

Министерство образования и науки Российской Федерации

**Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Тамбовский государственный технический университет»**

Гатапова Н.Ц., Колиух А.Н., Орлова Н.В., Орлов А.Ю.

***ОСНОВЫ ТЕОРИИ И ТЕХНИКИ  
ФИЗИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ  
И ЭКСПЕРИМЕНТА***

Учебное пособие

УДК 66.011(075.8)  
ББК Л11-5я73  
О-753

Аттестовано Методическим советом университета  
(Протокол № 9 от 19 ноября 2013 г.)

Р е ц е н з е н т ы

Доктор технических наук, профессор ФГБОУ ВПО «ТГТУ»

*А.Г. Ткачев*

Кандидат технических наук  
начальник ЦЛЮ ОАО «Пигмент»

*Л.Н. Чемерчев*

О-753 Основы теории и техники физического моделирования и эксперимента [Электронный ресурс]: учебное пособие / Н.Ц. Гатапова, А.Н. Колиух, Н.В. Орлова, А.Ю. Орлов. – Тамбов, 2014. – 77 с.

Изложены основы теории подобия, приведены виды и группы критериев, способы их получения, рассмотрена структура критериальных уравнений. Приведены примеры физического моделирования и эксперимента в технологических процессах и аппаратах. Даны основные сведения по оценке погрешностей экспериментальных исследований и методам планирования эксперимента.

Предназначено для магистрантов, обучающихся по направлению 241000 «Энерго- и ресурсосберегающие процессы в химической технологии, биотехнологии и нефтехимии».

УДК 66.011(075.8)  
ББК Л11-5я73

Все права на размножение и распространение в любой форме остаются за разработчиком.  
Нелегальное копирование и использование данного продукта запрещено.

© Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Тамбовский государственный технический университет» (ФГБОУ ВПО «ТГТУ»), 2014

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение .....	4
1. Основы физического моделирования .....	5
1.1 Основы теории подобия. Константы, инварианты, критерии подобия. Теоремы подобия .....	5
1.2 Структура критериальных уравнений. Виды критериев .....	12
1.3 Получение явного вида критериальных уравнений .....	17
1.4 Техника физического эксперимента и моделирования. Примеры моделирования. ....	19
2. Теория и техника экспериментальных исследований .....	23
2.1 Эксперимент в инженерной практике .....	23
2.2 Классификация видов экспериментальных исследований .....	24
2.3 Погрешности результатов экспериментальных исследований .....	25
3. Методы планирования экспериментов. Логические основы .....	29
3.1. Основные определения и понятия .....	29
3.2. Пример «хорошего» и «плохого» эксперимента .....	31
3.3. Планирование первого порядка .....	34
3.3.1. Выбор основных факторов и их уровней .....	35
3.3.2. Планирование эксперимента .....	36
3.3.3. Определение коэффициентов уравнения регрессии .....	39
3.3.4. Статистический анализ результатов эксперимента .....	40
3.3.5. Дробный факторный эксперимент .....	43
3.3.6. Разработка модели гидравлического режима четырехзонной печи .....	48
3.4. Планы второго порядка .....	53
3.4.1. Ортогональные планы второго порядка .....	54
3.4.2. Ротатабельные планы второго порядка .....	58
3.5. Планирование экспериментов при поиске оптимальных условий .....	61
3.5.1. Метод покоординатной оптимизации (Гаусса - Зейделя) .....	64
3.5.2. Метод круглого восхождения (Бокса-Уилсона) .....	65
3.5.3. Симплексный метод планирования .....	69
Список использованных источников .....	76

## ВВЕДЕНИЕ

Моделирование физическое – вид моделирования, который состоит в замене изучения некоторого объекта или явления экспериментальным исследованием его модели, имеющей ту же физическую природу.

В науке любой эксперимент, производимый для выявления тех или иных закономерностей изучаемого явления или для проверки правильности и границ применимости найденных теоретическим путём результатов, по существу представляет собою моделирование, т. к. объектом эксперимента является конкретная модель, обладающая необходимыми физическими свойствами, а в ходе эксперимента должны выполняться основные требования, предъявляемые к физической модели. В технике физическое моделирование используется при проектировании и сооружении различных объектов для определения на соответствующих моделях тех или иных свойств (характеристик) как объекта в целом, так и отдельных его частей. К физическому моделированию прибегают не только по экономическим соображениям, но и потому, что натурные испытания очень трудно или вообще невозможно осуществить, когда слишком велики (малы) размеры натурального объекта или значения других его характеристик (давления, температуры, скорости протекания процесса и т. п.).

В основе физического моделирования лежат теория подобия и анализ размерностей. Необходимыми условиями физического моделирования являются геометрическое подобие (подобие формы) и физическое подобие модели и натуры: в сходственные моменты времени и в сходственных точках пространства значения переменных величин, характеризующих явления для натуры, должны быть пропорциональны значениям тех же величин для модели. Наличие такой пропорциональности позволяет производить пересчёт экспериментальных результатов, получаемых для модели, на натуру путём умножения каждой из определяемых величин на постоянный для всех величин данной размерности множитель — коэффициент подобия.

