕТ ПОТЕНЦИАЛА И РАЗНОСТИ ПОТЕНЦИАЛОВ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

1 В общем случае расчет потенциала и разности потенциалов основывается на применении закона Кулона и принципа суперпозиции.

2 Схема расчета в случае поля, созданного системой *точечных* зарядов, такова. Сначала находят потенциалы, создаваемые в данной точке оп-

ределенными зарядами системы (вычисление этих потенциалов требует применения закона Кулона):

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\ r_1}, ..., \varphi_i = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\ r_i}, ... \qquad (16.1)$$

r_1 – расстояние от заряда q_1 до данной точки; r_1' – то же от заряда q_i .

Сложив потенциалы $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_i, ...$ (с учетом их знака), находят потенциал результирующего поля:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\ r_i}. \qquad (16.2)$$

3 Если заряд, создающий поле, распределен *непрерывно,* то прибегают к обычному приему: разбивают этот заряд на малые порции dq , определяют потенциал, создаваемый в данной точке каждым таким зарядом, после чего интегрируют:

$$\varphi = \int d\varphi = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\ r} \qquad (16.3)$$

4 Найдем потенциал в произвольной точке поля, созданного электрическим диполем (рис. 34), причем ограничится случаем, когда точка наблюдения отстоит от диполя на расстоянии r , значительно превышающем размеры диполя: $r >> l$ (l – плечо диполя).

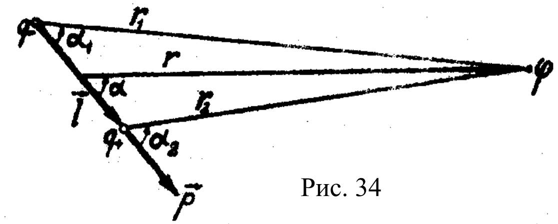


Рис. 34

Согласно принципу суперпозиции потенциал в точке наблюдения равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых положительным и отрицательным зарядами диполя:

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_- \qquad (16.4)$$

$$\varphi_+ = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\ r_2}, \quad \varphi_- = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\ r_1}, \qquad (16.5)$$

где q – абсолютная величина каждого из зарядов диполя; r_1 и r_2 – расстояния от отрицательного и положительного зарядов диполя до точки наблюдения.

Выражения для потенциалов φ_+ и φ_- подставим в (16.4):

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\ r_2} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\ r_1} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \cdot \frac{r_1 - r_2}{r_1 \cdot r_2} \qquad (16.6)$$

Так как плечо диполя l значительно меньше расстояния от центра диполя до рассматриваемой точки, то можно приближенно считать, что $r_1 \approx r_2 \approx r$ и $\alpha_1 \approx \alpha_2 \approx \alpha$.

Тогда вместо разности $r_1 - r_2$ можно записать:

$$r_1 - r_2 = lCos\alpha ,$$

а вместо $r_1 r_2$: $\qquad r_1 r_2 = r^2$

Подставив все это в формулу для суммарного потенциала, получим:

$$\varphi = \frac{ql}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\ r^2} Cos\alpha \qquad (16.7)$$

Произведение ql есть электрический момент диполя.

Окончательная формула, таким образом, имеет вид:

$$\varphi = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\ r^2} Cos\alpha \qquad (16.8)$$

где α – угол между направлением электрического момента диполя и направлением к точке наблюдения.

5 Пусть поле создано равномерно заряженным тонким кольцом радиуса r_0 с линейной плотностью зарядов τ . Найдем потенциал (относительно бесконечности) в точке, лежащей на оси этого кольца на расстоянии h от его центра (рис. 35).

Так как заряды распределены непрерывно, то при расчете результирующего потенциала нам придется интегрировать. Найдем в точке наблюдения потенциал, созданный зарядом бесконечно малого элемента dl :

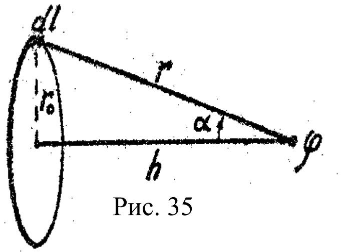


Рис. 35

$$d\varphi = \frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\ r}$$

$\tau\ dl$ – заряд, сосредоточенный на элементе dl ; r – расстояние от точки наблюдения до выделенного элемента.

$$r = \sqrt{r_0^2 + h^2}$$

При интегрировании учтем, что все элементы dl находятся от точки наблюдения на *одинаковых* расстояниях, следовательно, суммировать придется по l от 0 до $2\pi\ r_0$:

$$\varphi = \int d\varphi = \int_0^{2\pi r_0} \frac{\tau\, dl}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\sqrt{r_0^2 + h^2}} = \frac{\tau\, r_0}{2\varepsilon_0\varepsilon\sqrt{r_0^2 + h^2}} \qquad (16.9)$$

Потенциал в центре кольца $(h = 0)$ равен

$$\varphi_c = \frac{\tau}{2\varepsilon_0\varepsilon}\ . \qquad (16.10)$$

6 При вычислении потенциалов на основе принципа суперпозиции встречаются трудности физического и математического характера. Сложность вычислений с *физической точки зрения* заключается в том, что необходимо знать точное распределение зарядов во всем пространстве. *Математические трудности* – в достаточно громоздком *интегрировании.*

7 *Другой метод* расчета потенциала и разности потенциалов основан на применении *теоремы Гаусса* и формулы *связи потенциала с напряженностью.*

При *симметричном* распределении зарядов напряженность поля оказывается зависящей *только от* r – кратчайшего расстояния от точки наблюдения до соответствующего элемента симметрии (оси, центра и т.д.), причем линия вектора $\vec{E}$ в этом случае *совпадает* с этой радиальной прямой, поэтому численное значение *радиальной* проекции напряженности E_r совпадает с полной величиной E :

$$|E_r| = E \qquad (16.11)$$

Это обстоятельство упрощает расчеты.

Пусть поле создано каким – либо симметричным распределением зарядов, например, равномерно заряженным шаром, длинной нитью, плоскостью и т.д. r – радиальное направление, проведенное через точку наблюдения и *совпадающее* с $\vec{E}$. Только из общего соотношения между напряженностью и потенциалом имеем:

$$E_r = -\frac{d\varphi}{dr},$$

откуда убыль потенциала $(-d\varphi)$ на бесконечно малом отрезке dr радиальной прямой будет равна

$$-d\varphi = E_r dr \qquad (16.12)$$

Разность потенциалов между любыми двумя точками 1 и 2 будет равна интегральной сумме выражений (16.12):

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} -d\varphi = \int_1^2 E_r dr \quad \text{или} \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E_r dr.$$

В соответствии с (16.11) под E_r в этой формуле следует понимать *численное значение* напряженности, т.е. E :

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E dr. \qquad (16.13)$$

Зависимость E от r находим, пользуясь теоремой Гаусса.
Такова схема расчета. Рассмотрим примеры.

8. Найдем разность потенциалов между двумя *разноименно заряженными бесконечными плоскостями* (полученный вывод потребуется для расчета емкости плоского конденсатора).

Обозначим: φ_1 – потенциал одной плоскости (например, левой), φ_2 – потенциал другой плоскости (рис. 36). Согласно (16.13) $\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E_r dr.$.

Если поверхностные плотности зарядов обеих плоскостей одинаковы по величине $|\sigma_+| = |\sigma_-|$, то поле в пространстве между плоскостями численно равно $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}$.

Если расстояние r отсчитывать от левой плоскости, то нижний предел интегрирования будет равен нулю, а верхний r_0 (r_0 расстояние между плоскостями):

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^{r_0} \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} dr = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} r_0. \qquad (16.14)$$

Таким образом, разность потенциалов между двумя бесконечными плоскостями тем больше, чем больше расстояние между ними.

Так как во всем пространстве за плоскостями поле равно нулю

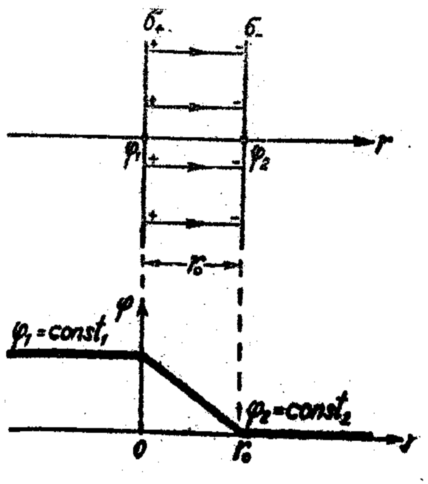


Рис.36

$(\vec{E} = 0)$, то из связи потенциала с напряженностью $(-d\varphi = Edr)$ следует, что во всех точках *слева* от плоскости (σ_+) потенциал одинаков и равен φ_1. На том же основании потенциал одинаков и равен φ_2 во всех точках, лежащих *правее* плоскости (σ_-). График $\varphi = \varphi(r)$ изображен на рис.36.

За начало отсчета потенциалов условно принята *правая* плоскость. В пространстве между плоскостями происходит *падение* потенциала.

9 Рассчитаем разность потенциалов между двумя *концентрическими сферами* радиусами r_1 и r_2, равномерно заряженными по поверхности (вывод потребуется для расчета емкости сферического конденсатора).

В соответствии с (16.13) $\varphi_1 - \varphi_2 = \int\limits_1^2 Edr$,

где φ_1 – потенциал внутренней сферы; φ_2 – потенциал внешней сферы.

Поле в зазоре между сферами создается только теми зарядами, которые сосредоточены на *внутренней сфере* (это вытекает из теоремы Гаусса: достаточно представить замкнутую поверхность, лежащую *между* сферами, чтобы согласиться с этим).

По (11.4) $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\ r^2}$.

Интегрировать будем в пределах от r_1 (радиус внутренней сферы) до r_2 (радиус внешней сферы):

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\ r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\ r_1} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\ r_2} = \frac{q(r_2 - r_1)}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\ r_1 r_2} \quad (16.15)$$

Легко убедиться в том, что если заряды сфер одинаковы по величине и противоположны по знаку $|q_+| = |q_-|$, то электрическое поле отлично от нуля только в пространстве *между* сферами. Отсутствие поля внутри малой сферы вытекает из теоремы Гаусса (там нет зарядов). За пределами внешней сферы суммарное поле равно нулю, так как поля, создаваемые зарядами внутренней и внешних сфер, компенсируют друг друга (эти поля таковы, как если бы заряды сфер были сосредоточены в одном общем центре. Так как заряды сфер равны по величине и противоположны по знаку, то в любой точке за пределами внешней сферы они создают напряженности, равные по величине и противоположные по направлению).

Из связи напряженности с потенциалом следует, что потенциал всех точек, лежащих внутри меньшей сферы, одинаков и равен φ_1, потенциал всех точек, лежащих за пределами внешней сферы, также одинаков и равен φ_2. Между сферами происходит падение потенциала (от внутренней сферы к внешней, если заряд внутренней сферы положителен).

График $\varphi = \varphi(r)$ для этого случая изображен на рисунке 37.

Потенциал внешней сфера условно принят равным нулю.

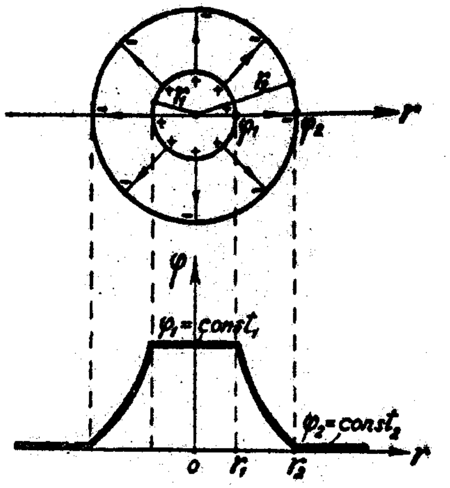


Рис. 37

10 Найдем разность потенциалов между двумя *равномерно заряженными коаксиальными цилиндрами бесконечной длины*. Пусть r_1 – радиус внутреннего цилиндра, r_2 – радиус внешнего цилиндра. Поверхностные плотности зарядов обоих цилиндров равны по величине и противоположны по знаку: $|\sigma_+| = |\sigma_-|$

В соответствии с (16.13) $\varphi_1 - \varphi_2 = \int\limits_1^2 E dr,$

где φ_1 – потенциал внутреннего цилиндра; φ_2 – потенциал внешнего цилиндра.

Электрическое поле в пространстве между цилиндрами создается только теми зарядами, которые распределены по внутреннему цилиндру, поэтому

$$E = \frac{\sigma r_1}{\varepsilon_0 \varepsilon r}.$$

Разность потенциалов между цилиндрами

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{\sigma r_1}{\varepsilon \varepsilon_0 r} dr = \frac{\sigma r_1}{\varepsilon \varepsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}. \qquad (16.16)$$

Если $\left|\sigma_+\right| = \left|\sigma_-\right|$, то, как и в предыдущем случае, поле отлично от нуля только в зазоре между цилиндрами. Следовательно, только в пространстве между цилиндрами происходит падение потенциала, во всех точках за пределами внешнего цилиндра потенциал одинаков. Аналогично потенциал одинаков и внутри малого цилиндра.

11 Обратим внимание на следующую примечательную особенность.

Напряженность поля в пространстве между двумя концентрическими сферами *не зависит* ни от радиуса, ни от заряда внешней сферы: *она зависит только от заряда внутренней сферы.*

Что же касается разности потенциалов между внутренней и внешней сферами, то она зависит от радиусов обеих сфер и заряда внутренней сферы, но опять таки не зависит от заряда, сосредоточенного на внешней сфере. Следовательно, внешняя сфера, в принципе, может быть не заряжена: разность потенциалов между сферами от этого не изменится. Для чего же обычно заряжают внешнюю сферу (например, в случае сферического конденсатора), да еще зарядом, равным по величине и противоположным по знаку заряду внутренней сферы? Только для того, чтобы *уничтожить* во внешнем пространстве поле, созданное зарядом внутренней сферы (для чего это необходимо будет объяснено в параграфе 29).

То же самое можно сказать и о коаксиальных цилиндрах.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Тонкий стержень длиной $l = 30 см$ (рис.38) несет равномерно распределенный по длине заряд с линейной плотностью $\tau = 1 мкКл/м$. На расстоянии $r_0 = 20 см$ от стержня находится заряд $q_1 = 10^{-2} мкКл.$ Заряд равноудален от концов стержня. Определить силу взаимодействия точечного заряда с заряженным стержнем.

Решение. Выделим на стержне дифференциально малый участок длиной dl, находящийся на нем заряд будет равен $dq = \tau dl$ и его можно рассматривать как точечный. Тогда по закону Кулона сила взаимодействия между зарядами q_1 и dq равна $dF = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1 \tau dl}{r^2}$, где $r -$ расстояние от выделенного элемента до заряда q_1. Из рис.38 следует, что

$$r = \frac{r_0}{\cos\alpha} \quad \text{и} \quad dl = \frac{r d\alpha}{\cos\alpha},$$

где r_0 − расстояние от заряда q_1 до стержня. С учетом этих замечаний получим $dF = \dfrac{q_1\tau}{4\pi\varepsilon_0 r_0} d\alpha$. Так как dF - вектор, то перед интегрированием разложим его на две составляющие, спроектированные на оси: параллельную длине стержня - dF_2 и перпендикулярную к ней - dF_1. Из рис.38 видно, что

$$dF_1 = dF\cos\alpha, \quad dF_2 = dF\sin\alpha.$$

Подставляя значения dF в эти формулы получим

$$dF_1 = \frac{q_1\tau\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r_0} d\alpha;$$

$$dF_2 = \frac{q_1\tau\sin\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r_0} d\alpha.$$

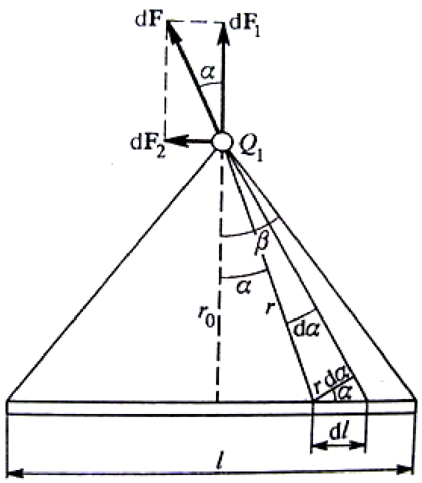


Рис.38

Интегрируя эти выражения в пределах от $-\beta$ до $+\beta$, получим

$$F_1 = \int_{-\beta}^{+\beta} \frac{q_1\tau\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r_0} d\alpha = \frac{q_1\tau}{4\pi\varepsilon_0 r_0}\int_{-\beta}^{+\beta}\cos\alpha d\alpha = \frac{q_1\tau}{4\pi\varepsilon_0 r_0}\sin\alpha\,\Big|_{-\beta}^{+\beta},$$

$$F_1 = \frac{q_1\tau}{4\pi\varepsilon_0 r_0}\left[\sin\beta - \sin(-\beta)\right] = \frac{q_1\tau}{4\pi\varepsilon_0 r_0} 2\sin\beta \quad \text{или}$$

$$F_1 = \frac{q_1\tau}{2\pi\varepsilon_0 r_0}\sin\beta.$$

В силу симметрии расположения заряда q_1 относительно стержня интегрирование второго выражения дает нуль.