*Пособие предназначено для подготовки магистров по направлению 241000 «Энерго- и ресурсосберегающие процессы в химической технологии, нефтехимии и биотехнологии».*

# 1 ОСНОВЫ ФИЗИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

## 1.1 Основы теории подобия. Константы, инварианты, критерии подобия. 1, 2, 3-я теоремы подобия

Изучение процессов с целью получения уравнений, необходимых для их анализа и расчета, можно проводить чисто теоретически. Это наиболее предпочтительный путь исследования; сводится к составлению (на основе самых общих законов физики и химии) и решению математических зависимостей, чаще всего дифференциальных уравнений, полностью описывающих процесс.

Дифференциальные уравнения описывают целый класс однородных по своей сущности явлений, и для выделения из него конкретного явления необходимо ограничивать указанные уравнения дополнительными условиями (условиями однозначности).

Условия однозначности включают: геометрические формы и размеры системы, например, аппарата, в котором протекает процесс, существенные для данного процесса физические константы участвующих в нем веществ, начальные условия, к числу которых относятся: начальная скорость, начальная температура, начальная концентрация и т.д., граничные условия, характеризующие состояние на границах системы, например, равенство нулю скорости жидкости у стенок трубы и т.д.

Таким образом, дифференциальные уравнения должны решаться в совокупности с условиями однозначности в установленных пределах.

Однако многие процессы характеризуются большим числом переменных и настолько сложны, что зачастую удается лишь дать математическую формулировку задачи и установить условия однозначности. Полученные дифференциальные уравнения не могут быть решены известными в математике методами. Более того, для очень сложных процессов даже нельзя составить систему дифференциальных уравнений, исчерпывающе описывающих процесс.

Теория подобия является учением о методах научного обобщения эксперимента. Она указывает, как надо ставить опыты и как обрабатывать их результаты, чтобы при проведении небольшого числа экспериментов иметь возможность обобщать опытные данные, получая единичные уравнения для всех подобных явлений. Применение теории подобия часто позволяет вместо дорогостоящих трудоемких опытов на промышленных установках выполнять исследования на моделях значительно меньшего размера. Иногда опыты можно проводить не с рабочими (иногда вредными и опасными) веществами и не в жестких условиях (высокие температуры, агрессивные среды) реального производственного процесса, а с другими (модельными) веществами в условиях, отличающихся от промышленных.

Таким образом, методы теории подобия лежат в основе масштабирования и моделирования процессов.

Один из основных принципов теории подобия заключается в выделении из класса явлений группы подобных явлений.

**Подобными** называют явления, для которых постоянны отношения характеризующих их сходственных величин.

Условия подобия рассмотрим на примере геометрического подобия. Из геометрии известно, что из класса плоских фигур можно выделить группы подобных фигур, например, треугольников. Подобные фигуры отличаются только масштабом и получены одна из другой только умножением сходственных размеров одной из них на некоторый постоянный множитель.

Безразмерные масштабные множители, выражающие отношения однородных сходственных величин подобных фигур, называются константами подобия.

Кроме константы геометрического подобия  $\kappa_l$  существуют константы временного подобия  $\kappa_t$ , подобие скоростей  $\kappa_v$ , подобие физических величин  $\kappa_p$ ,  $\kappa_m$ , подобие начальных и граничных величин.

Перечисленные константы подобия, выражающие отношения одноименных величин в натуре и в модели, постоянны для различных сходственных точек подобных систем, но изменяются в зависимости от соотношения размеров натуре и модели.

Важным свойством констант подобия является следующее: входящее в них одноименные величины могут взаимно заменяться. Поэтому отношения приращений этих величин можно заменять отношениями самих величин.

$$\text{Например: } \kappa_{\omega} = \frac{\omega'_1}{\omega''_1} = \frac{\omega'_2}{\omega''_2} = \frac{\omega'_1 - \omega'_2}{\omega''_1 - \omega''_2} = \frac{\Delta\omega'}{\Delta\omega''} = \frac{d\omega'}{d\omega''}$$

Подобие потоков в натуре и модели можно охарактеризовать также с помощью инвариантов подобия, выражая все подобные величины в относительных единицах, т.е. в виде отношений сходственных величин в пределах каждой системы.

$$\text{Например, } i_{\omega} = \frac{\omega'_1}{\omega'_2} = \frac{\omega''_1}{\omega''_2}$$

Величина  $i_{\omega}$  представляет собой инвариант скорости, а, например,  $i_l$  - инвариант подобия геометрических величин и т.д. Эти инварианты подобия, выраженные отношением двух однородных физических величин, называются параметрическими критериями или симплексами.

Однако инварианты подобия могут быть выражены также отношениями разнородных величин, т.е. представлять собой безразмерные комплексы этих величин. Например, для сходственных точек подобных пото-

ков в трубопроводах равны инварианты подобия, состоящие из различных физических величин, или безразмерные комплексы – в данном случае критерии Рейнольдса.

$$\frac{\varpi_1 d_1 \rho_1}{\mu_1} = \frac{\varpi_2 d_2 \rho_2}{\mu_2} = Re$$

Если инварианты подобия выражаются комплексами величин, полученными преобразованием дифференциальных уравнений, описывающих процесс, то их называют критериями подобия.

Критерии подобия всегда имеют физический смысл, являясь мерами соотношения между какими-то двумя эффектами (силами), существенными для данного процесса.

Критерии подобия обладают всеми свойствами инвариантов: они безразмерны, могут изменять свое значение от точки к точке данной системы, но для сходственных точек подобных систем не зависят от относительных размеров натуре и модели.

Критерии подобия могут быть получены для любого процесса, если известны аналитические зависимости между характеризующими его величинами – дифференциальные уравнения, описывающие процесс.

**1-я теорема подобия.** Заключается в утверждении, что если явления подобны то критерии составленные для этих явлений равны.

$$\pi_i' = \pi_i'' \quad ( ' - \text{образец, } '' - \text{модель})$$

Например, подобие течений жидкости определяется критерием Re

$$Re = \frac{wd\rho}{\mu} = \frac{wl}{\nu}; \quad \nu = \frac{\mu}{\rho}$$

Т.е. необходимо обеспечить:  $Re' = Re''$ . В результате подобие будет определять отношение любых физических характеристик в сходственных точках в сходственные моменты времени ( $f(x_i, \tau_i)$ ). Любые физические характеристики будут пропорциональны и определяются через масштаб подобия аналогично простейшему геометрическому подобию.

$$\frac{w'}{w''} = \text{const}$$

**2-я теорема подобия.** Согласно этой теореме решение любого дифференциального уравнения, связывающего между собой переменные, влияющие на процесс, может быть представлено в виде зависимости между безразмерными комплексами этих величин, т.е. между критериями подобия.

Если обозначить критерии подобия  $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_n$ , то решение дифференциального уравнения может быть представлено в виде

$$\varphi(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_n) = 0$$

Такие уравнения называются уравнениями в обобщенных переменных или критериальными уравнениями.

**3-я теорема подобия.** Данная теорема формулирует необходимые и достаточные условия подобия явлений: подобны те явления, которые описываются одной и той же системой дифференциальных уравнений и у которых соблюдается подобие условий однозначности.

Достоинства теории подобия и введение критериев подобия в следующем:

1) обеспечивается возможность комплексного физического анализа и математического описания явления вместо множества разрозненных характеристик

2) сокращение числа переменных влияние которых нужно учитывать. Например, в Re вместо 4-х величин – один комплекс, это резко сокращает число экспериментов и объем вычислений. При этом безразмерность критериев также является важным достоинством, т.к. величины критериев в безразмерном виде не зависят от принятой системы единиц.

Наибольшее распространение получили следующие методы получения критериев подобия:

1) метод приведения дифференциальных уравнений к критериальному виду;

2) метод анализа размерностей физических величин (метод Релея - Павлушенко).

### **Получение критериев подобия методом приведения дифференциальных уравнений.**

Метод приведения дифференциальных уравнений, разработанный Конаковым П.К., - это получение критериев подобия путем преобразования дифференциальных уравнений.

Порядок приведения дифференциального уравнения:

1) отбрасываются знаки дифференциалов, т.е.  $\frac{\partial x}{\partial y} \propto \frac{x}{y}$ ;  $\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} \propto \frac{x}{y^2}$ ,

2) отбрасываются индексы при переменных;

3) переменные  $x, y, z$  заменяются на линейный размер  $l$ ;

4) в уравнении оставляются только операторы, т.е.

$$W \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} + \frac{\partial t}{\partial y} + C = 0;$$

5) все операторы в уравнении делятся на один из них.



Рассмотрим пример преобразования дифференциального уравнения течения жидкости (уравнение Навье - Стокса) с получением гидромеханических критериев подобия.

Запишем уравнение Навье-Стокса для капельной жидкости в развернутом виде для одной оси, например z:

$$\rho \left( \frac{\partial \omega_z}{\partial \tau} + \omega_x \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial \omega_z}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial \omega_z}{\partial z} \right) = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial z^2} \right)$$

$\rho \frac{\partial \omega_z}{\partial \tau} \propto \frac{\rho \omega}{\tau}$  – член уравнения, отражающий влияние нестационарности движения;

$\rho \left( \omega_x \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial \omega_z}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial \omega_z}{\partial z} \right) \propto \rho \omega \frac{\omega}{l} = \frac{\rho \omega^2}{l}$  – уравнение, характеризующее силу инерции;

$\rho g$  – член, отражающий действие силы тяжести (остается без изменений);

$\frac{\partial p}{\partial z} \propto \frac{p}{l}$  – член, характеризующий силы давления;

$\mu \left( \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial z^2} \right) \propto \frac{\mu \omega}{l^2}$  – слагаемое, отражающее силы трения;

Поделим все на силу инерции, тогда:

$$\frac{\rho \omega}{\tau} \frac{1}{\rho \omega^2} = \frac{1}{\omega \tau} \text{ или, перевернув, } \frac{\omega \tau}{1} = \text{Но} \text{ – критерий гомохромности, учитывает неустановившийся характер движения в подобных потоках.}$$

$\frac{\rho g l}{\rho \omega^2} = \frac{g l}{\omega^2}$  – или, перевернув,  $\frac{\omega^2}{g l} = \text{Fr}$  – критерий Фруда, отражает влияние сил тяжести (или собственного веса) на движение жидкости.

$\frac{p}{l} \frac{1}{\rho \omega^2} = \frac{p}{\rho \omega^2 l} = \text{Eu}$  – критерий Эйлера. Обычно вместо абсолютного давления  $p$  вводят разность давлений  $\Delta p$  между какими-то двумя точками жидкости, тогда  $\text{Eu} = \frac{\Delta p}{\rho \omega^2 l}$ . Критерий Эйлера отражает влияние перепада гидростатического давления на движение жидкости.