Таким образом, сила, действующая на заряд q_1, равна

$$F = F_1 = \frac{q_1 \tau}{2\pi\varepsilon_0 r_0} \sin\beta.$$

Из рис.38 следует, что $\sin\beta = \dfrac{l/2}{\sqrt{r_0^2 + \dfrac{l^2}{4}}} = \dfrac{l}{\sqrt{4r_0^2 + l^2}}$. Тогда сила, действующая на заряд q_1 будет равна

$$F = \frac{q_1 \tau}{2\pi\varepsilon_0 r_0} \cdot \frac{l}{\sqrt{4r_0^2 + l^2}}.$$

Подставив числовые значения и произведя вычисления получим

$$F = \frac{10^{-8} \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}2} \cdot \frac{0{,}3}{\sqrt{4(0{,}2)^2 + (0{,}3)^2}} = 5{,}4 \cdot 10^{-4}\, H.$$

Пример 2. Электрическое поле создано двумя точечными зарядами $q_1 = 30 нКл$ и $q_2 = -10 нКл$. Расстояние между зарядами $d = 20 см$. Определить напряженность электрического поля в точке, находящейся на расстоянии $r_1 = 15 см$ от первого и на расстоянии $r_2 = 10 см$ от второго аряда.

Решение. В соответствии с принципом суперпозиции электрических полей, напряженность поля в искомой точке будет равна

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2,$$

где вектор $\vec{E}_1$ направлен по силовой линии от положительного заряда q_1, а вектор $\vec{E}_2$ также по силовой линии, но к отрицательному заряду q_2 (рис.39). Численное значение напряженности поля, созданного первым зарядом равно $E_1 = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}$, а вторым $E_2 = \dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}$.

Абсолютное значение вектора E найдем по теореме косинусов:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1 E_2 \cos\alpha},$$

где α - угол между векторами $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$, который найдем из треугольника со сторонами r_1, r_2 и d:

$$\cos\alpha = \frac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1 r_2}.$$

Численное значение $\cos\alpha$ равно

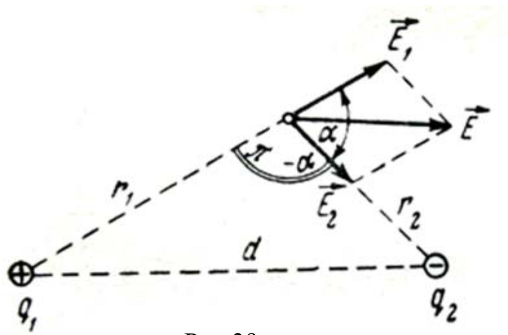


Рис.39

$$\cos\alpha = \frac{20^2 - 15^2 - 10^2}{2 \cdot 15 \cdot 10} = 0{,}25$$

С учетом сделанных замечаний получим

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{q_1^2}{r_1^4} + \frac{q_2^2}{r_2^4} + 2\frac{q_1 q_2}{r_1^2 r_2^2}\cos\alpha}\ .$$

Подставим числовые значения

$$E = \frac{1}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}\sqrt{\frac{(3\cdot 10^{-8})^2}{0{,}15^4} + \frac{(10^{-8})^2}{0{,}1^4} + 2\frac{3\cdot 10^{-8}\cdot 10^{-8}}{0{,}15^2 \cdot 0{,}1^2}\cdot 0{,}25} =$$

$$= 1{,}67 \cdot 10^4\, в/м = 16{,}7 кв/м.$$

Пример 3. Положительные заряды $q_1 = 3 мкКл$ и $q_2 = 0{,}02 мкКл$ находятся в вакууме на расстоянии 1,5 *м* друг от друга. Определить работу, которуюнадо совершить, чтобы сблизить заряды до расстояния 1 *м.*

Решение. Будем считать первый заряд неподвижным, а второй под действием внешних сил перемещается в поле, созданное первым зарядом, приближаясь к нему с расстояния $r_1 = 1{,}5 м$ до $r_2 = 1 м$.

Работа A' внешней силы по перемещению заряда q из одной точки поля с потенциалом φ_1 в другую, потенциал которой φ_2, равна по абсолютной величине и противоположна по знаку работе A сил поля по перемещению заряда между теми же точками $A' = -A$.

Работа сил поля выражается формулой

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Тогда работа внешних сил запишется как

$$A' = -q(\varphi_1 - \varphi_2) = q(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Потенциалы точек находятся по формулам

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1}, \qquad \varphi_2 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_2}.$$

Учитывая, что переносится заряд q_2 в поле первого заряда, получим

$$A' = \frac{q_2 q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right).$$

Подставим числовые значения и произведем вычисления

$$A' = \frac{3\cdot 10^{-6}\cdot 2\cdot 10^{-8}}{4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1{,}5}\right) = 1{,}8\cdot 10^{-4}\,Дж = 180\,мкДж\,.$$

Пример 4. Электрическое поле создано тонким стержнем, несущим равномерно распределенный по длине заряд $\tau = 0{,}1\,мкКл/м$. Определить потенциал поля в точке, удаленной от концов стержня на расстояние, равное длине стержня.

Решение. Посколку расстояние от стержня до точки, в которой необходимо определить потенциал, соизмеримо с длиной стержня, то заряд, находящийся на стержне, нельзя считать точечным. Поэтому стержень разбиваем на элементарные отрезки dl с зарядами τdl на каждом из них и применяем формулу для определения потенциала точек поля, созданного точечным зарядом $d\varphi = \dfrac{\tau dl}{4\pi\varepsilon_0 r}$, где r - расстояние от точки, в которой определяется потенциал, до элемента стержня. Из рис.40 следует, что

$$dl = \frac{r d\alpha}{\cos\alpha}, \text{ тогда } d\varphi = \frac{\tau d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 \cos\alpha}.$$

Интегрируя полученное выражение в пределах от α_1 до α_2, получим

$$\varphi = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\tau d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 \cos\alpha}$$

В силу симметрии расположения точки A относительно концов стержня $\alpha_1 = \alpha_2$ и поэтому полученный интеграл можно заменить на удвоенный с пределами от 0 до α_1, следовательно

$$\varphi = 2\int_0^{\alpha_1} \frac{\tau d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 \cos\alpha} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\int_0^{\alpha_1} \frac{d\alpha}{\cos\alpha}.$$

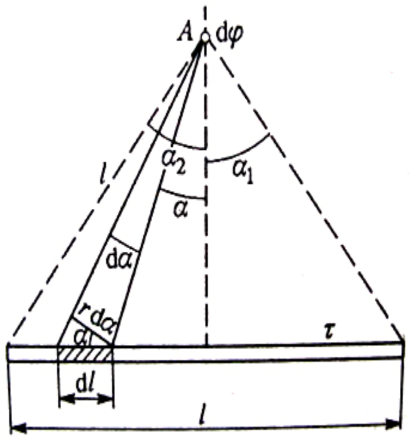


Рис.40

Рассматриваемый интеграл является табличным, т.е.

$$\int \frac{d\alpha}{\cos\alpha} = \ln tg\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C, \text{ тогда}$$

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln tg\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\pi/6} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln tg\pi/3 - \ln tg\pi/4\right) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln tg\pi/3.$$ После

подстановки числовых значений получим

$$\varphi = \frac{0{,}1\cdot 10^{-6}}{2\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}\cdot \ln 1{,}73 = 990\text{в}.$$

Пример 5. Диполь с электрическим моментом $p = 2\cdot 10^{-9}$ *Кл·м* находится в однородном электрическом поле напряженностью $E = 3\cdot 10^4$ *в/м*. Вектор $\vec{p}$ составляет угол $\alpha_0 = 60^0$ с направлением силовых линий поля. Определить произведенную внешними силами работу поворота диполя на угол $\beta = 30^0$.

Решение. Из исходгого положения (Рис.41) диполь можно повернуть на угол $\beta = 30^0 = \pi/6$ двумя способами: или по часовой стрелке до угла $\alpha_1 = \alpha_0 - \beta = \pi/3 - \pi/6 = \pi/6$ (рис.41, *б*), или против часовой стрелки до угла $\alpha_2 = \alpha_0 + \beta = \pi / 3 + \pi / 6 = \pi / 2$ (рис.41, *в*). В первом случае диполь будет поворачиваться под действием сил поля и работа внешних сил

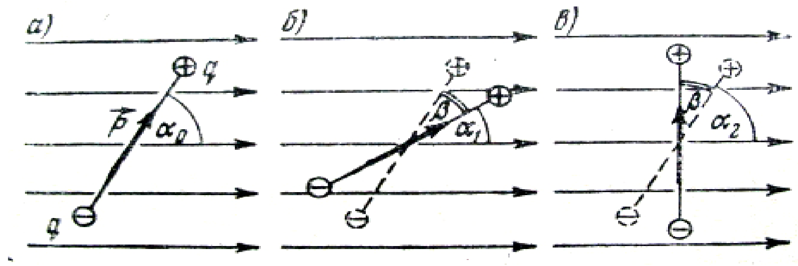


Рис.41

будет отрицательна. Во втором случае поворот возможен только под действием внешних сил и работа этих сил положительна.

Элементарная работа dA при повороте на угол $d\alpha$ выражается формулой $dA = Md\alpha = hFd\alpha = l\sin\alpha F d\alpha = lqE\sin\alpha d\alpha = pE\sin\alpha d\alpha$. Полная работа при повороте от угла α_0 до α равна

$$A = \int_{\alpha_0}^{\alpha} pE\sin\alpha d\alpha = pE\int_{\alpha_0}^{\alpha}\sin\alpha d\alpha.$$

Произведя интегрирование, получим $A = -pE(\cos\alpha_0 - \cos\alpha)$.

При повороте по часовой стрелке $A = pE(\cos\alpha_0 - \cos\alpha_1) =$

$= 2\cdot 10^{-9}\cdot 3\cdot 10^{4}(\cos\pi/3 - \cos\pi/6) = 6\cdot 10^{-5}(0{,}5 - 0{,}86) = -2{,}19\cdot 10^{-5}$ *Дж*

При повороте против часовой стрелки работа внешних сил равна

$$A = pE(\cos\alpha_0 - \cos\alpha_2) = 2\cdot 10^{-9}\cdot 3\cdot 10^{4}(\cos\pi/3 - \cos\pi/2) =$$
$$= 6\cdot 10^{5}(0{,}5 - 0) = 3\cdot 10^{-5}\ \textit{Дж}.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1 Как, в принципе, рассчитывается потенциал поля, созданного системой сосредоточенных зарядов?

2 Рассчитайте разность потенциалов между двумя произвольными точками следующих полей:

а) поля, созданного точечным зарядом;

б) поля, созданного бесконечной равномерной заряженной плоскостью;

в) поля, созданного бесконечным равномерно заряженным цилиндром.

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ДИЭЛЕКТРИКАХ

До сих пор не затрагивался вопрос о том, какое влияние оказывает *вещество на свойства* электрического *поля*.

Заполнение пространства, где существует электрическое поле, веществом, несомненно, приводит к существенным изменениям свойств поля. В свою очередь, не менее существенные изменения претерпевает и само вещество, внесенное в поле.

Рассмотрение вопроса о взаимном влиянии друг на друга вещества и электростатического поля мы начнем с классификации веществ по их электрическим свойствам.

17 ПРОВОДНИКИ, ДИЭЛЕКТРИКИ, ПОЛУПРОВОДНИКИ

1 В зависимости от способности проводить электрический ток вещества делятся на проводники, диэлектрики и полупроводники.

Тела, в которых электрические заряды могут *свободно перемещаться*, называются *проводниками* электричества.[x)] В таких телах есть *свободные* электрические заряды. Эти заряды при наличии поля в проводнике приходят в упорядоченное движение, создавая *электрический ток.* Проводниками являются металлы, электролиты, ионизированные газы, плазма и т.д.

2 *Диэлектрики* [xx)] - это тела, в которых может длительное время существовать электростатическое поле. Диэлектрики отличаются от проводников тем, что при не слишком высоких температурах и в отсутствие очень сильных электрических полей они проводят ток в 10^{15} - 10^{20} раз хуже, чем проводники. Свободных зарядов в них практически нет.

Диэлектриками являются, например, слюда, фарфор, дистиллированная вода и др.

3 *Полупроводники* - это вещества, которые по своей способности проводить электрический ток занимают *промежуточное положение* между проводниками и диэлектриками. Кроме того, полупроводники обладают рядом специфических свойств, что позволяет их выделить в особую группу веществ.

[x)] Термин «проводник электричества» введен англичанином С. Греем.

[xx)] Термин «диэлектрики» введен М. Фарадеем.

Полупроводниками являются некоторые химически чистые элементы (кремний, германий, селен и др.) и весьма многие химические соединения.

18 ПОЛЯРИЗАЦИЯ ДИЭЛЕКТРИКОВ

1 При наличии внешнего электрического поля в диэлектрике происходит особый процесс, называемый *поляризацией.*

Поляризация диэлектрика заключается в том, что *элементарные объемы* диэлектрика *и весь* диэлектрик в целом приобретают вполне определенный *электрический момент.*

Поляризация сопровождается появлением *на гранях* диэлектрика *тонкого слоя нескомпенсированных* электрических зарядов (в случае неоднородного поля или неоднородного [x)] диэлектрика появляются также и *объемные* заряды). Противоположные по знаку заряды всегда появляются на противоположных поверхностях диэлектрика, они образуют своеобразные электрические *полюсы*, отсюда и название этого процесса электризации - поляризация.

Заряды, возникающие на диэлектрике под действием внешнего электрического поля, называются *поляризационными* или *связанными,* (иногда их называют фиктивными зарядами).

Связанные заряды, в отличие от свободных зарядов, не могут быть сняты с диэлектрика, не могут быть отведены в землю при заземлении диэлектрика. Они, в самом деле, оказываются *«связанными»* с диэлектриком. В этом смысле термин “связанные заряды" как нельзя лучше отражает действительное состояние этих зарядов.

2 *Количественной* характеристикой *интенсивности поляризации* является величина, называемая *вектором поляризации* или *поляризуемостью.*

Вектор поляризации $\vec{P}$ *- векторная величина, численно равная электрическому моменту единицы объема поляризованного диэлектрика.* Направление вектора поляризации в каждой точке диэлектрика совпадает с направлением электрического момента элементарного объема в окрестности этой точки.

Если вектор поляризации во всех точках диэлектрика *одинаков,* то поляризация называется *однородной.*

[x)] Неоднородными будем называть такие диэлектрики, у которых физические свойства, например, плотность, химический состав, электропроводность, восприимчивость и т.д. в разных точках *различны.*

Если же вектор $\vec{P}$ в разных точках диэлектрика имеет *разное* направление и *неодинаков* по величине, то поляризация называется *неоднородной.*

С атомистической точки зрения вектор поляризации представляет собой геометрическую сумму дипольных моментов всех молекул, находящихся в единице объема. [x)]

В случае однородной поляризации

$$\vec{P} = \frac{\sum\limits_{\Delta v} \vec{p}_i}{\Delta V}, \tag{18.1}$$

где $\vec{p}_i$ - электрический момент i-ой молекулы;

ΔV - произвольный объем диэлектрика.

Если поляризация неоднородна,

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum\limits_{\Delta V} \vec{p}_i}{\Delta V} \tag{18.2}$$

Вектор поляризации характеризует *каждую* точку поляризованного диэлектрика.

3 Распределение поляризационных зарядов по поверхности диэлектрика характеризует поверхностная плотность σ':

$$\sigma' = \frac{dq'}{dS}$$

dq' - поляризационный заряд, сосредоточенный на площадке dS.

4 Между вектором поляризации и поверхностной плотностью связанных зарядов существует связь. Установим эту связь на простом частном примере.

Пусть *однородный* диэлектрик, имеющий форму большой плоскопараллельной пластины, внесен в *однородное* электрическое поле. Под действием поля пластина поляризуется.

Если грани пластины не параллельны полю, то на них появляются поляризационные заряды с одинаковой по величине и противоположной по знаку поверхностной плотностью: $|\sigma'_+| = |\sigma'_-|$.

[x)] Вопрос о том, как появляются у молекул диэлектрика дипольные моменты будет рассмотрен позднее.

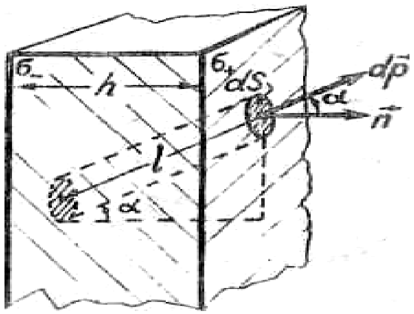


Рис.42

Вырежем (мысленно) в поляризованной пластине элементарный объем в виде бесконечно тонкого цилиндра (или призмы), основания dS которого совпадают с гранями пластины (если образующие цилиндра не перпендикулярны граням пластины, то цилиндр получится наклонным; именно такой цилиндр мы и рассмотрим (рис.42)).