$\frac{p}{l} \frac{1}{\rho \omega^2} = \frac{p}{\rho \omega^2 l} = \text{Eu}$  – критерий Эйлера. Обычно вместо абсолютного давления  $p$  вводят разность давлений  $\Delta p$  между какими-то двумя точками жидкости, тогда  $\text{Eu} = \frac{\Delta p}{\rho \omega^2 l}$ . Критерий Эйлера отражает влияние перепада гидростатического давления на движение жидкости.

$$\frac{\mu \omega}{l^2} \frac{l}{\rho \omega^2} = \frac{\mu}{\omega l \rho} \text{ или перевернув } \frac{\omega l \rho}{\mu} = \text{Re} - \text{критерий Рейнольдса} -$$

отражает влияние сил трения на движение жидкости. Величина  $l$  в критерии Re, как и в других критериях подобия, представляет собой линейный размер. При движении через трубопроводы или аппараты за такой размер принимается их диаметр, а в случае некруглого сечения потока – эквивалентный диаметр.

В результате получили 4 основных (базовых) критериев гидромеханического подобия. Это соответствует числу операторов д.у. без единицы.

Для гидромеханического подобия из этих критериев определяющими (заданными) являются Fr, Re, Но, а определяемым (искомым) критерий Eu.

Наряду с этими критериями используются параметрические критерии, которые определяют границы переноса.

### **Получение критериев подобия методом анализа размерностей физических величин (метод Рэлея-Павлушенко). р - теорема.**

Метод анализа размерностей (Релея – Павлушенко) дает возможность получить критерии и критериальные уравнения для сложных процессов, для которых не удастся составить дифференциальные уравнения и сформулировать условия однозначности.

Для использования данного метода необходимо знать, какие физические величины оказывают *существенное* влияние на течение процесса.

Рассмотрим движение жидкости по трубопроводу. Искомая величина  $\Delta p$  – перепад давления на концах трубы, т.е.

$$\Delta p = f(\tau, w, g, \rho, \mu, l) . \quad (1)$$

При свободном течении жидкости могло добавиться поверхностное натяжение  $\sigma$  [Н/м], для закрытых же каналов поверхностные силы не проявляются и их можно не учитывать.

Рассмотрим функциональную зависимость, представив ее в виде произведения входящих в нее величин в некоторых степенях:

$$\Delta p = \alpha_0 \tau^{\alpha_1} w^{\alpha_2} g^{\alpha_3} \rho^{\alpha_4} \mu^{\alpha_5} l^{\alpha_6} \quad (2)$$

Величины, входящие в уравнение, заменим на их размерности.

$$\Delta p = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{кг}}{\text{с}^2 \cdot \text{м}}$$

$$\mu = \text{Па} \cdot \text{с} = \frac{\text{кг} \cdot \text{с}}{\text{с}^2 \cdot \text{м}} = \frac{\text{кг}}{\text{с} \cdot \text{м}}$$

$$\rho = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

$$\left| \frac{\text{кг}}{\text{с}^2 \text{м}} \right| = \alpha_0 \left| \text{с} \right|^{\alpha_1} \left| \frac{\text{м}}{\text{с}} \right|^{\alpha_2} \left| \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right|^{\alpha_3} \left| \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right|^{\alpha_4} \left| \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}} \right|^{\alpha_5} \left| \text{м} \right|^{\alpha_6} \quad (3)$$

Поскольку левая и правая часть должны быть одинаковы для каждой единицы измерения можно записать систему из 3 –х уравнений для единиц (кг, м, с) связывающую эти единицы

$$\text{кг} : 1 = 1\alpha_4 + 1\alpha_5 \quad (4)$$

$$\text{м} : -1 = 1\alpha_2 + 1\alpha_3 - 3\alpha_4 - 1\alpha_5 + 1\alpha_6 \quad (5)$$

$$\text{с} : -2 = 1\alpha_1 - 1\alpha_2 - 2\alpha_3 - 1\alpha_5 \quad (6)$$

Уравнения (4), (5), (6) накладывают ограничения на физические величины входящие в уравнение (2) и учитывают связи между этими величинами, которые определяются их размерностями. В данном случае имеем 3 уравнения при 6 переменных, т.е. мы можем выбрать любые 3 переменных и выразить их через 3 остальных. Система уравнений 4, 5, 6 является алгебраически недостаточной, т.е. мы можем произвольно выбрать все возможные комбинации из 6 по 3, т.е. число вариантов определяется числом сочетаний

$$C_6^3 = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 20 \text{ вариантов}$$

Дальше продельывают все 20 вариантов, однако из-за свойств системы (неполноты) некоторые варианты оказываются неразрешимыми.

Возможны 15 вариантов из 20 (в данном случае). Получают все решения и составляют таблицу критериев которую затем анализируют и выбирают один вариант в котором, во-первых, критерии имеют ясный физический смысл; во-вторых физические величины удобно распределены по критериям; в третьих полученные критерии имеют традиционную форму.