Найдем электрический момент выделенного объема диэлектрика. Этот момент можно выразить через вектор поляризации P и объем dV:

$$dp = PdV$$

где P - модуль вектора поляризации. Направления $d\vec{p}$ и $\vec{P}$ *совпадают*.

Объем наклонного цилиндра в рассматриваемом случае равен площади основания dS на толщину пластины h:

$$dV = dSh = dSlCos\,\alpha\ ,$$

так как $h = lCos\,\alpha$

Найденное значение объема подставим в выражение для момента:

$$dp = PdS\,lCos\,\alpha \qquad (18.3)$$

С другой стороны, выделенный объем можно рассматривать как электрический диполь с зарядами $\sigma'_{\pm}\,dS$ и плечом l (так как площадь торцов цилиндра бесконечно мала, то заряды $\sigma'_{\pm}\,dS$ можно считать точечными). Момент этого диполя численно равен

$$dp = \sigma'\,dSl \qquad (18.4)$$

Приравнивая правые части (18.3) и (18.4), получим:

$$PCos\,\alpha = \sigma' \qquad (18.5)$$

α - угол между направлением внешней нормали и направлением вектора поляризации $\vec{P}$. Произведение $PCos\,\alpha = P_n$ есть проекция вектора поляризации на внешнюю нормаль. Тогда

$$P_n = \sigma' \qquad (18.6)$$

Таким образом, нормальная составляющая вектора поляризации численно равна поверхностной плотности поляризационных зарядов.

Полученный вывод остается в силе и для самого общего случая, когда поле или диэлектрик, или оба они неоднородны и когда диэлектрик имеет произвольную форму.

Зная распределение вектора поляризации в точках поверхности поляризованного диэлектрика, можно найти распределение поляризационных зарядов и наоборот.

Обратим внимание на то, что соотношение (18.6) – *дифференциальное.* P_n и σ' относятся *к одной и той же точке* поверхности диэлектрика.

4 Теория и опыт показывают, что вектор поляризации в каждой точке изотропного диэлектрика в не очень сильных полях пропорционален напряженности поля, существующего в этой же точке, и совпадает с ней по направлению:

$$\vec{P} = æ\,\varepsilon_0 \vec{E}\,, \qquad (18.7)$$

где $æ$ - так называемый *коэффициент поляризации* или диэлектрическая *восприимчивость* вещества. Эта величина является константой вещества и показывает, как сильно поляризуется данное вещество во внешнем электрическом поле. Электрическая постоянная ε_0 появляется в этом выражении по соображениям размерности (нетрудно убедиться в том, что размерности P и $\varepsilon_0 E$ одинаковы) .

5 Если вектор поляризации и напряженность поля совпадают по направлению в *любой* точке *внутри* изотропного диэлектрика, то, очевидно, они совпадают и в точках на поверхности диэлектрика.

Спроектировав векторы $\vec{P}$ и $\vec{E}$ на нормаль к поверхности, получим:

$$P_n = æ\varepsilon_0 E_n \qquad (18.8)$$

Но $P_n = \sigma'$, следовательно,

$$\sigma' = æ\varepsilon_0 E_n \qquad (18.9)$$

Из последней формулы видно, что если проекция вектора напряженности на направление внешней нормали к поверхности диэлектрика *положительна* ($E_n > 0$), то и $\sigma' > 0$, т.е. на такой поверхности появляются *положительные* поляризационные заряды. Если $E_n < 0$ то и $\sigma' < 0$ - на таких поверхностях появляются отрицательные поляризационные заряды. Поляризационные заряды не появляются в тех точках поверхности диэлектрика, в которых вектор $\vec{E}$ направлен *по касательной* к поверхности (в этом случае $E_n = 0$ и, следовательно,

$\sigma' = æ\,\varepsilon_0 E_n = 0$

19 ОПИСАНИЕ ПОЛЯ В ДИЭЛЕКТРИКАХ

1 Говоря о поле *внутри диэлектрика*, имеют в виду *макроскопическое поле,* поле, *усредненное* по физически бесконечно малому объему dV.

2 Электрическое поле, как в диэлектрике, так и вне его, представляет собой *суперпозицию* двух полей: поля, созданного *свободными* зарядами, и поля, созданного *связанными* зарядами:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' \qquad (19.1)$$

$\vec{E}_0$ - напряженность поля, созданного свободными зарядами;

$\vec{E}'$ - напряженность поля, созданного связанными зарядами.

Поляризация любого элементарного объема диэлектрика обусловлена именно этим *полным* полем $\vec{E}$. Именно об этом поле идет речь в соотношении (18.7).

3 Поле связанных зарядов $\vec{E}'$ *внутри диэлектрика* всегда *ослабляет* поле свободных зарядов: суммарное поле, которое существует в данной точке внутри диэлектрика, всегда *меньше* того поля, которое существовало бы в этой же точке в отсутствие диэлектрика (при том же распределении свободных зарядов): $E_{внутри} < E_0$

Поле связанных зарядов в диэлектрике никогда не компенсирует полностью поле свободных зарядов: оно компенсирует внешнее поле лишь частично!

Из сказанного *вовсе не следует*, что поле $\vec{E}'$ в диэлектриках *всегда направлено противоположно* $\vec{E}_0$. Направление $\vec{E}'$ зависит помимо всего прочего от формы диэлектрика и его положения в электрическом поле. В зависимости от этих факторов угол между $\vec{E}'$ и $\vec{E}_0$ может принимать любые значения от $\frac{\pi}{2}$ до π. На рис.43 указаны направления векторов $\vec{E}'$ и $\vec{E}_0$ внутри диэлектрика, имеющего форму большой плоскопараллельной пластины и расположенного в однородном поле так, что его грани не перпендикулярны линиям поля. Угол между векторами $\vec{E}_0$ и $\vec{E}'$ не равен π.

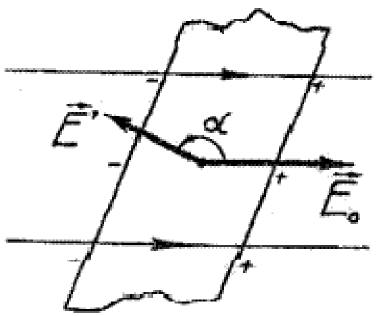


Рис.43

4 *Вне* диэлектрика поле связанных зарядов может и *усиливать, и ослаблять* поле свободных зарядов, поэтому полное поле здесь может быть больше, меньше или равно полю свободных зарядов.

Рис.44 поясняет сказанное. В однородное поле внесен длинный тонкий стержень из однородного диэлектрика. Поле связанных зарядов q'_+ и q'_- будет приблизительно таким же, как и поле двух точечных разноименных зарядов. Линии $\vec{E}'$ на рисунке изображены тонкими линиями, линии $\vec{E}_0$ - толстыми.

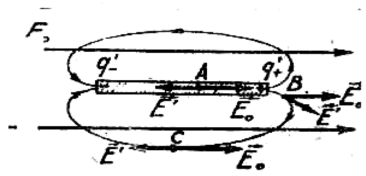


Рис.44

Из чертежа видно, что в точке A (внутри диэлектрика) результирующее поле меньше, в точке B (вне диэлектрика) больше и в точке C (также вне диэлектрика) меньше E_0.

5 Можно показать, что на границе раздела двух диэлектриков с различными ε происходит скачкообразное изменение величины и направления вектора напряженности (это изменение обусловлено наличием связанных зарядов).

Линии вектора напряженности *на границе* раздела диэлектриков *преломляются* и испытывают *разрыв:* часть линий либо начинается, либо обрывается на связанных зарядах (рис.45,*а)*.

6 Очевидно, что *расчет поля* в веществе - *задача более сложная*, чем расчет поля в вакууме. При наличии диэлектриков приходится учитывать не только свободные, но и связанные заряды, распределение которых, особенно в случае неоднородной поляризации не отличается простотой.

7 Для упрощения решения задач электростатики вводится вспомогательная характеристика поля - *вектор* электростатиче*ской индукции* $\vec{D}$.

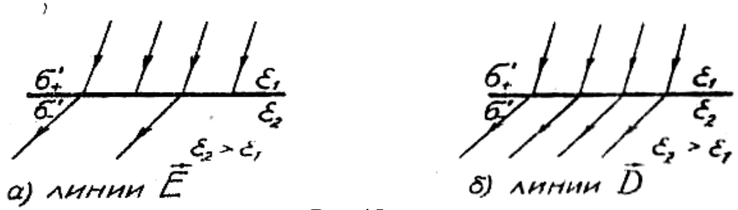


Рис.45

По *определению*, вектор $\vec{D}$ равен геометрической сумме вектора $\varepsilon_0\vec{E}$ ($\vec{E}$ - *результирующее* поле свободных и связанных зарядов) и вектора поляризации $\vec{P}$:

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \tag{19.2}$$

8 В изотропных диэлектриках в не очень сильных полях вектор поляризации является линейной функцией полного поля $\vec{E}$:

$$\vec{P} = æ\,\varepsilon_0 \vec{E}$$

Подставив это выражение в формулу для $\vec{D}$ (19.2), получим:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + æ\,\varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + æ)\,\vec{E}. \qquad (19.3)$$

Из этого соотношения видно, что в *изотропных* диэлектриках направление вектора электростатической индукции *совпадает* с направлением вектора результирующей напряженности.

В *анизотропных* диэлектриках направления $\vec{P}$ и $\vec{E}$ не совпадают, следовательно, направления $\vec{D}$ и $\vec{E}$ также различны. Безразмерная величина (*1+æ*) в формуле (19.3) называется *относительной диэлектрической проницаемостью среды* и обозначается буквой ε:

$$\varepsilon = (1 + æ) \qquad (19.4)$$

Следовательно, $\vec{D} = \varepsilon_0 (1 + æ)\,\vec{E} = \varepsilon\varepsilon_0\,\vec{E}$ (19.5)

Мы получили формулу, которой уже пользовались ранее. Еще раз подчеркнем, что эта формула верна только в случае *изотропных* диэлектриков.

9 При переходе через границу раздела диэлектриков величина и направление вектора индукции в общем случае *изменяется.*

Что касается *линий вектора* - $\vec{D}$, то они на границах раздела могут преломляться, но *не испытывают разрыва* (рис.45,б).

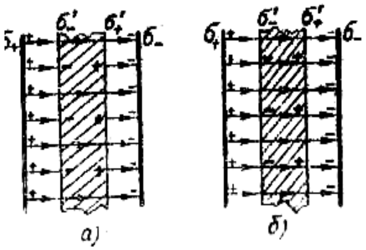


Рис.46

Если граница раздела диэлектриков *перпендикулярна* линиям поля и значит, *совпадает* с эквипотенциальной поверхностью, то на такой границе вектор $\vec{E}$ изменяется только *по величине,* а вектор $\vec{D}$ не изменяется ни по величине, ни по направлению. На рис.46 показаны линии $\vec{E}$ (*а*) и линии $\vec{D}$ (*б*) поля двух параллельных пластин (плоского конденсатора) при наличии диэлектрика, в форме плоскопараллельной пластины, перпендикулярной линиям поля.

10 Итак, связанные заряды *не влияют на число* линий индукции; «источниками» этих линий могут быть только свободные заряды. Следовательно, поток *вектора индукции через замкнутую поверхность зависит только от свободных зарядов, охватываемых этой поверхностью*

11 Физической причиной уменьшения силы взаимодействия зарядов *в среде* является действие нескомпенсированных поляризациионных зарядов. Эти заряды *ослабляют* электрическое поле свободных зарядов и тем самым уменьшают их силу взаимодействия.

20 РАСЧЕТ ПОЛЯ ПРИ НАЛИЧИИ ДИЭЛЕКТРИКОВ

1 На первый взгляд может показаться, что наличие диэлектриков не должно вносить особых затруднений в расчет. В самом деле, между индукцией $\vec{D}$ и напряженностью $\vec{E}$ в случае изотропных диэлектриков существует известная связь: $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$.

Далее известно, что поток индукции зависит только от распределения свободных зарядов. Определив индукцию (по теореме Гаусса) в интересующей нас точке и, разделив ее на $\varepsilon\varepsilon_0$, мы решим поставленную задачу - найдем напряженность.

Ход рассуждений здесь верен, но молчаливо обойдены два обстоятельства, усложняющие математическое решение задачи.

а) Связанные заряды, возникающие в результате поляризации пространственно ограниченных диэлектриков *произвольной формы, деформируют поле* свободных зарядов, вызывают перераспределение этих зарядов. Если до внесения в поле диэлектрика свободные заряды были распределены симметрично, то после внесения отдельных «кусков» диэлектрика симметрия зарядов нарушается,

б) Линии индукции на границах диэлектриков *преломляются* (в неоднородных диэлектриках, свойства которых изменяются *непрерывно,* линии индукции преломляются не только на границах, но и внутри диэлектрика). Первое обстоятельство затрудняет вычисление свободного заряда, попадающего внутрь выбранной поверхности (надо знать, *как эти заряды распределены*), второе - вычисление потока индукции через выбранную поверхность (надо точно знать, как направлен вектор $\vec{D}$ в каждой точке этой поверхности). Теорема Гаусса остается, конечно, справедливой и в этом случае, но не позволяет вычислить индукцию в интересующей нас точке с той же легкостью, с какой мы это делаем в *отсутствие* диэлектриков и при *симметричном* распределении свободных зарядов.

2 Связанные заряды не вызывают перераспределения свободных зарядов и линии индукции не преломляются, если диэлектрик однороден и заполняет *всё* пространство, где сосредоточено поле, или, по крайней мере, область между двумя эквипотенциальными поверхностями. Если диэлектрик однороден и заполняет пространство между двумя экви-

потенциальными поверхностями, то связанные заряды создают отличное от нуля поле только *внутри* диэлектрика; за пределами диэлектрика поля, создаваемые связанными зарядами противоположного знака, *компенсируют* друг друга. Линии индукции не преломляются в этом случае потому, что они всюду перпендикулярны к поверхности диэлектрика.

Если распределение свободных зарядов при наличии однородных изотропных диэлектриков известно, то расчет поля осуществляется достаточно просто по схемам, изложенным в §§ 11 и 16.

ПРИМЕЧАНИЕ. При расчете полей, проведенном в §11, мы предполагали наличие среды, но ничего не говорили о форме диэлектриков, внесенных в поле.

Полученные результаты справедливы, если: а) диэлектрики однородны и изотропны; б) форма диэлектриков такова, что поляризационные заряды не вызывают смещения свободных зарядов и не нарушают их симметричного распределения (диэлектрики заполняют либо все пространство, либо область между двумя любыми эквипотенциальными поверхностями).

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. В чем заключается явление поляризации диэлектриков?
2. Что называется вектором поляризации?
3. Какова связь между вектором поляризации и поверхностной плотностью поляризационных зарядов?
4. Каково влияние поляризационных зарядов на электрическое поле внутри диэлектрика и вне его?
5. Что такое вектор электростатической индукции и как он связан с вектором поляризации?
6. Что характеризует диэлектрическая восприимчивость и как она связана с вектором поляризации и диэлектрической проницаемостью?
7. Каковы физические причины уменьшения силы взаимодействия между зарядами в среде по сравнению с силой взаимодействия в вакууме?

21 ДИПОЛЬНЫЕ МОМЕНТЫ МОЛЕКУЛ ДИЭЛЕКТРИКОВ

Наша задача теперь - объяснить *механизм* поляризации с точки зрения *молекулярного строения* диэлектриков.

1 Как известно, молекулы построены из *атомов.*

Атом состоит из положительно заряженного *ядра* и отрицательно заряженных *электронов,* обращающихся вокруг ядра.

В обычном, не ионизованном состоянии отдельные атомы электрически *нейтральны.* Это значит, что *заряд ядра* атома *равен* суммарному *заряду электронов* и что «центр тяжести» ядра совпадает с центром тяжести электронной оболочки.

2 При образовании молекул из атомов может случиться, что и в составе молекулы атомы останутся *незаряженными.* Молекулы, построенные из незаряженных, *нейтральных* атомов, называются *неполярными.* В таких молекулах центр тяжести всех ядер и центр тяжести всех электронов в отсутствие внешнего электрического поля *совпадают.* Следовательно, электрический момент неполярных молекул в отсутствие внешнего поля равен *нулю.* В неполярных молекулах *атомы расположены симметрично.*

Рис. 47

На рис.47 изображены структурные модели неполярных молекул водорода (*а)* и метана *(б*).

Диэлектрики, состояние из *неполярных молекул*, называются *неполярными.*

Примеры диэлектриков с неполярными молекулами: азот, водород, метан, четыреххлористый углерод, полистирол, полиэтилен, сера и др.

3 Существуют молекулы, которые построены из ионов - *заряженных* атомов. В таких молекулах в отсутствие внешнего электрического поля центр тяжести положительных ядер и центр тяжести электронов не совпадают.

Молекулы, в которых центры тяжести положительных и отрицательных зарядов *смещены* друг относительно друга, называются *полярными.*

В полярных молекулах атомы расположены асимметрично. На рис.48 изображена модель полярной молекулы воды, которая состоит из двух положительных ионов водорода и одного отрицательного иона кислорода. Полярные молекулы подобны электрическим диполям: они обладают вполне определенным электрическим моментом и создают в окружающем пространстве свое собственное поле.

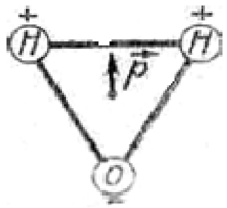


Рис.48

4 Рассмотрим теперь, как воздействует внешнее электрическое поле на полярные и неполярные молекулы.

Под действием внешнего электрического поля *неполярные* молекулы *поляризуются*: в них индуцируется электрический момент, направление которого всегда *совпадает с направлением внешнего поля.* Появление электрического момента обусловлено *смещением центра* тяжести положительных зарядов в направлении поля, центра тяжести отрицательных зарядов - против поля (рис.49).

В результате этого смещения молекула приобретает электрический момент $\vec{p}$ и становится подобной электрическому диполю.

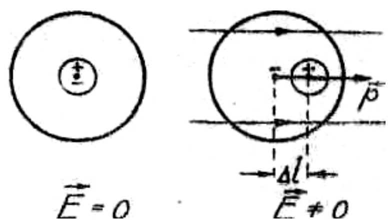


Рис.49

5 Смещение зарядов в неполярной молекуле в не очень сильных полях оказывается *пропорциональным* напряженности внешнего электрического поля.

Убедимся в этом на примере атома *водорода*.

Пусть Δl расстояние, на которое смещается под действием внешнего поля орбита электрона (рис.50). Свяжем это смещение с напряженностью поля (будем считать при этом, что поле *перпендикулярно* плоскости орбиты и орбита *круговая*).

Движение электрона по окружности при наличии внешнего поля обусловлено совместным действием ядра (сила $\vec{F}_i$) и внешнего поля (сила $\vec{F}_e$).

Сумма проекций этих сил на направление радиуса r дает величину центростремительной силы:

$$F_i\, Cos\alpha = m\omega^2 r,$$

α - угол между плоскостью электронной орбиты и радиус-вектором, проведенным от электрона к ядру; ω - угловая скорость обращения электрона; r - радиус орбиты; m - масса электрона.

Сумма проекций этих же сил на направление поля равна нулю (так как ускорение электрона в этом направлении отсутствует).

$$F_i\, Sin\alpha - F_e = 0$$

Сила, действующая на электрон со стороны поля, равна $F_e = eE,$
где E - напряженность поля, e - заряд электрона.

Свяжем Δl, r *и* α. Из чертежа видно, что $tg\,\alpha = \dfrac{\Delta l}{r}$

Решая составленные уравнения совместно, найдем, что смещение орбиты электрона относительно ядра равно $\Delta l = \dfrac{e}{m\omega^2} E$

Электрический момент атома, обусловленный этим смещением, найдем, умножив e (заряд электрона) на Δl:

$$p = e\Delta l = \frac{e^2}{m\omega^2}E \qquad (21.1)$$

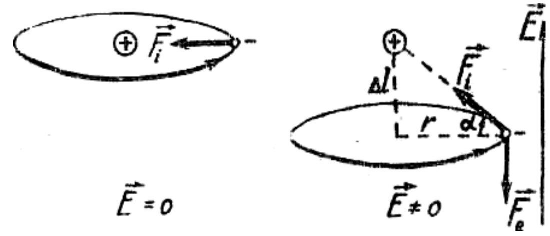


Рис.50

Мы видим, что электрический момент, обусловленный смещением электронной орбиты, пропорционален напряженности поля.

В многоэлектронных атомах и молекулах картина, несомненно, усложняется, но характер зависимости p от E остается прежним.

6 *Смещение зарядов в неполярных молекулах происходит подобно упругой деформации*, т.е. так, как если бы между зарядами действовали упругие силы. Смещение исчезает вместе с исчезновением электрического поля. Поэтому неполярные молекулы часто называют *«квазиупругими» или «мягкими» диполями*

7 Действие *однородного* электрического поля *на полярные* молекулы оказывается *ориентирующим:* поле стремится «развернуть» молекулярные диполи так, чтобы их электрические моменты совпали с направлением вектора $\vec{E}$. В неоднородном поле, кроме того, действуют силы, вызывающие поступательное движение диполей.

8 Рассмотрим, от чего зависит *вращательное действие* электрического поля на молекулярные диполи. Если электрическое поле *однородно,* то на заряды q_+ и q_- диполя действуют равные по величине и противоположные по направлению силы $\vec{F}_+$ и $\vec{F}_-$ (рис.51). Эти силы образуют *пару сил.*

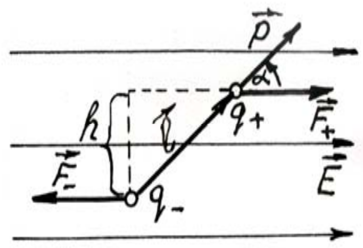


Рис.51

Вращательный момент этой пары относительно оси, проходящей через один из зарядов равен

$$M = FlSin\alpha,$$

где F – величина силы $\vec{F}_+$ (или $\vec{F}_-$); $lSin\alpha$ - плечо этой силы. Сила F равна qE. Подставим F в формулу для момента: $M = qlESin\alpha$

Но $ql = p$ - электрический момент диполя. Следовательно,

$$M = pESin\alpha, \qquad (21.2)$$

где α - угол между направлениями $\vec{p}$ и $\vec{E}$.

Таким образом, *вращательный момент,* действующий на молекулярный диполь со стороны внешнего поля, зависит *от величины электрического момента диполя, от напряженности поля и от ориентации диполя* в электрическом поле. Формуле (21.2) можно придать векторный вид:

$$\vec{M} = \left[\vec{p}\vec{E}\right] \qquad (21.3)$$

Направление вектора $\vec{M}$ удобно определять по правилу правого буравчика: если правый буравчик поставить перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы $\vec{p}$ и $\vec{E}$, и поворачивать его по кратчайшему пути от $\vec{p}$ к $\vec{E}$, то поступательное движение буравчика укажет направление вектора $\vec{M}$ (механический момент, действующий на диполь, изображенный на рис.51, направлен *перпендикулярно* плоскости чертежа, *за чертеж*).

Из формулы (21.2) видно, что вращательное действие поля отсутствует, если угол между $\vec{p}$ и $\vec{E}$ равен нулю или π (электрический момент диполя либо параллелен, либо антипараллелен вектору $\vec{E}$).

9 В *неоднородном* поле силы, действующие на заряды q_+ и q_- диполя, вообще говоря, *неколлинеарны* (линии действия сил не параллельны), *некомпланарны* (векторы сил не лежат в одной плоскости) *и не равны друг другу* по величине. Однако, если учесть малые размеры диполя, то неколлинеарностью и некомпланарностью векторов сил можно пренебречь и учитывать только то, что они не равны друг другу по величине ($F_+ \neq F_-$). Если поле усиливается в направлении оси x, то $F_+ > F_-$ (рис.52).

Величина результирующей сил F_+ и F_- равна

$$F_x = F_+ - F_- .$$

Но $F_+=qE_2$ и $F_-=qE_1$, где E_1 и E_2 -напряженности поля в тех точках, где находятся заряды q_- и q_+. Тогда $F_x=q(E_1 - E_2)$.

Если смещение зарядов друг относительно друга вдоль направления, проходящего через *оба* заряда равно l, то смещение их вдоль оси X равно $lCos\alpha$ (на чертеже - это расстояние между вертикальными пунктирными линиями). Чтобы найти изменение величины E на некотором отрезке оси X, надо изменение E, приходящееся на *единицу длины* этой оси, т.е. $\frac{\partial E}{\partial x}$, умножить на длину этого отрезка (в нашем случае на $lCos\alpha$):

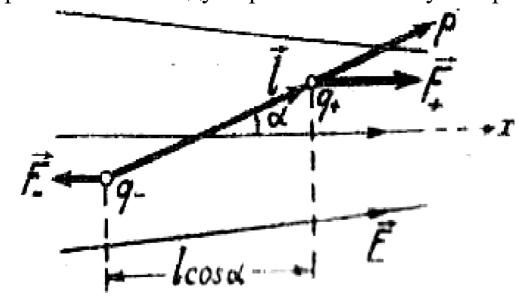


Рис.52

$$E_2 - E_1 = \frac{\partial E}{\partial x} lCos\alpha$$

(здесь взята *частная* производная, так как напряженность может изменяться не только вдоль оси x). Подставим полученное выражение в формулу для силы F_x и учтем, что ql - электрический момент диполя:

$$F_x = p\frac{\partial E}{\partial x}Cos\alpha \qquad (21.4)$$

(заметим, что здесь берется производная по x от модуля вектора $\vec{E}$).

Из формулы (21.4) видно, что *поступательное движение диполя* в направлении оси x *отсутствует*, если: 1) $\frac{\partial E}{\partial x} = 0$ – поле вдоль оси x *не изменяется* и 2) $Cos\alpha = 0$ - диполь *перпендикулярен* полю.

Формулу (21.4) можно переписать в виде:

$$F_x = p_x\frac{\partial E}{\partial x}, \qquad (21.5)$$

где. $p_x = pCos\alpha$ - проекция вектора $\vec{p}$ на ось x. Легко видеть из этой формулы, что сила $\vec{F}_x$ [x)] перемещает диполь в направлении оси x,

---

[x)] F_x - проекция силы $\vec{F}$ на ось x,

$\vec{F}_x$ - составляющая этой силы, действующая вдоль оси x. Связь между ними: $\vec{F}_x = F_x\vec{i}$, где $\vec{i}$ - *единичный* вектор оси x если $p_x > 0$ и $\dfrac{\partial E}{\partial x} > 0$ (или $p_x < 0$ и $\dfrac{\partial E}{\partial x} < 0$);

если же $p_x > 0$, но $\dfrac{\partial E}{\partial x} < 0$ (или $p_x < 0$, но $\dfrac{\partial E}{\partial x} > 0$),

то перемещение происходит в направлении, *противоположном оси x.*

Свободный диполь под действием вращательного момента устанавливается вдоль поля (так что $\vec{P}$ и $\vec{E}$ совпадают). Если поле при этом *неоднородно,* то диполь, кроме того, *втягивается* в область *более сильного поля* (убедитесь в этом сами). Именно этим объясняется притяжение легких предметов к заряженному телу.

10 В заключение отметим, что внешнее электрическое поле практически не влияет на величину электрического момента полярных молекул. Это значит, что силы, связывающие заряды таких молекул, значительно больше сил, действующих на них со стороны внешнего поля. Такие молекулы во внешнем поле практически не деформируются и ведут себя подобно жесткой системе зарядов. Поэтому полярные молекулы часто называют “жесткими" или “твердыми" диполями.

22 КЛАССИФИКАЦИЯ ДИЭЛЕКТРИКОВ. МЕХАНИЗМ ПОЛЯРИЗАЦИИ. ТИПЫ ПОЛЯРИЗАЦИИ

1 Для количественного описания процесса поляризации введены следующие макроскопические характеристики: диэлектрическая восприимчивость *æ*, диэлектрическая проницаемость ε, вектор поляризации $\vec{P}$.

Диэлектрические свойства веществ полностью определяются этими параметрами.

Изучая свойства тех или иных диэлектриков, стремятся установить характер зависимости *æ*, ε и $\vec{P}$ от величины поляризующего поля, от температуры диэлектрика, от частоты изменения внешнего электрического поля и т.д.$(E,\ t^0,\ \nu)$

Опытом установлено, что разные по своему химическому составу диэлектрики могут обладать в значительной мере сходными электрическими свойствами. Это дает возможность произвести классификацию диэлектриков. В основу классификации с макроскопической точки зрения кладется зависимость *æ*, ε и P от температуры T и поляризующего поля E. Эту же классификацию можно обосновать и с атомистической точки зрения, с точки зрения механизма поляризации.

2 К *первой* группе диэлектрических веществ относятся диэлектрики с *неполярными молекулами.*

Диэлектрическая проницаемость ε и восприимчивость æ этих веществ являются константами, не зависящими ни от поляризующего поля, ни от температуры. Вектор поляризации $\vec{P}$ в любых полях пропорционален напряженности поляризующего поля. На рис.53 приведены графики *æ* и *P*.

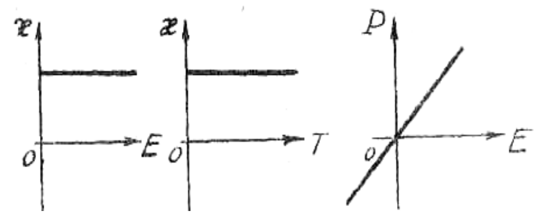


Рис.53

3 С атомистической точки зрения поляризация неполярных диэлектриков и, относящихся к этой же группе веществ, *ионных кристаллов* носит характер *электронного* и ионного смещения (этот тип поляризации так и называется "поляризация электронного и ионного смещения" или "деформационная поляризация").

Внешнее поле смещает электронные оболочки молекул относительно ядер, *деформирует* их, в результате чего *каждая* молекула приобретает дипольный момент.

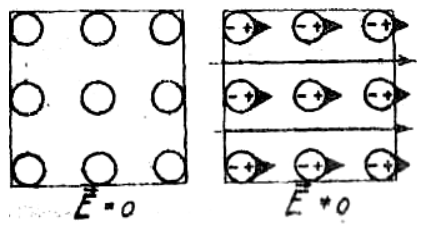


Рис.54

На поверхности диэлектрика, сквозь которую линии внешнего поля "*входят"* в диэлектрик, "выступают" отрицательные поляризационные заряды, в результате чего, такая поверхность заряжается отрицательно. На поверхности же, сквозь которую линии поля "*выходят*" из диэлектрика, "выступают" положительные заряды, в результате чего такая поверхность заряжается положительно (рис.54).

Кристаллическую решетку ионных кристаллов (например, *КСl*, *NaCl)* можно представить состоящей из двух подрешеток - положительной и отрицательной, вставленных одна в другую. Под действием сил поля происходит смещение этих подрешеток.

4 Время установления (время релаксации) поляризации электронного смещения порядка 10^{-15} сек, ионного -10^{-12}-10^{-13} сек. Это значит, что поляризация ионного смещения вплоть до частот изменений поля

$10^{12} \div 10^{13}$ Гц, а поляризация электронного смещения еще выше - вплоть до частот 10^{15} Гц (световые колебания) не зависит от частоты изменений поляризующего поля (поляризация не запаздывает по *времени*).

Время установления поляризации электронного смещения меньше времени релаксации ионного смещения потому, что масса электрона значительно меньше массы ионов.

5 Так как внешнее поле деформирует, смещает электронные оболочки всех без исключения атомов и молекул диэлектрика, то поляризация электронного смещения имеет место во всех диэлектриках.

6 Ко второй группе диэлектрических веществ относятся диэлектрики с полярными молекулами (иногда эти вещества *называют параэлектриками).*

Диэлектрическая восприимчивость и диэлектрическая проницаемость этих веществ *не* зависят *от поляризующего поля,* но зависят от температуры (при повышении температуры $æ$ и ε *уменьшаются*).

Вектор поляризации полярных диэлектриков сначала растет пропорционально *E,* затем рост *P* замедляется и в очень сильных полях (но не при высоких температурах) прекращается вовсе - наступает диэлектрическое *насыщение.*

В диэлектриках, содержащих полярные молекулы, в отсутствие внешнего электрического поля молекулярные диполи ориентированы *беспорядочно,* поэтому электрический момент любого физически малого объема и всего диэлектрика в целом равен *нулю.*

При наличии внешнего поля в полярных диэлектриках на поляризацию электронного смещения накладывается так называемая *ориентационная* или дипольная поляризация.

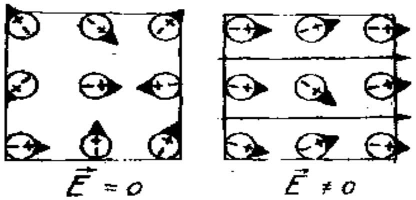


Рис.55

Внешнее поле стремится расположить молекулярные диполи упорядоченно, *вдоль поля,* а тепловое движение нарушает эту ориентацию. По истечении некоторого времени после включения электрического поля наступает динамическое равновесие между этими двумя процессами, в результате чего устанавливается некоторая *преимущественная* ориентация диполей (рис.55). Диэлектрическое насыщение наступает тогда, когда *все* молекулярные *диполи* выстраиваются *вдоль поля.*

Опыт показывает, что восприимчивость, обусловленная ориентационной поляризацией, подчиняется закону Кюри: $æ_{op} = \frac{C}{T}$, где C - константа, зависящая от вещества; T - абсолютная температура. Чем выше температура, тем сильнее дезориентирующее действие теплового движения и тем меньше становятся $æ$ и ε. Время установления ориентационной поляризации довольно велико и сильно зависит от температуры диэлектрика и частоты изменений поля.

Если накладывается быстропеременное поле, то ориентационная поляризация вследствие инерции молекулярных диполей не успевает следовать (во времени) за изменениями поляризующего поля. Происходит резкое уменьшение поляризуемости и, стало быть, ε. На рис.56 приведены графики - $æ_{op} = f(E)$, $æ_{op} = f(T)$, $P = f(E)$ для полярных диэлектриков.