В данном случае наилучшим оказался вариант, когда выбираются переменные  $a_2, a_4, a_6$  и выражаются через  $a_1, a_3, a_5$ . Все остальные решения будут взаимозависимыми, т.о.

$$\alpha_2 = 2 + 1\alpha_1 - 2\alpha_3 - 1\alpha_5 \quad (7)$$

$$\alpha_4 = 1 - 1\alpha_5 \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \alpha_6 &= -1 - 1\alpha_2 - 1\alpha_3 - 3\alpha_4 + 1\alpha_5 = \\ &= -1 - (2 + 1\alpha_1 - 2\alpha_3 - 1\alpha_5) - 1\alpha_3 + 3(1 - 1\alpha_5) + 1\alpha_5 = \\ &= -1\alpha_1 + 1\alpha_3 - 1\alpha_5 \end{aligned} \quad (9)$$

Подставим полученные  $\alpha_2, \alpha_4, \alpha_6$  в степенное уравнение (2)

$$\Delta p = \alpha_0 \tau^{\alpha_1} w^{(2+1\alpha_1-2\alpha_3-1\alpha_5)} g^{\alpha_3} \rho^{1-1\alpha_5} \mu^{\alpha_5} \mathbf{1}^{(-\alpha_1+1\alpha_3-\alpha_5)} \quad (10)$$

Теперь группируем величины с одинаковыми показателями степени

$$\frac{\Delta p}{\rho w^2} = \alpha_0 \left(\frac{\tau w}{l}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{gl}{w^2}\right)^{\alpha_3} \left(\frac{\mu}{wl\rho}\right)^{\alpha_5} \quad (11)$$

Получили те же самые безразмерные комплексы – критерии гидромеханического подобия, записываем их в традиционной форме

$$Eu = \alpha_0 Ho^{\alpha_1} Fr^{-\alpha_3} Re^{-\alpha_5} \quad (12)$$

Конкретный вид (12) находится обработкой экспериментальных данных и он необязательно должен быть степенным одночленом, хотя такой вид применяется чаще всего и наиболее удобен для обработки и расчетов.

Таким образом, при 7-ми переменных величинах и 3-х размерностях (метры, секунды, килограммы) получено критериальное уравнение, состоящее из 4-х критериев.

***p - теорема*** (теорема Бэкингема). Если общая функциональная зависимость связывает между собой  $n$  размерных величин, при составлении которых использованы  $m$  основных размерностей, то эта функциональная зависимость может быть представлена в виде критериального уравнения, содержащего  $(n-m)$  критериев, составленных из величин, входящих в общую функциональную зависимость.

## 1.2 Структура критериальных уравнений. Виды критериев

Критериальные уравнения в настоящее время используются чаще всего, как в инженерных, так и в научных расчетах, благодаря достоинствам комплексного анализа в безразмерной форме уравнений и отработанной методике их получения и использования. Основные критериальные уравнения получаются из дифференциальных уравнений или функциональных зависимостей – базовые критерии.

В расчетных уравнениях кроме них входят другие виды безразмерных величин.

Базовые критерии подразделяются на: (или выделяются из базовых)

Определяемый критерий – в который входит рассчитываемая величина. Для гидродинамики чаще всего это  $Eu = \Delta P / \rho w^2$ , модификации, определяющим является  $\Delta P$  или аналогичная величина.

Базовые критерии из которых оставляются только лимитирующие. Для гидродинамики  $Re$ ,  $Fr$ ,  $Ho$ .

Параметрические критерии (симплексы) вводятся для аналогичных характеристик вместо дополнительных базовых критериев. Например вместо критериев, которые получались бы если использовать все составляющие скорости, сил трения и проч. В этих случаях отношение критери-

ев  $\frac{\pi_i \text{ б}}{\pi_i \text{ доп}}$  дает Р – параметрический критерий, состоящий из 2х одно-

именных величин. Например для двухфазных течений могут вводиться симплексы вязкости, плотности.

Независимые переменные, добавляемые из условий конкретной задачи. Например геометрические симплексы.  $\Gamma/l=d$

На практике в расчетных критериальных уравнениях в правую часть вводят 2-3, редко 4 критерия. При большом числе уравнения становятся ненадежными, хотя предлагают иногда до 7-8 критериев. Распространения они не получили, причина – излишняя детализация, которая превышает фактическую точность эксперимента. В таких случаях необходимо делать несколько критериальных уравнений для различных диапазонов и условий протекания процессов.

Практика позволила отработать наилучшие формы критериев, модифицировать их и отработать методику их составления, получения и анализа.

Различают следующие группы:

- 1) Определяемый критерий
- 2) Определяющий критерий
- 3) Определяющие размеры, температуры, концентрации.

Например, для течения по каналам определяющим является

$d_{\text{эв}} = \frac{4F}{\Pi}$ . Этот размер подставляется во все критерии, физические свойства берутся при определяющей температуре, концентрации. Определяющая скорость чаще всего средняя, но иногда и на входе в аппарат.

Во всех критериях эти характеристики должны быть одни и те же при одних определяющих условиях.

4) Дополнительные критерии, которые находятся из условий, не входящих в дифференциальные уравнения, а учитываются дополнительно. Получают их из дополнительных частных физических уравнений или частных функциональных зависимостей.

Например, число Маха  $Ma = \frac{W}{W_{3B}}$  ( $W \gg W_{3B}$ )

критерий Вебера, учитывающий поверхностное натяжение, образуется по типу Эйлера  $We = \frac{\sigma}{\rho w^2}$

5) Производные, модифицированные, комбинированные критерии, получаемые из базовых путем их преобразования.

Например, для случая перемешивания:

$$Eu_{\text{меш}} = \left| \frac{\Delta P}{\rho w^2}; N \approx V_c; \Delta P = \frac{w^2}{V_c}; \frac{M^3}{c} = n \cdot d \cdot d^2; W = nd \right| =$$

$$= \left| \frac{N}{nd^3(nd^2\rho)} = \frac{N}{\rho n^3 d^5} \right| = \frac{N}{\rho n^3 d^5}$$

Для случаев осаждения часто используется комбинированный критерий Лященко  $Lu = \frac{Re^3}{Ar}$ , который не содержит диаметра частицы.

Для пленочных течений наиболее важным является критерий Галилея:

$$Ga = \frac{Re^2}{Fr} = \frac{gb^3}{v^2}, \text{ при таких течения } w \text{ является определяемой величиной, т.е. определяемым может быть не } Eu, \text{ а } Re \text{ или другой физический критерий.}$$

6) Групповые критерии являются схожими по смыслу для каждой группы, но с учетом специфических особенностей.

Например, группа Галилея:

$$Ga = \frac{gb^3}{v^2}; \text{ для условий осаждения } Ar = Ga \frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{gb^3}{v^2} \frac{\Delta\rho}{\rho}; \Delta\rho = \rho_{\text{ср}} - \rho_{\text{ч}}$$

для свободной конвекции при теплопередаче когда конвективное движение жидкости или газа вызывается ее объемным температурным расширением (движение дыма, горячих струй ...)

$$Gr = \frac{gb^3}{v^2} \beta \Delta T$$

7) Критерии – аналоги. Важнейшие по смыслу критерии, имеющие аналогичную физическую природу для аналогичных физических процессов.

Например,

течение  $\leftrightarrow$  теплопередача  $\leftrightarrow$  диффузия

$$Re = \frac{wl}{v} \leftrightarrow Pe = \frac{wl}{a} \leftrightarrow Pe = \frac{wl}{D}, a = \frac{1}{\rho r}, v = \frac{\mu}{\rho}, D = \frac{m^2}{c}$$

Так же важнейшей является группа критериев Прандтля.

$$Pr = \frac{v}{a} \text{ входит почти во все критериальные уравнения теплопроводности, характеризует теплофизические свойства.}$$

$$Pr_{\text{диф}} = \frac{v}{D}$$

в технике сушки используется тепломассообменный критерий Лыкова

$$Lu = \frac{D}{a}$$

Безразмерное время  $Ho = \frac{w\tau}{l}$  в гидромеханике;

$$Fo = \frac{a\tau}{l^2} \text{ в теплопередаче;}$$

$$Fo_{\text{диф}} = \frac{D\tau}{l^2} \text{ для диффузии.}$$

Определяемый критерий в теплопередаче и диффузии:

$$Nu = \frac{\alpha l}{\lambda}; Nu_{\text{диф}} = \frac{\beta l}{D}$$

$$Bi = \frac{\alpha l}{\lambda_{ст}}; Bi_{\text{диф}} = \frac{\beta l}{D_{ст}}$$

4) Дополнительные критерии, которые находятся из условий, не входящих в дифференциальные уравнения, а учитываются дополнительно. Получают их из дополнительных частных физических уравнений или частных функциональных зависимостей.

Например:

- число Маха  $Ma = \frac{W}{W_{зв}}$  ( $W \gg W_{зв}$ );

- критерий Вебера, учитывающий поверхностное натяжение, образуется по типу Эйлера  $We = \frac{\sigma}{l\rho w^2}$ .

8) Производные, модифицированные, комбинированные критерии, получаемые из базовых путем их преобразования.

Например, для случая перемешивания:

$$Eu_{\text{меш}} = \left| \frac{\Delta P}{\rho w^2}; N \approx V_c; \Delta P = \frac{w^2}{V_c}; \frac{M^3}{c} = n \cdot d \cdot d^2; W = nd \right|$$

$$= \left| \frac{N}{nd^3(nd^2\rho)} = \frac{N}{\rho n^3 d^5} \right| = \frac{N}{\rho n^3 d^5}$$

Для случаев осаждения часто используется комбинированный критерий Лященко  $Ly = \frac{Re^3}{Ar}$ , который не содержит диаметра частицы.

Для пленочных течений наиболее важным является критерий Галилея:

$$Ga = \frac{Re^2}{Fr} = \frac{gb^3}{v^2}, \text{ при таких течения } w \text{ является определяемой величиной, т.е. определяемым может быть не } Eu, \text{ а } Re \text{ или другой физический критерий.}$$

9) Групповые критерии являются схожими по смыслу для каждой группы, но с учетом специфических особенностей.

Например, группа Галилея:

$$Ga = \frac{gb^3}{v^2}; \text{ для условий осаждения } Ag = Ga \frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{gb^3}{v^2} \frac{\Delta\rho}{\rho}; \Delta\rho = \rho_{ср} - \rho_{ч}$$

для свободной конвекции при теплопередаче когда конвективное движение жидкости или газа вызывается ее объемным температурным расширением (движение дыма, горячих струй ...)

$$Gr = \frac{gb^3}{v^2} \beta \Delta T$$

10) Критерии – аналоги. Важнейшие по смыслу критерии, имеющие аналогичную физическую природу для аналогичных физических процессов.

Например,

течение ↔ теплопередача ↔ диффузия

$$Re = \frac{w l}{v} \leftrightarrow Pe = \frac{w l}{a} \leftrightarrow Pe = \frac{w l}{D}, a = \frac{1}{\rho p}, v = \frac{\mu}{\rho}, D = \frac{m^2}{c}$$

Так же, важнейшей является группа критериев Прандтля.