7 К *третьей* группе диэлектрических веществ относятся диэлектрики с особыми электрическими свойствами. Это так называемые *сегнетоэлектрики* или *ферроэлектрики*. Для них характерны следующие особенности.

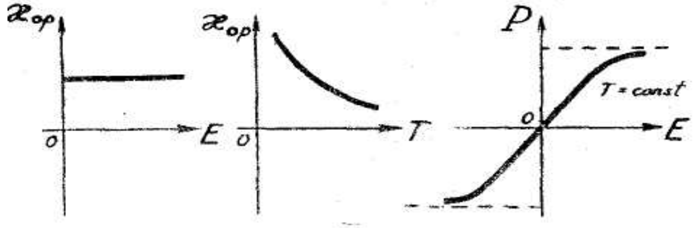


Рис.56

а) Диэлектрическая проницаемость в определенном температурном интервале (для разных сегнетоэлектриков он разный) весьма велика - может достигать десятков тысяч (для сравнения укажем, что ε для диэлек-

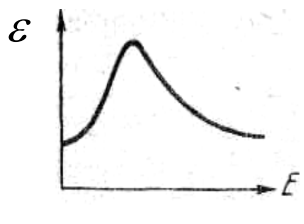


Рис.57

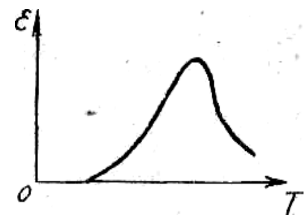


Рис.58

триков первой и второй групп не превышает нескольких десятков).

б) *æ* и ε зависят от *температуры и поляризующего поля* (последняя зависимость имеет место при температурах *ниже* некоторой характеристической, называемой точкой Кюри).

На рис.57 и 58 приведены примерные графики зависимости ε от *E* и *T* для одного из сегнетоэлектриков – титаната бария.

в) Отставание (не по времени) изменений поляризации *P* от изменений поляризующего поля (явление, называемое диэлектрическим гистерезисом).

График *P = f(E)* приведен на рис.59. Первоначально поляризация растет вместе с увеличением поляризующего поля (кривая 1). При некотором значении *E* наступает *насыщение.* При уменьшении величины поля изменение *P* отстает от изменений *E* и следует не первоначальной кривой 1, а кривой 2.

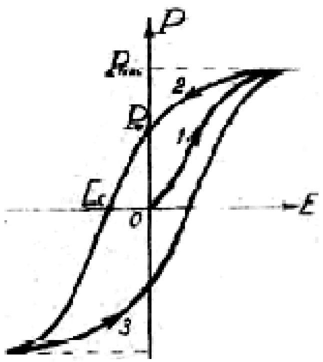


Рис.59

При *E=0* сегнетоэлектрик остается *поляризованным.*

Поляризация P_o, которой сегнетоэлектрик обладает в отсутствие внешнего электрического поля, называется *остаточной.* Чтобы устранить эту поляризацию, необходимо включить поле обратного направления.

Поле E_C *обратного* направления, которое полностью снимает остаточную поляризацию, называется *коэрцитивной силой*. При дальнейшем увеличении этого поля вновь наступает насыщение. В неполяризованное состояние диэлектрик возвращается в соответствии с кривой 3.

При циклическом изменении поля получается петлеобразная кривая, называемая *петлей гистерезиса.*

г) Для каждого из сегнетоэлектриков имеется температура, при которой исчезают его особые свойства. Эта температура называется точкой Кюри или температурой Кюри.

Восприимчивость сегнетоэлектриков при температурах, превышающих температуру Кори, подчиняется *закону Кюри - Вейсса:*

$$æ = \frac{C}{T-\theta}, \qquad (22.2)$$

где *C* - константа вещества; *T*- абсолютная температура;
θ - температура Кюри (по абсолютной шкале).

Наиболее интересными из сегнетоэлектриков являются сегнетова соль (двойная натриево-калиевая соль винной кислоты $NaKC_4H_40_6\ 4H_20)$ и метатитанат бария ($BaTiO_3$).

Электрические свойства сегнетовой соли были впервые исследованы советскими физиками И. В. Курчатовым и П. П. Кобеко. Сегнетова соль имеет две точки Кюри: верхнюю + 22,5°С и нижнюю - 15°С. Диэлектрическая проницаемость в указанном интервале температур достигает 10^4. Особые электрические свойства метатитаната бария открыты и исследованы также советскими физиками Б. М. Вулом и И. М. Гольдманом. Проницаемость метатитаната бария порядка 10^3, температура Кюри 125 °0.

д) Объяснение сегнетоэлектричества.

В сегнетоэлектриках между молекулами существует весьма сильное взаимодействие, благодаря которому наиболее устойчивым и энергетически выгодным оказывается состояние *с параллельной ориентацией молекулярных диполей.*

Области сегнетоэлектрика, в которых электрические моменты молекулярных диполей параллельны, называются *доменами.*

В пределах каждого домена диэлектрик поляризован до *насыщения.*

Области самопроизвольной (спонтанной) поляризации сравнительно невелики. Это объясняется рядом причин:

1 Если бы сегнетоэлектрик состоял из одного только домена, то даже в отсутствие внешнего электрического поля он обладал бы огромным электрическим моментом и сам создавал бы в окружающем пространстве очень сильное собственное поле. Такой сегнетоэлектрик обладал бы большой энергией. Энергия, затрачиваемая на создание собственного электрического поля, существенно уменьшится, если вместо одного домена образуется два или четыре домена, поляризованных так, как это показано на рис.60 стрелками.

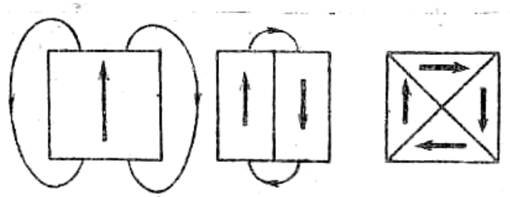


Рис.60

2 На границе между двумя соседними доменами происходит «разворот» молекулярных диполей от одной ориентации к другой. При повороте диполя во внешнем электрическом поле совершается *работа.* Образование *границ доменов* также связано с затратами вполне определенной энергии.

3 Наконец, энергия двух доменов одинакового объема, поляризованных в *разных* кристаллографических направлениях, оказывается *различной.* Эта разница в энергиях называется энергией *анизотропии.*

В отсутствие поляризующего поля размеры доменов и их форма определяются минимумом энергии, затрачиваемой на создание собственного поля, энергии границ и энергии анизотропии. При этом сегнетоэлектрик разбивается на домены таким образом, что его результирующий электрический момент практически равен нулю (рис.61,а).

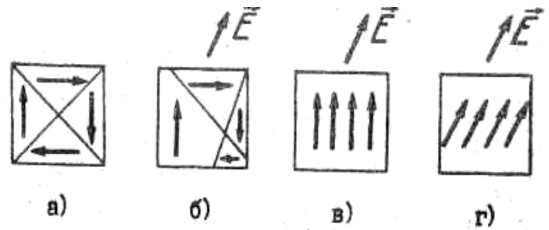


Рис.61

При наличии внешнего электрического поля энергия отдельных доменов оказывается неодинаковой: она меньше у тех доменов, в которых вектор поляризации образует с направлением поля острый угол, и больше у тех, у которых этот угол тупой.

Действие поля на домены первоначально проявляется в *смещении границ* между доменами, причем это смещение происходят так, что объем доменов с благоприятной ориентацией вектора $\vec{P}$ (с меньшей энергией) *увеличивается* за счет поглощения тех доменов, которые ориентированы неблагоприятно (рис.61,б). Начальное смещение границ (в слабых полях) носит обратимый характер, поэтому поляризация точно следует за изменениями поляризующего поля (рис.62, участок *OA)*. При дальнейшем увеличении поля смещение границ доменов делается *необратимым* (рис.62, участок *AB*). Наконец, границы исчезают вовсе (рис.61,в). При дальнейшем увеличении поля происходит *поворот* (вслед за полем) электрических моментов доменов (рис.62, участок *BC),* которые, в конце концов, при некотором значении напряженности устанавливаются *параллельно* полю (рис.61, г). Сегнетоэлектрик превращается в один гигантский домен, поляризованный до насыщения (рис.62, состояние *C)* .

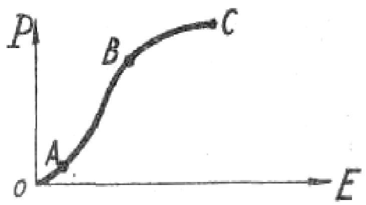


Рис.62

При уменьшении электрического поля кривая *P(E)* не идет “к нулю” по первоначальной кривой, так как *смещение границ некоторых доменов оказывается необратимым.*

23 ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ. ЭЛЕКТРОСТРИКЦИЯ. ЭЛЕКТРЕТЫ

1 *Прямым пьезоэлектрическим* эффектом называется поляризация диэлектриков, обусловленная их *механической* деформацией.

Пьезоэлектрический эффект наблюдается у кварца, сегнетовой соли, метатитаната бария, турмалина.

Качественное объяснение пьезоэлектрического эффекта заключается в следующем. Пространственную решетку любого кристалла можно представить состоящей из двух или нескольких простых решеток. При механической деформации происходит сдвиг этих решеток, в результате чего диэлектрик поляризуется.

2 Из энергетических соображений можно предсказать обратный пьезоэлектрический эффект. Обратный пьезоэлектрический эффект заключается в том, что при поляризации диэлектриков имеют место механические деформации.

Силы электрического поля вызывают смещение простых решеток, в результате чего изменяются линейные размеры кристалла.

3 Во всех без исключения диэлектриках имеет место *электрострикция* - увеличение или уменьшение одних размеров диэлектрика за счет уменьшения или увеличения других.

Может показаться, на первый взгляд, что обратный пьезоэффект и электрострикция - это одно и то же. На самом деле это не так.

Пьезоэффект наблюдается только *у некоторых* диэлектриков, *электрострикция - у всех*. Обратный пьезоэффект обусловлен смещением простых решеток в целом, электрострикция же объясняется действием поля на отдельные молекулярные диполи.

Деформация при обратном пьезоэффекте зависит от поля по линейному закону и при изменении направления поля изменяет свой знак (это значит, что растяжение переходит в сжатие, если направление поля изменяется на противоположное). Деформация же, обусловленная электрострикцией, зависит от поля по квадратичному закону и не изменяет своего знака при изменении направления поля.

4 Существуют диэлектрики, которые, будучи однажды поляризованы, сохраняют приобретенную поляризацию. Такие диэлектрики называются электретами.

24 ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ И ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ДИЭЛЕКТРИКОВ

1 Изучение электрических свойств диэлектриков имеет важное теоретическое значение. Знание дипольных моментов молекул различных веществ помогает установлению структурных формул молекул и выясне-

нию типа связей между атомами и группами атомов в молекулах (каждому типу связи соответствует определенное значение дипольного момента).

2 Диэлектрики широко используются в электро- и радиотехнике как изоляционные материалы и диэлектрические заполнители конденсаторов.

3 Широкое практическое применение получили, прямой и обратный пьезоэлектрический эффект. Прямой пьезоэлектрический эффект используется, например, в пьезоэлектрических звукоснимателях и микрофонах. Обратный пьезоэффект - в генераторах ультразвука.

4 Высокое постоянство частоты собственных колебаний кварца используется для стабилизации частоты электромагнитных колебаний, что имеет огромное значение в радиотехнике. Генераторы с кварцевыми стабилизаторами представляют, в сущности, очень точные часы (о точности пьезокварцевых часов можно судить хотя бы по тому, что только с их помощью удалось установить неравномерность вращения Земли вокруг своей оси).

В ряде приборов используется зависимость диэлектрической проницаемости сегнетоэлектриков от приложенного напряжения, например, в варикондах - конденсаторах с нелинейными характеристиками.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1 В чем состоит различие между неполярными и полярными молекулами?

2 В чем проявляется действие внешнего электрического поля на неполярные молекулы?

3 Как действует однородное электрическое поле на полярные молекулы?

4 В чем проявляется действие неоднородного электрического поля на полярные молекулы?

5 Каков механизм поляризации неполярных диэлектриков?

6 Каков механизм поляризации полярных диэлектриков?

7 Каков механизм поляризации сегнетоэлектриков?

8 Объясните, почему восприимчивость полярных диэлектриков зависит от температуры.

9 Какие вещества называются сегнетоэлектриками? Опишите особые свойства сегнетоэлектриков.

10 В чем состоит диэлектрический гистерезис? Что такое остаточная поляризация и коэрцитивная сила?

11 В чем заключается прямой и обратный пьезоэлектрический эффект?

12 Что такое электрострикция?

ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Твердые тела, внесенные в электростатическое поле, частично или полностью “разрушают” поле в тех областях пространства, которые они сами занимают, и в значительной мере “деформируют” поле во всем остальном пространстве.

Наша очередная задача - рассмотреть, каково влияние проводников, на свойства электростатического поля.

25 РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАРЯДОВ НА ПРОВОДНИКЕ

1 Заряды, сообщенные проводнику, могут находиться в состоянии статического равновесия только в том случае, если электрическое поле внутри проводника отсутствует.

2 Отсутствие электрического поля в проводнике означает, что напряженность и индукция во всех точках внутри проводника равны нулю:

$$\vec{E} = 0\,, \quad \vec{D} = 0 \qquad (25.1)$$

Докажем, что при этом потенциал во всех точках проводника как внутри, так и на поверхности одинаков (но не равен нулю!).

Из связи потенциала с напряженностью следует, что $-d\varphi = E_x dx$, где x- направление, проходящее через две произвольные точки A и B, одна из которых находится внутри проводника, другая на поверхности (рис.63). Так как поле внутри проводника отсутствует

$$(\vec{E} = 0 \text{ и } E_x = 0), \text{ то } -d\varphi = 0 \text{ и } \varphi = const\,.$$

Следовательно, $\varphi_A = \varphi_B \neq 0$ (25.2)

(так как потенциал точки B не равен нулю). В условиях равновесия зарядов и поверхность, и объем проводника являются эквипотенциальными.

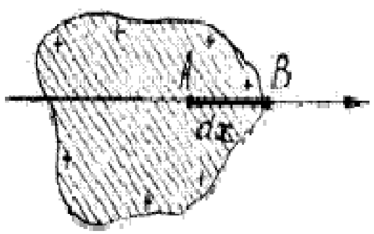


Рис.63

3 В любой точке поверхности проводника вектор напряженности перпендикулярен к поверхности, так что

$$|E_n| = E \qquad (25.3)$$

$$E_\tau = 0 \qquad (25.4)$$

E_n - проекция вектора $\vec{E}$ на направление нормали к поверхности проводника; E_τ - проекция вектора $\vec{E}$ на направление касательной к поверхности проводника.

ОБЪЯСНЕНИЕ. Если бы поле вне проводника не было перпендикулярно к поверхности проводника, т.е. если бы касательная составляющая вектора напряженности не была равна нулю, то это вызвало бы движение зарядов по поверхности проводника и, следовательно, равновесие зарядов было бы нарушено.

Так как в изотропной среде направления $\vec{E}$ и $\vec{D}$ совпадают. ($\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$), вектор $\vec{D}$ в любой точке поверхности проводника так же перпендикулярен к поверхности проводника:

$$|D_n| = D \tag{25.5}$$

$$D_\tau = 0 \tag{25.6}$$

4 Избыточные свободные заряды в состоянии равновесия могут находиться только на внешней поверхности проводника. Это вытекает из следующих соображений.

Так как одноименные заряды отталкиваются, то они стремятся удалиться на максимальное расстояние друг от друга.

Поскольку во всех точках внутри проводника $D = 0$, то поток индукции сквозь любую замкнутую поверхность, находящуюся внутри проводника, также равен нулю, Из теоремы Гаусса следует, что если поток индукции сквозь какую либо замкнутую поверхность равен нулю, то внутри этой поверхности нет свободных зарядов (по теореме $N = q$; если $N = 0$, то и $q=0$). Следовательно, при равновесии нигде внутри проводника не может быть нескомпенсированных свободных зарядов.

5 Можно доказать теоретически и убедиться на опыте, что поверхностная плотность зарядов в отдельных точках проводника тем больше, чем больше кривизна поверхности проводника. Покажем это на одном частном примере.

Пусть два достаточно удаленных друг от друга проводящих шара радиусами r_1 и r_2 соединены тонким проводом. Если сообщить одному из шаров некоторый заряд, то он “растечется” по внешней поверхности шаров и соединительного провода так, что потенциалы шаров окажутся одинаковыми:

$$\varphi_1 = \varphi_2 \tag{25.7}$$

Так как шары достаточно удалены друг от друга и так как полем провода можно пренебречь, потенциалы шаров можно вычислить по формуле (14.8).

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1}, \qquad \varphi_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_2},$$

где q_1 и q_2 - заряды шаров.

Выразим q_1 и q_2 через поверхностную плотность σ_1 и σ_2

$$q_1 = \sigma_1 4\pi r_1^2; \qquad q_2 = \sigma_2 4\pi r_2^2.$$

Тогда

$$\varphi_1 = \frac{4\pi r_1^2 \sigma_1}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r_1} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0 \varepsilon} r_1 \quad \text{и} \quad \varphi_2 = \frac{4\pi r_2^2 \sigma_2}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r_2} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0 \varepsilon} r_2$$

Учитывая, что $\varphi_1 = \varphi_2$, получим

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{r_2}{r_1} \tag{25.8}$$

Величина, обратная радиусу шара, называется кривизной его поверхности:

$k = \dfrac{1}{r}$. Следовательно, $$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{k_1}{k_2} \tag{25.9}$$

Таким образом, если два заряженных шара соединены проводником (т.е. образуют единый проводник), то поверхностная плотность зарядов будет больше на том из шаров, кривизна которого больше (меньше радиус).

В случае проводника произвольной формы каждый малый элемент его поверхности можно рассматривать как участок сферической поверхности определенной кривизны. Только что полученный вывод можно в первом приближении распространить и на проводник с неодинаковой кривизной.

6 Найдем, как связана напряженность поля вблизи поверхности заряженного проводника произвольной формы с поверхностной плотностью зарядов, сосредоточенных на нем. Воспользуемся теоремой Гаусса. Из условий равновесия зарядов следует, что линии $\vec{D}$ начинаются (или обрываются) на поверхности проводника и всюду перпендикулярны к ней (рис.64).

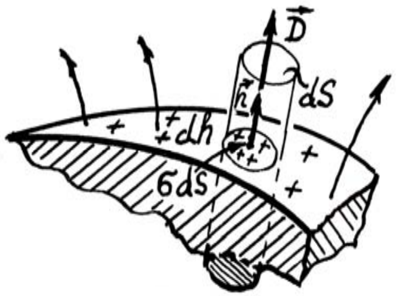


Рис.64

В качестве вспомогательной поверхности разумно выбрать прямой цилиндр бесконечно малой высоты dh и с бесконечно малыми основаниями dS.

Легко видеть, что поток вектора $\vec{D}$ отличен от нуля только через верхнее основание: $dN = DdS$

Внутрь вспомогательного цилиндра попадает заряд $dq = \sigma dS$ По теореме Гаусса $dN = dq$..

Следовательно, $DdS = \sigma dS$,

откуда $$D = \sigma \quad \text{и} \quad E = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} \qquad (25.10)$$

Напряженность электрического поля в точках, бесконечно близких к заряженному проводнику, тем больше, чем больше поверхностная плотность зарядов.

7 Так как поверхностная плотность зарядов больше там, где больше кривизна поверхности проводника, напряженность поля оказывается наибольшей вблизи краев и острых выступов проводника. Электрическое поле вблизи таких мест может быть столь сильным, что оказывается способным ионизировать молекулы воздуха. Возникает явление, называемое стеканием зарядов с проводника. В общих чертах оно заключается в следующем. Образующиеся в процессе ионизации ионы под действием поля приходят в движение: ионы того же знака, что и заряд острия, перемещаются от острия, ионы противоположного знака - к острию (рис.65). Первые при своем движении увлекают нейтральные молекулы воздуха, в результате чего возникает его заметное движение - своеобразный "электрический ветер". Вторые, подойдя к острию, частично нейтрализуют его заряд, чем уменьшают напряженность поля вблизи острия.

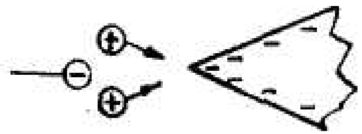


Рис.65

8 На явлении стекания зарядов основано действие молниеотвода. Сверхвысокие электрические поля, окружающие тончайшие заряженные проволоки или острые выступы заряженных проводников получили применение в ряде приборов (струнный электрометр, катушка Румкорфа, счетчик Гейгера, ионный микроскоп и др.).

9 Так как индуцированные заряды располагаются только на внешней поверхности проводника, то наличие в нем каких-либо внутренних полостей никак не влияет на характер распределения этих зарядов. Равновесное распределение зарядов на полом проводнике будет точно таким же, как и на сплошном (при условии, разумеется, что форма сплошного проводника точно такая же как и полого).

10 Свойство избыточных зарядов распределяться только по внешней поверхности проводника нашло практическое применение. Чтобы заряд, сосредоточенный на проводнике *A*, полностью передать проводнику *B*, последнему следует придать форму почти замкнутой полости. Если проводник *A* ввести внутрь этой полости и коснуться ее поверхности, то весь заряд с проводника *A* перейдет на внешнюю поверхность проводника *B* (с момента соприкосновения проводников образуется еди-

ный проводник, внутри которого не может быть избыточных зарядов: все они переходят на внешнюю поверхность).

26 ЯВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

1 При внесении незаряженного проводника во внешнее электрческое поле в нем происходит особый процесс, называемый электростатической индукцией. Это явление заключается в том, что свободные заряды в проводнике под действием поля приходят в движение: положительные - в направлении поля, отрицательные - против поля. В результате на поверхности (и только на поверхности!) проводника появляются нескомпенсированные свободные заряды. Эти заряды называются *наведенными* или *индуцированными*.

Индуцированные заряды создают внутри проводника свое собственное поле, противоположное по направлению внешнему полю. Разделение зарядов в проводнике, возрастание поверхностной плотности индуцированных зарядов происходит до тех пор, пока электрическое поле в проводнике не исчезнет вовсе, т.е. пока не будут выполнены условия равновесия (25.1) - (25.4). И это имеет место при любых напряженностях внешнего поля! Индуцированные заряды всегда полностью компенсируют внешнее поле внутри проводника. Проводники, образно говоря, «разрушают», «уничтожают» электростатическое поле в той области пространства, которую они сами занимают (вспомним, что поляризационные заряды компенсируют внешнее поле в диэлектриках лишь частично).

2 Индуцированные заряды, в отличие от поляризационных, могут быть сняты с проводника, например, в результате заземления.

На рис.66 показаны стадии такого «снятия»:

а) индуцирующий заряд q (заряд, создающий внешнее поле) вызвал разделение зарядов в проводнике *Б*;

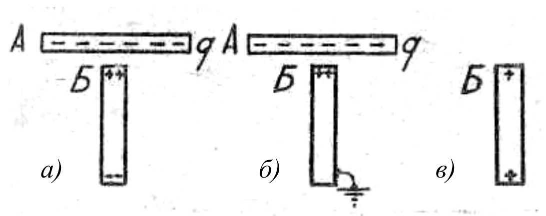


Рис.66

б) проводник *Б* «заземлили», отрицательные заряды ушли в «землю»;

в) заряд q удален; оставшийся на проводнике положительный заряд распределяется по его поверхности в соответствии с условиями равновесия. Заметим, однако, что снять с проводника оба индуцированные заряда (т.е. и положительный и отрицательный) одновременно невозможно. Отвести в землю можно лишь тот заряд, знак которого совпадает со знаком индуцирующего заряда. Заряд противоположного знака удерживается на проводнике взаимодействием с индуцирующим зарядом.

3 Индуцированные заряды, в отличие от поляризационных, могут быть отделены друг от друга. Для этого достаточно в присутствии индуцирующего заряда разъединить разноименно заряженные части проводника. На рис.67 показаны стадии этого разъединения:

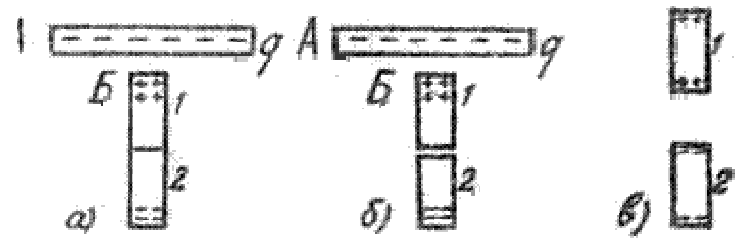


Рис.67

а) разделение зарядов в проводнике *Б* завершилось, при этом части проводника *Б* плотно прижаты друг к другу;

б) в присутствии влияющего заряда *q* заряженные части проводника *Б* слегка раздвинуты;

в) заряд *q* удален; части 1 и 2 раздвинуты на большое расстояние. Заряды на проводниках 1 и 2 растекаются по поверхности в соответствии с условиями равновесия. Если эти разноименно заряженные проводники снова соединить, но уже в отсутствие наводящего заряда, то электризация проводника исчезнет полностью и он окажется вновь незаряженным. Это свидетельствует о том, что при электризации через влияние заряды не “создаются", а только перераспределяются.

4 Поляризованное состояние диэлектрика при определенных условиях может быть сохранено и в отсутствие внешнего электрического поля (электреты). Электризация проводников, обусловленная электростатической индукцией, в отсутствие внешнего поля не может быть сохранена (имеется в виду одновременное раздельное существование на проводнике положительных и отрицательных индуцированных зарядов).

5 Индуцированные заряды искажают то поле, которое существовало в пространстве в их отсутствие. Это искажение обусловлено двумя причинами.

1) Индуцированные заряды вызывают перераспределение зарядов, создающих внешнее поле.

2) Индуцированные заряды создают свое собственное поле, которое, накладывается на внешнее поле, деформирует его.

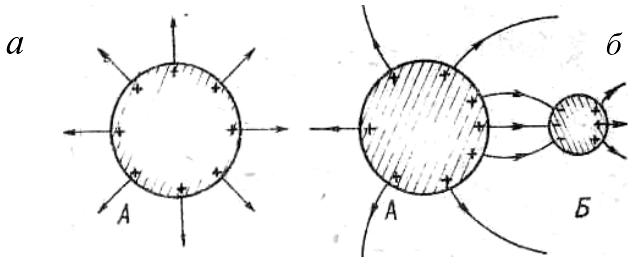


Рис.68

На рис.68 показано, какими были линии поля заряженного проводящего шара *А* до (*а*) и после (*б*) внесения в это поле незаряженного проводника *Б*.

6 Проводник, внесенный в электрическое поле, не вызывает перераспределения зарядов, создающих это поле, не искажает это поле, если он заполняет всю область между какими-либо двумя эквипотенциальными поверхностями. В этом случае поля, созданные индуцированными зарядами противоположных знаков, во внешнем пространстве компенсируют друг друга, в результате внешнее поле не искажается, заряды, создающие это поле, не перераспределяются.

На рис.69 сплошные линии изображают линии однородного поля. Пунктиры изображают эквипотенциальные поверхности. Если внести в это поле большую плоскопараллельную металлическую пластину, то заряды, индуцируемые на ее поверхностях, образуют две параллельные разноименно заряженные плоскости с одинаковой по величине поверхностной плотностью зарядов $\left|\ \sigma''_{+}\ \right| = \left|\ \sigma''_{-}\ \right|$. Как известно, поле такой системы зарядов во внешнем пространстве равно нулю.

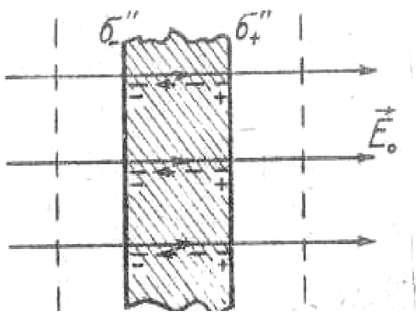


Рис.69

7 Электрическое поле внутри проводника отсутствует независимо от того, сплошной этот проводник или полый («разрушают» поле в проводни-

ке индуцированные заряды, а они, как мы выяснили, расположены на внешней поверхности).

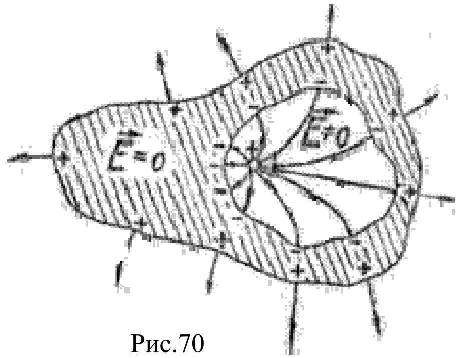


Рис.70

Отсутствие поля в полых проводниках используют для электростатической защиты.

Чтобы оградить чувствительные к внешним полям приборы, схемы, участки цепей и т.д., их *экранируют*, т.е. помещают внутрь тонких полых замкнутых проводников, которые, как правило, заземляют. При этом вместо сплошных экранов можно использовать негустую проволочную сетку.

Заметим, что замкнутый полый проводник защищает от действия только тех полей, которые созданы внешними зарядами.

Если нескомпенсированные заряды имеются *внутри* полости, то поле в ней отлично от нуля (рис.70).

26 СВЯЗЬ МЕЖДУ ЗАРЯДОМ И ПОТЕНЦИАЛОМ УЕДИНЕННОГО ПРОВОДНИКА. ЭЛЕКТРОЕМКОСТЬ

1 Как показывает теоретический расчет и подтверждает опыт, потенциал уединенного[x)] проводника зависит:

а) от заряда, сосредоточенного на проводнике;

б) от диэлектрической проницаемости среды, в которой находится проводник;

в) от „геометрии" проводника - его размеров и формы.

2 Характер распределения заряда на проводнике определяется исключительно формой проводника и не зависит от величины заряда. Последнее означает, что каждая новая порция зарядов распределяется так же, как и предыдущая: если общий заряд проводника увеличился в *n* раз, то во столько же раз возрастает в каждой точке поверхности проводника и плотность зарядов σ.

- -

x) Теоретически уединённый проводник-это проводник, удалённый от других тел на бесконечно большое расстояние. Практически проводник можно считать уединённым, если сообщаемый ему заряд не вызывает сколько-нибудь заметного смещения зарядов в ближайших к проводнику телах.

Потенциал поля в любой точке наблюдения, в том числе и в точке на поверхности проводника, согласно принципу суперпозиции равен

$$\varphi = \int d\varphi = \int_s \frac{\sigma dS}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}, \qquad (27.1)$$

где σ – поверхностная плотность зарядов на площадке dS; r – расстояние от площадки dS до точки наблюдения; S – площадь внешней поверхности проводника.

Из этой формулы видно, что если поверхностная плотность зарядов в каждой точке проводника увеличится в некоторое число раз, то во столько же раз увеличится потенциал любой точки поля, и, стало быть, потенциал самого проводника. Мы обнаруживаем, таким образом, что потенциал уединенного проводника пропорционален сосредоточенному на проводнике заряду.

3 Отношение заряда проводника к его потенциалу для данного проводника есть величина постоянная, не зависящая ни от заряда, ни от потенциала. Следовательно, эта величина может служить характеристикой проводника. Она называется *электроемкостью* или просто *емкостью проводника.*

Электроемкость проводника – скалярная физическая величина, характеризующая связь между зарядом проводника и его потенциалом и численно равная заряду, который необходимо сообщить незаряженному проводнику, чтобы потенциал проводника стал равным единице:

$$C = \frac{q}{\varphi}. \qquad (27.2)$$

ПРИМЕЧАНИЕ. Здесь предполагается, что потенциал проводника отсчитывается относительно точек, в которых поле, созданное зарядом проводника, равно нулю, т.е. относительно бесконечности.

Ограничения в выборе нулевого уровня потенциала снимаются (потенциал проводника можно отсчитывать относительно любой точки пространства), если оценивать изменение потенциала проводника, обусловленное изменением заряда проводника.

В этом случае $C = \dfrac{\Delta q}{\Delta\varphi}$ *или* $C = \dfrac{dq}{d\varphi}$, (27.3)

где $\Delta\varphi$ *и* $d\varphi$ *- изменения потенциала, соответствующие изменениям заряда проводника на конечную (*Δq*) и бесконечно малую (*dq*) величину. В этом случае электроемкость проводника численно равна количеству электричества, на которое нужно изменить заряд проводника, (уменьшить или увеличить), чтобы потенциал проводника изменился на единицу: если* $|\Delta\varphi| = 1$, *то* $|C| = |\Delta q|$.

Определения (27.2) и (27.3) равноправны и не приводят к различию численного значения емкости рассматриваемого проводника.

4 Электроемкость уединенного проводника, погруженного в безграничную изотропную среду, зависит только от диэлектрической проницаемости среды и геометрических факторов – формы внешней поверхности проводника и его линейных размеров.

5 Емкость не зависит от материала проводника, его температуры и агрегатного состояния, от размеров и формы внутренних замкнутых полостей. Емкость уединенного проводника не зависит также от заряда и потенциала проводника (нельзя, следовательно, формулу $C=\dfrac{q}{\varphi}$ читать:«емкость прямо пропорциональна заряду проводника и обратно пропорциональна его потенциалу»!)

6 Расчет емкости уединенных проводников сводится, в конечном счете, к расчету их потенциалов.

Рассмотрим в качестве примера расчет емкости уединенного шара. Предположим, что шару сообщили заряд q. Этот заряд создаст в окружающем пространстве электрическое поле, напряженность которого в произвольной точке равна $E=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}$,

а на поверхности шара $E_0=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 {r_0}^2}$ ((r_0 – радиус шара). Для расчета потенциала шара воспользуемся связью потенциала с напряженностью, т.е. $-d\varphi=Edr$.