$Pr = \frac{v}{a}$  входит почти во все критериальные уравнения теплопроводности, характеризует теплофизические свойства.

$$Pr_{\text{диф}} = \frac{v}{D}$$

в технике сушки используется тепломассообменный критерий Лыкова

$$Lu = \frac{D}{a}$$

Безразмерное время  $Ho = \frac{w\tau}{l}$  в гидромеханике.

$$Fo = \frac{a\tau}{l^2} \text{ в теплопередаче.}$$



$$Fo_{\text{диф}} = \frac{D\tau}{l^2} \text{ для диффузии.}$$

Определяемый критерий в теплопередаче и диффузии:

$$Nu = \frac{\alpha l}{\lambda}; Nu_{\text{диф}} = \frac{\beta l}{D}$$

$$Bi = \frac{\alpha l}{\lambda_{\text{ст}}}; Bi_{\text{диф}} = \frac{\beta l}{D_{\text{ст}}}$$

### 1.3. Получение явного вида критериальных уравнений.

Для получения критериальных уравнений в явном виде используют графическую или статистическую обработку полученных экспериментальных данных, промышленных результатов, а иногда и расчетных табличных данных, которые получены решением дифференциальных уравнений численными методами. Сначала выбирают исходное критериальное уравнение, например, для течения в трубах  $Eu = Eu(Re, \Gamma l, \Gamma \Delta)$ . Пределы изменения переменных необходимы для практических расчетов  $\min < Re < \max$ . и т.д.

Этим определяется:

- 1) диапазон выполняемых экспериментов, для составления плана эксперимента (расчета);
- 2) эксперимент должен быть достаточно избыточным, с учетом погрешности экспериментов. При этом систематические погрешности должны быть исключены;
- 3) равная плотность во всем диапазоне или увеличенная плотность вблизи критических точек.

Желательно проведение 1-критериальных экспериментов для возможности графической обработки. При этом все остальные критерии сохраняются на фиксированном уровне. Выбирают вид зависимости, чаще всего степенной многочлен

$Eu = A \cdot Re^n \Gamma l^m \Gamma \Delta^k$  для течения в трубах традиционно и более удобно в расчетах. Практически, вместо  $Eu$  используется коэффициент трения  $\lambda$ , который входит в расчетное уравнение Дарси-Вейсбаха

$$\Delta P_{\text{тр}} = \frac{\lambda l \rho w^2}{d \cdot 2}$$

$$\Delta P_{\text{ск}} = \frac{\rho w^2}{2}$$

аналог кинетической энергии движения частицы

$$\lambda = A \cdot Re^n \Gamma l^m \Gamma \Delta^k$$

В результате экспериментов было показано, что для каналов различных сечений можно исключить  $\Gamma l$  использованием определяющего размера

$$d_{\text{экв}} = \frac{4F}{\Pi}$$

$$\lambda = A \cdot \text{Re}^n \Gamma \Delta^k$$

Задача - получить обработку экспериментальных данных для  $A$ ,  $n$  и  $k$ .

Удобнее всего это производится графической обработкой, для чего степенной многочлен линеаризуется в данном случае путем логарифмирования

$$\ln \lambda = \ln A + n \ln \text{Re} + k \ln \Gamma \Delta$$

Тогда имеем 3 неизвестных, а количество уравнений равно числу опытов.

N	...	Re	$\Gamma \Delta$	$\lambda$
-	-	-	-	-
-	-	-	-	-

обработка производится последовательно по критериям при фиксированных остальных.

$$\text{Re} = \text{var}, \Gamma \Delta = \text{const}$$

$$\ln \lambda = \ln A_1 + n \ln \text{Re}$$

$$y = b + ax$$

Удобнее всего, чтобы не нужно было логарифмировать использовать специальную бумагу с логарифмической сеткой. В ней точки должны укладываться на прямую линию.

Из графика уравнения прямой находится зависимость  $\lambda = A_1 \text{Re}^n$ . Затем тоже самое делается для фиксированного  $\text{Re}$  и определяется  $A$  и  $k$  и получается окончательный вид расчетного уравнения, которое в данном случае для первой области, соответствующей ламинарному режиму будет иметь вид:

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}} \quad (*)$$

Достоинства графической обработки:

- 1) наглядность, простота
- 2) возможность выявления промахов
- 3) возможность определения границ режимов

Если подставить (\*) в выражение для  $\Delta P$ , то получим:

$$\Delta P = \frac{64 \mu l}{w d p d} \frac{\rho w^2}{2} = \frac{32 \mu l w}{d^2} - \text{уравнение Гагена - Пуазейля.}$$

В этой области влияние  $\Gamma\Delta$  практически отсутствует.  
Для высокоразвитого турбулентного режима  $\lambda$  не зависит от  $Re$

$$\lambda = 0,11 \left( \frac{\Delta}{d} \right)^{0.25} \quad - \text{ вырождение критерия.}$$

При обработке экспериментальных данных так же бывают случаи, когда 2 критерия входят в одной и той же степени. Тогда критерии сливаются и область является автомодельной, т.е. моделирование в этих областях происходит автоматически, без специальных требований к критериям по отдельности.