Тогда

$$\varphi=\int\limits_{r_0}^{\infty} Edr=\int\limits_{r_0}^{\infty}\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_{r_0}^{\infty}=\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_0}. \qquad (27.4)$$

Разделив заряд шара q на его потенциал φ, получим формулу емкости уединенного шара:

$$C=\frac{q}{\varphi}=4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_{0.} \qquad (27.5)$$

Емкость уединенного шара, погруженного в изотропный безграничный диэлектрик, зависит только от радиуса шара и от диэлектрической проницаемости среды.

7 Из формулы $C=\dfrac{q}{\varphi}$. устанавливаются единицы измерения емкости.

Единица емкости в системе СИ называется Фарад (Ф).

Фарад – это емкость такого уединенного проводника, потенциал которого изменяется на 1 вольт при изменении заряда на 1 кулон:

$$1Ф = \frac{1Кл}{1В}$$

Подставив в формулу (27.5) единицы C (фарад) и r_0 (метр), найдем, что единицей электрической постоянной ε_0 в системе СИ является «фарад на метр» $\left(\frac{Ф}{м}\right)$, убедитесь в том, что $\frac{Ф}{м}$ и $\frac{Нм^2}{Кл^2}$ - одно и то же.

Фарад – весьма крупная единица емкости. Чтобы составить представление о величине этой единицы, найдем радиус шара, который, находясь в вакууме ($\varepsilon = 1$) обладал бы емкостью в 1 фарад.

Из (27.5) получаем:

$$r_0 = \frac{C}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{1Ф}{4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\,\frac{Ф}{м}} = 9\cdot 10^9\ м$$

Емкостью в один фарад обладал бы уединенный проводящий шар радиусом 9 млн.км! (Емкость Земного шара всего лишь 7,1.10^{-4} Ф).

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1 Как распределяются заряды, сообщенные проводнику?
2 Сформулируйте условия равновесия зарядов на проводнике.
3 Чему равна напряженность электрического поля вблизи поверхности заряженного проводника?
4 В чем заключается явление электростатической индукции и каково его принципиальное отличие от явления поляризации ?
5 Чему равны напряженность и потенциал внутри проводника, внесенного в электростатическое поле ?
6 Что называется электроемкостью проводника ? От каких факторов зависит электроемкость ?
7 Дайте определение единицы измерения электроемкости в системе СИ.

КОНДЕНСАТОРЫ. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

28 КОНДЕНСАТОР

1 Уединенные проводники обычных размеров обладают ничтожно малой емкостью и поэтому не способны накапливать сколько-нибудь заметные статические заряды.

Между тем на практике бывает потребность в устройствах, которые при относительно небольших собственных размерах накапливали бы *значительные* по величине *заряды при невысоких потенциалах* (без таких устройств, называемых *конденсаторами,*[x)] не обходится, например, ни одна радиосхема).

2 Чтобы понять, что положено в основу устройства конденсаторов, рассмотрим, как влияют на электроемкость проводника окружающие его тела.

Если вблизи данного проводника оказываются какие-либо другие тела, то при сообщении проводнику заряда на этих телах появляются (вследствие индукции или поляризации) индуцированные или связанные заряды, причем ближайшие к наводящему заряду q оказываются заряды противоположного знака (рис.71). Эти заряды ослабляют поле, созданное зарядом q, в том месте, где находится проводник.

В результате потенциал проводника при наличии других тел оказывается меньше того потенциала, которым обладал бы этот проводник (при том же заряде), будучи уединенным. Емкость проводника увеличивается (это видно из формулы $C = \dfrac{q}{\varphi}$).

Рис.71

Располагая соответствующим образом проводники и заполняя пространство между ними диэлектриками с большой диэлектрической проницаемостью и высокой электрической прочностью, можно получить конденсаторы достаточно большой емкости при сравнительно небольших собственных размерах проводников

3 Обычно конденсаторы делают в виде двух близко расположенных проводников, разделенных прослойкой из диэлектрика. Проводники, образующие конденсатор, называются обкладками конденсатора. Чтобы окружающие тела не оказывали влияния на емкость конденсатора, нуж-

----

От лат. condensare - сгущать, накапливать.

но, чтобы электрическое поле, созданное зарядами обкладок, было локализовано только между обкладками. Для этого обкладкам придают определенную форму, определенным образом располагают их друг относительно друга и соответствующим образом заряжают.

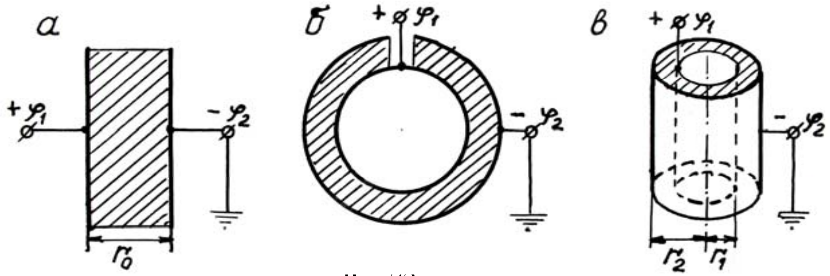


Рис.72

Если обкладкам придать форму двух близко расположенных пластин, двух концентрических сфер или двух коаксиальных цилиндров и зарядить их равными по величине, но противоположными по знаку зарядами, то электрическое поле действительно будет сосредоточено только внутри конденсатора (линии индукции будут начинаться и обрываться на обкладках).

В зависимости от формы обкладок различают плоские, сферические и цилиндрические конденсаторы (рис.72).

Заряд одной из обкладок называют *зарядом конденсатора*.

4 *Емкостью конденсатора называется величина, характеризующая связь между зарядом конденсатора и разностью потенциалов на его обкладках и численно равная заряду, который нужно сообщить конденсатору, чтобы изменить разность потенциалов между обкладками на единицу:*

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} \qquad (28.1)$$

5 Емкость конденсатора зависит от *формы, размеров* и взаимного *расположения* обкладок, а также от *проницаемости* ε диэлектрика, заполняющего пространство между ними. При зарядке одна из обкладок обычно заземляется. Если незаземленной обкладке сообщается заряд q_+, то на заземленной обкладке автоматически появляется заряд q_-, равный по величине q_+ (объясните, почему).

29 РАСЧЕТ ЕМКОСТИ ПРОСТЕЙШИХ КОНДЕНСАТОРОВ

1 Расчет емкости конденсаторов осуществляется по той же схеме, что и расчет емкости уединенного проводника. Конденсатору мысленно сообщают некоторый заряд q. Зная, как распределится этот заряд, рассчитывают разность потенциалов между обкладками. Разделив в соответствии с формулой (28.1) заряд, на разность потенциалов, находят емкость.

2 Рассмотрим ряд простейших примеров.

а) Рассчитаем емкость плоского конденсатора (рис.72,*а*).

Пусть S - площадь одной из его пластин, r_0 - расстояние между пластинами, ε - проницаемость диэлектрика (нужно, чтобы диэлектрик был однородным, изотропным и заполнял зазор между пластинами полностью). Обозначим потенциалы обкладок соответственно через φ_1 и φ_2. В соответствии с (28.1) $C = \dfrac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}$

В § 16 было найдено, что разность потенциалов между двумя параллельными бесконечными плоскостями равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} r_0, \qquad (29.1)$$

где σ - поверхностная плотность зарядов; r_0 - расстояние между плоскостями.

Если расстояние между пластинами плоского конденсатора мало по сравнению с линейными размерами пластин, то искажением поля вблизи краев пластин можно пренебречь и находить разность потенциалов по той же формуле, что и в случае бесконечных пластин.

Если заряд обкладки q, а ее площадь S, то поверхностная плотность зарядов равна $\sigma = \dfrac{q}{S}$, тогда $\varphi_1 - \varphi_2 = \dfrac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon S} r_0$.

Разделив q на выражение для $\varphi_1 - \varphi_2$, получим формулу емкости плоского конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{r_0} \qquad (29.2)$$

Емкость плоского конденсатора зависит от площади обкладок, расстояния между обкладками и диэлектрической проницаемости диэлектрика.

б) Найдем емкость сферического конденсатора (рис.72,*б*).

Пусть r_1 - радиус внутренней обкладки, r_2 - радиус внешней обкладки.

Согласно (16.16) разность потенциалов между двумя концентрическими сферами, равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q(r_2 - r_1)}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1 r_2} \qquad (29.3)$$

где q - заряд внутренней сферы. Разделив заряд q на разность потенциалов, получим выражение для емкости сферического конденсатора

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1 r_2}{r_2 - r_1} \qquad (29.4)$$

Емкость сферического конденсатора зависит от радиусов внутренней и внешней обкладок (она тем больше, чем больше радиусы обкладок и чем меньше зазор между ними) и от электрических свойств диэлектрика.

Преобразуем формулу (29.4), разделив числитель и знаменатель на r_2

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1}{1 - \frac{r_1}{r_2}}$$

При $r_2 = \infty$ (практически при $r_2 \gg r_1$)

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1 \qquad (29.5)$$

т.е. внутреннюю обкладку в этом случае можно рассматривать как уединенный шар.

Из сопоставления формул (29.4) и (29.5) видно, что при любом конечном значении r_2 емкость сферического конденсатора больше емкости уединенного шара радиуса r_1 (r_1 - радиус внутренней обкладки конденсатора). В самом деле, емкость конденсатора $C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1 \dfrac{r_2}{r_2 - r_1}$

емкость уединенного шара $C_ш = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1$. Дробь $\dfrac{r_2}{r_2 - r_1}$ всегда больше единицы, следовательно, $C > C_ш$.

Если ширина зазора между обкладками сферического конденсатора значительно меньше радиусов обкладок, то его емкость можно приближенно рассчитывать по формуле, полученной для плоского конденсатора (29.2), понимая под S площадь одной из обкладок (безразлично какой - внутренней или внешней), а под r_0 – ширину зазора между обкладками.

в) Вычислим емкость цилиндрического конденсатора (рис.72,*в*). Пусть радиусы внутреннего и внешнего цилиндров равны соответственно r_1 и r_2 , высота конденсатора *h,* проницаемость диэлектрика ε .

В § 16 было найдено, что разность потенциалов между двумя коаксиальными цилиндрами бесконечной длины равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma r_1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \ln \frac{r_2}{r_1}, \qquad (29.6)$$

где σ - заряд, приходящийся на единицу поверхности внутреннего цилиндра.

Если зазор между обкладками цилиндрического конденсатора мал, разность потенциалов между ними можно найти по формуле (29.6). Полный заряд конденсатора найдем, умножив поверхностную плотность зарядов σ на площадь $2\pi r_1 h$: $q = \sigma 2\pi r_1 h$

Тогда $\varphi_1 - \varphi_2 = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon h} \ln \dfrac{r_2}{r_1}$. Подставим $\varphi_1 - \varphi_2$ в определяющее уравнение для емкости, получим:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon h}{\ln \dfrac{r_2}{r_1}} \qquad (29.7)$$

5 Отметим в заключение, что каждый конденсатор, помимо емкости, характеризуется еще рабочим, испытательным и пробивным напряжением [x)] (при маркировке конденсаторов указывается рабочее напряжение).

Рабочее напряжение - напряжение, которое конденсатор должен выдерживать длительное время, т.е. в рабочем режиме.

Испытательное напряжение - напряжение, которое конденсатор должен выдерживать при кратковременном испытании (примерно до 1 мин.). Испытательное напряжение обычно превышает рабочее в 2 - 3 раза.

Пробивное напряжение - минимальное напряжение, при котором наступает пробой [xx] диэлектрика.

Все названные характеристики конденсаторов зависят от конструкции обкладок и от электрической прочности диэлектрика.

Электрическая прочность или пробивная напряженность – это предельная для данного диэлектрика напряженность электрического поля, при которой диэлектрик еще сохраняет свои изоляционные свойства. Так, например, электрическая прочность радиофарфора составляет $(1{,}5 \div 2)\ 10^5$ в/см).

х) Термин «напряжение» здесь обозначает «разность потенциалов».

хх) Пробой – локальное разрушение диэлектрика, обусловленное действием электрического поля, потеря диэлектриком изолирующих свойств.

30 ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ И ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ СОЕДИНЕНИЕ КОНДЕНСАТОРОВ

1 Конденсаторы могут соединяться в батареи. Соединять конденсаторы приходится тогда, когда нет конденсаторов нужной емкости, или конденсаторов, рассчитанных на данное напряжение.

Конденсаторы могут быть соединены последовательно, параллельно и комбинированно.

2 Введем понятие «заряд батареи конденсаторов».
Если незаземленный электрод заряженной батареи конденсаторов соединить с «землей», то батарея разрядится и по проводу заземления пройдет вполне определенный электрический заряд - тот заряд, который батарея накопила в процессе зарядки и который она может «отдать». Заряд, который может отдать батарея конденсаторов при разрядке, и называют зарядом этой батареи (если второй электрод батареи не заземлен, то зарядом батареи следует назвать заряд, прошедший по проводнику, накоротко соединяющему положительный и отрицательный электроды батареи).

3 Зарядить конденсатор или батарею конденсаторов - это значит подключить их к источнику, создающему разность потенциалов.
Обратим внимание на терминологию. Когда конденсатор или батарея конденсаторов присоединены к источнику, говорят, что к ним приложено напряжение, действует напряжение (разность потенциалов).

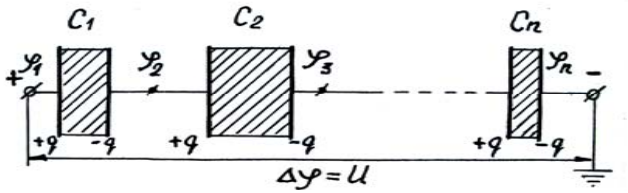


Рис.73

4 *Рассмотрим последовательное соединение конденсаторов* (рис.73). Пусть n конденсаторов емкостью C_1, C_2,., C_n соединены последовательно. Если конденсаторы соединены последовательно, то при подключении их к источнику напряжения все конденсаторы получат одинаковый заряд.

ОБЬЯСНЕНИЕ. Пусть крайней обкладке первого конденсатора (C_1) сообщен положительный заряд q_+ (что и происходит при подаче на батарею напряжения). На второй обкладке этого же конденсатора по индукции появится заряд q_- , равный q_+ по величине ($|q_-| = |q_+|$). Так как правая обкладка первого конденсатора и левая второго образуют единый проводник, который до этого был не заряжен, то на первой пластине второго конденсатора появится положительный заряд q_+ - точно такой же, как и на первом конденсаторе. Описанный процесс охватит все конденсаторы, поэтому все конденсаторы получат одинаковый заряд.

Найдем заряд батареи. Для этого положительный электрод батареи соединим с землей (будем считать, что другой электрод батареи заземлен). Положительные заряды всех конденсаторов, кроме первого, отделены от земли прослойками из диэлектриков, следовательно, уйти в землю не могут (для этого они должны были бы пройти сквозь диэлектрики, что невозможно). Значит, при разрядке батареи по проводу заземления пройдет заряд только одного, конденсатора (q). Это и есть заряд батареи.

Итак, $$q_1 = q_2 = \ldots = q_n = q \qquad (30.1)$$

Найдем емкость батареи.

Обозначим потенциал левой обкладки первого конденсатора φ_1, потенциал правой обкладки первого конденсатора и, следовательно, левой обкладки второго конденсатора (эти обкладки образуют единую эквипотенциальную поверхность) φ_2 и т.д.

Из закона сохранения энергии следует, что сумма напряжений на отдельных конденсаторах равна напряжению $\Delta\varphi$, приложенному к батарее:

$$(\varphi_1 - \varphi_2) + (\varphi_2 - \varphi_3) + \ldots + (\varphi_{n-1} - \varphi_n) = \Delta\varphi \qquad (30.2)$$

Разность потенциалов для краткости обозначим буквой u:

$\varphi_1 - \varphi_2 = u_1; \varphi_2 - \varphi_3 = u_2; \ldots . \varphi_{n-1} - \varphi_n = u_n; \Delta\varphi = u$. Перепишем соотношение (30.2), используя новые обозначения:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u \qquad (30.3)$$

Выразим напряжение на каждом из конденсаторов через заряд и соответствующую емкость:

$$u_1 = \frac{q}{c_1}; u_2 = \frac{q}{c_2}; \ldots .; u_n = \frac{q}{c_n}$$

Обозначив общую емкость всех конденсаторов символом C, получим для батареи конденсаторов: $u = \frac{q}{c}$.

Заменяя в выражении (30.3) разности потенциалов черев заряды и емкости, получим: $$\frac{q}{c_1} + \frac{q}{c_2} + \ldots . + \frac{q}{c_n} = \frac{q}{c}$$

или после сокращения на q:

$$\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \ldots . + \frac{1}{c_n} = \frac{1}{c} \qquad (30.4)$$

*Вывод***:** при последовательном соединении конденсаторов величина, обратная емкости батареи, равна сумме величин, обратных емкостям отдельных конденсаторов.

Найдем, как распределяется напряжение, приложенное к батарее, между отдельными конденсаторами. Для этого в соотношении (30.1) заряды выразим через напряжения и емкости:

$$c_1u_1 = c_2u_2 = \ldots = c_nu_n$$

откуда следует, что

$$u_1 : u_2 : \ldots : u_n = \frac{1}{c_1} : \frac{1}{c_2} : \ldots : \frac{1}{c_n} \qquad (30.5)$$

Напряжения, действующие на отдельных конденсаторах при последовательном соединении, обратно пропорциональны их емкостям: чем меньше емкость конденсатора, тем большее напряжение будет на нем действовать,

ПРИМЕЧАНИЕ. Соотношение (30.5) справедливо только в том случае, если диэлектрики в конденсаторах – идеальные, т.е. совершенно не проводят ток. Реальные заполнители конденсаторов, хотя и слабо, но проводят ток. Поэтому в цепях с постоянным напряжением разности потенциалов, действующие на отдельных конденсаторах, зависят не от емкости конденсаторов, а от сопротивления диэлектриков.

5 *Рассмотрим теперь параллельное соединение конденсаторов.*

Пусть *n* конденсаторов емкостью $c_1, c_2, \ldots, c_n$ соединены параллельно (рис. 74). После подключения такой батареи к источнику напряжения на

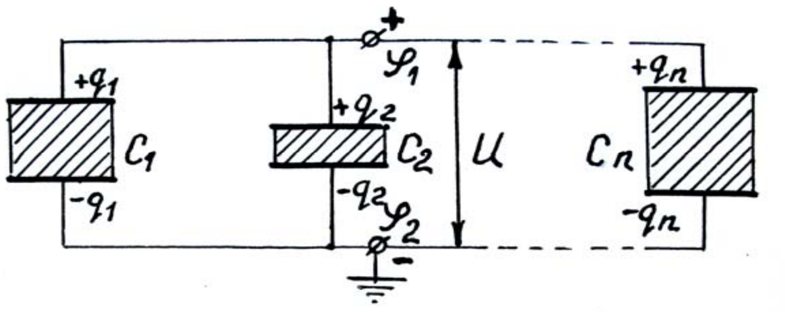


Рис.74

всех конденсаторах будет действовать одно и то же напряжение

$$\varphi_1 - \varphi_2 = u$$

(все верхние обкладки образуют единый проводник, следовательно, находятся под одним и тем же потенциалом φ_1; аналогично, все заземленные обкладки имеют один и тот же потенциал φ_2):

$$u_1 = u_2 = \ldots = u_n = u \qquad (30.6)$$

Что касается зарядов, накапливаемых отдельными конденсаторами, то они оказываются разными, так как различны емкости конденсаторов.

Заряд батареи в этом случае равен сумме зарядов отдельных конденсаторов

$$q = q_1 + q_2 + \ldots + q_n \qquad (30.7)$$

Выразим заряды через емкость и напряжение

$$q_1 = c_1 u; q_2 = c_2 u; \ldots; q_n = c_n u; q = cu$$

и подставим в соотношение (30.7)

$$cu = c_1 u + c_2 u + \ldots + c_n u.$$

После сокращения на u получим:

$$c = c_1 + c_2 + \ldots + c_n \qquad (30.8)$$

Таким образом, при параллельном соединении конденсаторов емкость батареи равна сумме емкостей отдельных конденсаторов.

При параллельном соединении заряд, накапливаемый отдельными конденсаторами, прямо пропорционален емкости (докажите это сами).

6. При комбинированном, (смешанном) соединении часть конденсаторов соединяется последовательно, а часть - параллельно.

31 СОБСТВЕННАЯ ЭНЕРГИЯ ЗАРЯЖЕННОГО ПРОВОДНИКА И КОНДЕНСАТОРА

1 В § 13 было показано, что всякое заряженное тело, находящееся во внешнем электростатическом поле, обладает потенциальной энергией.

Естественно поставить вопрос о том, обладает ли потенциальной энергией заряженное тело в отсутствие внешнего поля.

Ряд соображений позволяет сделать вывод, что заряженное тело, находящееся только в собственном электростатическом поле, обладает потенциальной энергией.

Потенциальная энергия, которой обладает заряженный проводник в отсутствие внешнего электрического поля, называется собственной энергией проводника.

2 Найдем выражение для собственной энергии.

Будем мысленно заряжать проводник, перенося заряды из бесконечности на поверхность проводника малыми порциями dq. Перенос первой порции не потребует совершения работы: проводник первоначально не заряжен и, стало быть, не взаимодействует с зарядом, который на него переносится. Перенос же всех последующих порций потребует вполне определенной работы, так как проводник будет заряжен, и вокруг него будет существовать электрическое поле.

Пусть на проводнике уже имеется заряд q. Если емкость этого проводника C, то его потенциал примет значение $\varphi = \frac{q}{c}$

Чтобы перенести заряд dq с нулевого уровня потенциала (из бесконечности) на поверхность проводника, придется затратить работу

$$dA = dq(\varphi - \varphi_\infty) = dq\varphi \quad \text{так как } \varphi_\infty = 0 .$$

Обратим внимание на то, что здесь dA обозначает работу, совершаемую не электростатическими силами, а внешними силами против электростатических сил. За счет работы внешних сил заряженный проводник «запасает» потенциальную энергию. Приращение потенциальной энергии проводника равно работе внешних сил:

$$dA = dW$$

Тогда $$dW = \varphi dq = \frac{qdq}{c}$$

Будем считать потенциальную энергию незаряженного проводника, не создающего вокруг себя поля, равной нулю. Тогда энергия проводника, обладающего зарядом q, будет равна

$$W = \int_0^w dW = \int_0^q \frac{qdq}{c} = \frac{q^2}{2c} \qquad (31.1)$$

Учитывая, что $c = \frac{q}{\varphi}$, получим следующие выражения для собственной энергии заряженного проводника:

$$W = \frac{q^2}{2c} = \frac{q\varphi}{2} = \frac{c\varphi^2}{2} \qquad (31.2)$$

3 Столь же легко получить выражение для собственной энергии заряженного конденсатора. Так как заряды обкладок конденсатора равны по величине и противоположны по знаку, процесс зарядки конденсатора можно представить как перенос малых порций dq с одной обкладки на другую. В результате такого переноса между обкладками возникнет все возрастающая разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2 = u$. Работа переноса каждой очередной порции зарядов dq равна

$$dA = dqu ,$$

где u - разность потенциалов между обкладками, действующая во время переноса порции dq,

Интегрируя последнее выражение и принимая потенциальную энергию незаряженного конденсатора равной нулю, получим формулы для собственной энергии конденсатора: $$W = \frac{q^2}{2c} = \frac{qu}{2} = \frac{cu^2}{2} \qquad (31.3)$$

32 ЭНЕРГИЯ СИСТЕМЫ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕЧНЫХ ЗАРЯДОВ

1 Представим, что два неподвижных точечных заряда q_1 и q_2 находятся на некотором расстоянии друг от друга. Каждый из зарядов находится в электрическом поле, созданном другим зарядом. Пользуясь соотношением (14.2), энергию взаимодействия этих зарядов можно выразить через потенциалы соответствующих полей. Если считать, что поле создано зарядом q, то потенциальная энергия рассматриваемых зарядов будет равна

$$W = q_2\varphi_2, \qquad (32.1)$$

где φ_2 - потенциал, создаваемый зарядам q_1 в той точке, где находится заряд q_2.

Если же полагать, что поле создано зарядом q_2, то потенциальная энергия этой же системы зарядов будет равна

$$W = q_1\varphi_1 \qquad (32.2)$$

где φ_1 - потенциал, создаваемый зарядом q_2 в той точке, где находится заряд q_1.

Из (32.1) и (32.2) следует, что $\quad q_1\varphi_1 = q_2\varphi_2 \qquad (32.3)$

Запишем соотношение (32.1) в следующем виде:

$$W = \frac{q_2\varphi_2}{2} + \frac{q_2\varphi_2}{2}$$

Заменим в этой формуле первое слагаемое $q_2\varphi_2$ на $q_1\varphi_1$ (в соответствии с (32.3)):

$$W = \frac{q_1\varphi_1}{2} + \frac{q_2\varphi_2}{2} = \frac{1}{2}\left(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2\right) \qquad (32.4)$$

Формула (32.4) выражает тот факт, что заряды q_1 и q_2 равноправны и входят в выражение полной энергии симметрично. Действительно,

$$\varphi_1 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}, \qquad \text{а} \qquad \varphi_2 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}$$

Подставив φ_1 и φ_2 в (32.4), получим:

$$W = \frac{1}{2}\left(\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r} + \frac{q_2q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}\right) \qquad (32.5)$$

2 Полученный результат можно обобщить на систему, состоящую из любого числа точечных зарядов. Потенциальная энергия n точечных зарядов выражается формулой:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i\varphi_i, \qquad (32.6)$$

где φ_i - потенциал, создаваемый всеми зарядами, кроме q_i -го, в той точке, где находится заряд q_i .

33 ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

1 Уместно поставить вопрос о локализации собственной энергии заряженного проводника. Где пространственно сосредоточена эта энергия - на поверхности проводника, т.е. на зарядах, или вне его - в окружающем проводник электрическом поле?

Решить этот вопрос электростатическими опытами нельзя, так как электростатические поля и породившие их электрические заряды неотделимы друг от друга.

Изучение же электродинамических явлений и, в частности, электромагнитного поля, убеждает в том, что носителем энергии является поле.

2 Преобразуем полученное нами выражение для энергии конденсатора так, чтобы в него вошли характеристики поля – напряженность или индукция. Проще всего это сделать на примере плоского конденсатора.

Энергия заряженного плоского конденсатора емкостью C в соответствии с (31.3) равна

$$W = \frac{Cu^2}{2}, \tag{33.1}$$

где u - напряжение на конденсаторе. Емкость плоского конденсатора равна $C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{r_0}$, разность потенциалов $u = E\, r_0$, (E - напряженность поля, поле однородно).

Подставив C и u в формулу (33.1), получим:

$$W = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S E^2 r_0^{\,2}}{2r_0} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} V, \tag{33.2}$$

так как $Sr_0 = V$ - объем, занимаемый полем конденсатора.

3 Пространственное распределение энергии характеризует величина, называемая плотностью энергии. Плотность энергии ω численно равна энергии поля, заключенной в единице объема. Если энергия распределена равномерно, то объемная плотность вычисляется по формуле

$$\omega = \frac{W}{V}, \tag{33.3}$$

если неравномерно, то по формуле

$$\omega = \frac{dW}{dV}. \tag{33.4}$$

Так как электрическое поле в плоском конденсаторе однородно, то энергия, заключенная в нем, распределена равномерно по всему объему конденсатора. Следовательно, разделив энергию конденсатора W на объем поля, заключенного в нем, получим выражение для плотности энергии:

$$\omega = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}. \qquad (33.5)$$

Можно показать, что полученная формула справедлива и для неоднородного поля.

4 Принимая во внимание, что в изотропном диэлектрике $E = \dfrac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon}$,

плотность энергии можно выразить так:

$$\omega = \frac{ED}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon}, \qquad (33.6)$$

5 Зная пространственное распределение объемной плотности энергии, можно решить обратную задачу - найти энергию, заключенную во всем пространстве, где имеется поле:

$$W = \int_v \omega(x, y, z) dV, \qquad (33.7)$$

где ω (x,y,z) - объемная плотность энергии; dV - элементарный объем; V - объем всего пространства, где локализовано поле.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 6. Определить электрическую емкость плоского конденсатора с двумя слоями диэлектриков: фарфора толщиной $d_1 = 2\text{мм}$ и эбонита толщиной $d_2 = 1{,}5\text{мм}$, если площадь пластин $S = 100\text{см}^2$.

Решение. Емкость конденсатора по определению $C = \dfrac{q}{U}$, где q – заряд на пластинах конденсатора, U – разность потенциалов пластин.

Заменив разность потенциалов суммой напряжений на слоях диэлектриков, получим $C = \dfrac{q}{U_1 + U_2}$, где U_1 – напряжение на первом слое диэлектрика, U_2 – напряжение на втором слое диэлектрика. Приняв во внимание, что $q = \sigma S$, $U_1 = E_1 d_1 = \dfrac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_1} d_1$ и $U_2 = E_2 d_2 = \dfrac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_2} d_2$,

получим $C = \dfrac{\sigma S}{\dfrac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_1} d_1 + \dfrac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_2} d_2}$, где σ – поверхностная плотность заряда на пластинах, E_1, E_2 – напряженности поля в диэлектриках, D – индукция поля в диэлектриках. По теореме Гаусса $D = \sigma$.

С учетом замечаний окончательно получим

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{\dfrac{d_1}{\varepsilon_1} + \dfrac{d_2}{\varepsilon_2}}.$$

Подставим числовые значения и произведем вычисления

$$C = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 100 \cdot 10^{-4}}{\dfrac{2 \cdot 10^{-3}}{5} + \dfrac{1{,}5 \cdot 10^{-3}}{3}} = 9{,}83 \cdot 10^{-11} \, \Phi = 98{,}3 \, n\Phi.$$

Пример 7. Металлический шар радиусом $R = 3 см$ несет заряд $q = 2 \cdot 10^{-2} \, мкКл$. Шар окружен слоем парафина толщиной $d = 2см$. Определить энергию электрического поля, заключенного в слое диэлектрика.

Решение. Так как поле, созданное заряженным шаром, является неоднородным, то энергия поля в слое диэлектрика распределена неравномерно. Однако объемная плотность энергии будет одинакова во всех точках, отстоящих на равных расстояниях от центра сферы, так как поле заряженного шара обладает сферической симметрией.

Выразим энергию в элементарном сферическом слое диэлектрика: $dW = \omega dV$, где ω – объемная плотность энергии, dV – объем элементарного слоя диэлектрика (рис.75). Полная энергия выразится интегралом

$$W = \int \omega dV = 4\pi \int_R^{R+d} \omega r^2 dr,$$

где r – радиус элементарного сферического слоя, dr – толщина этого слоя. Объемная плотность энергии определяется по формуле

$\omega = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}$, где E – напряженность поля. В нашем случае для сферы $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2}$ и, следовательно,

$$\omega = \frac{q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 \varepsilon r^4}.$$

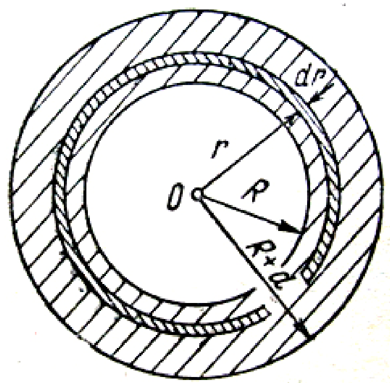


Рис.75

Подставляя это выражение плотности в формулу для полной энергии и вынеся за знак интеграла постоянные величины, получим

$$W = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int_R^{R+d}\frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+d}\right) = \frac{q^2 d}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon R(R+d)}.$$

Подставим числовые значения и произведем вычисления:

$$W = \frac{(2\cdot 10^{-8})^2\cdot 2\cdot 10^{-2}}{8\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 2\cdot 3\cdot 10^{-2}(3\cdot 10^{-2}+2\cdot 10^{-2})} = 1{,}2\cdot 10^{-5}\,\textit{Дж}.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1 Что называется конденсатором? Что такое емкость конденсатора?

2 Как рассчитывается емкость уединенного проводника и конденсатора?

3 Рассчитайте емкость плоского и сферического конденсаторов.

4 Чему равна емкость батареи, составленной из последовательно соединенных конденсаторов (вывод)?

5 Рассчитайте емкость батареи при параллельном соединении конденсаторов.

6 Что такое собственная энергия проводника и конденсатора?

7 Каково выражение для собственной энергии заряженного проводника и конденсатора?

8 Как вычисляется энергия системы точечных зарядов?

9 Что называется объемной плотностью энергии? Как она выражается через характеристики электрического поля - напряженность и индукцию?

10 Как вычисляется энергия электрического поля?

ИСПОЛЬЗУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА:

Савельев И. В. Курс общей физики: Учебное пособие. В 3 т т. Т.2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика. 4-е изд., стер.-СПб.: Изд. “Лань”, 2005. -496 с/

Зисман Г. А. Курс общей физики. Т.2 /Г.А. Зисман, О.М.Тодес.– М.:Наука,1972.

Детлаф А. А. Курс физики: учебное пособие для втузов. /А.А. Детлаф, Б.М. Яворский.-4-е изд., испр.- М.: Высш.шк., 2002.- 718 с.

Трофимова Т.И. Курс физики: учебное пособие для вузов. /Т.И.Трофимова.- 7-е изд., стер.- М.: Высш. шк., 2001.- 541 с.

Чертов А.Г. Задачник по физике: учебное пособие для втузов./А.Г.Чертов, А.А.Воробьев.- 8-е изд., перераб. и доп.- М.: Физматлит, 2006.- 640 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное пособие

БАРСУКОВ Владимир Иванович
ДМИТРИЕВ Олег Сергеевич

ФИЗИКА

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ.
ЕГО СВОЙСТВА И ХАРАКТЕРИСТИКИ

Конспект лекций

Издано в авторской редакции

Подписано к печати 01.10.2008
Формат 60х84/16 Бумага офсетная. Печать офсетная
Гарнитура Times New Roman Объем 7,5 усл. печ.л.
Тираж 100 экз. Заказ 756

Отпечатано с готового оригинал-макета
ЗАО«НПО ПК«Спектр»

ФИЗИКА

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

• ТАМБОВ 2008 •