Широко применяется так же статическая обработка экспериментальных данных, которая осуществляется методом наименьших квадратов. в нем избыточная система уравнений (например 100 уравнений – 3 неизвестных) приводится к нормальной (3 на 3) т.о. обеспечивая минимальную среднеквадратичную погрешность. Для этого разработана теория (XIX вв) и численные процедуры.

Свойства: Более высокая точность.

Принципиальные недостатки: противоположны графическим.

На практике используются комбинации. Аналогичные процедуры выполняются для получения уравнений из таблиц численных расчетов. Классический пример - уравнение Крауссольда в теплоотдаче.

$Nu = 0.032 Re^{0.8} Pr^{0.4}$  для турбулентного движения жидкости в трубе ( $\alpha \approx w^{0.8}$ )

#### 1.4. Физическое моделирование.

Заключается в изучении процессов и обработки конструкции промышленных аппаратов на их лабораторных моделях. Модели, как правило, уменьшены в размерах (могут быть увеличены). Изготавливаются чаще всего из оргстекла с прозрачными стеклами геометрически подобными проектируемому аппаратам, но с конструктивными упрощениями, не влияющими на распределение потоков и другие моделируемые (изучаемые) процессы. В качестве моделей веществ могут использоваться не только промышленные среды, но и любые вещества лишь бы были обеспечены требования моделирования. Обычно выбирают размеры приемлемых для лаборатории габаритов. Размеры: 0,5 м, 1 м; 5 м, 10-15 м.

Потоки внутри модели овидняются. Например: при использовании воды-можно применять подкрашенные струйки жидкости, иногда солевые растворы. Соответствие этому наблюдению осуществляется визуально: фото-или видеосъемка, при необходимости скоростная; фотоколориметры (ФЭК-М) измеряют интенсивность окраски; кондуктометр измеряет элек-

тропроводимость (то есть концентрацию солевого раствора); для воздуха применяют дымари (подачу струек или отдельных порций дыма).

Применяют также количественные методы. Тогда устанавливают измерительные трубки Пито (пневмометрические трубки), дифманометры, термометры.

Основное требование, обеспечивающее подобие в модели и образце устанавливается 3-ей теоремой подобия, которая обратна 1-ой теореме и на 1-ый взгляд очевидна:

$$\Pi_1'' = \Pi_1'$$

то есть, чтобы явления в модели были подобны процессам в промышленном аппарате, необходимо обеспечить равенство всех существенных критериев подобия. Набор таких критериев может быть различным для разных процессов и аппаратов.

Рассмотрим пример моделирования распределения воздуха в промышленной сушилке полочного типа на прозрачной лабораторной модели. Например, предлагается промышленная сушилка 3×3 м.

Задача состоит в обеспечении необходимого температурного режима и в обеспечении равномерности сушки на всех полках и по всей ширине.

Определяющими критерияльными соотношениями являются гидромеханические уравнения типа:

$$Eu = Eu(Re, \Gamma_1),$$

$$Fr \text{ исключен } (Fr = \frac{w^2}{g l}),$$

так как пренебрежимо малы шаговые силы.

$$No = \frac{w \cdot \tau}{l}$$

исключен, так как процесс стационарный и время не имеет значения, а  $\Gamma_\Delta$  - симплексе шероховатости исключен, так как принимается условно и аппарат с «гладкими» стенками, и шероховатостью можно пренебречь.

Нужно изучить равномерность распределения потоков воздуха над всеми полками и определить аэродинамическое сопротивление сушилки, так как оно теоретическим расчетам не поддается.

$$\text{Величина } \Delta p \rightarrow Eu = \frac{\Delta p}{\rho \cdot w^2}, \text{ а для распределения потоков вводится}$$

$$\text{безразмерная скорость, отнесенная к скорости на входе } \hat{w} = \frac{w_i}{w_0}.$$

Она является определяющим критерием уравнении с теми же самыми определяющими критериями. Возможны конструктивные меры изме-

нение ширины полок, расстояния между полками или организацией направляющих перегородок (закрылок).

При исследовании и проектировании изучаются характеристики моделей и затем на ней отрабатываются конструктивные решения. Затем изменение переносятся в чертежи и промышленный аппарат. Примерно таким образом моделируются не только ХТП и аппараты, но и огромные котлоагрегаты, а также гидросооружения, ирригационные системы (платины), в авиации, ракетостроении, судостроении и прочее. Это так называемая проблема масштабного перехода.

В качестве рабочего вещества могут использоваться воздух или вода (дистиллированная). Их выбирают исходя из удобства эксперимента и точности измерений при обеспечении равенства определяющих критериев.

Рассмотрим два варианта, воду и воздух, в качестве рабочих веществ.

Воздух:

Условие подобия

$$Re'' = Re', \quad \Gamma_1'' = \Gamma_1'.$$

Второе условие обеспечивается геометрическим подобием модели:

$$\frac{w'' d'' \rho''}{\mu''} = \frac{w' d' \rho'}{\mu'},$$

для воздуха приближенно предварительно можно считать

$$\rho' \approx \rho''; \quad \mu' \approx \mu''.$$

Потом можно учесть изменение плотности и вязкости от температуры и испарения влаги. Отсюда получаем скорость, которую нужно задать в модели:

$$w_0'' = w_0' \frac{d'}{d''} \cdot \frac{\rho'}{\rho''} \cdot \frac{\mu''}{\mu'} = 10 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1 = 50 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

то есть, для обеспечения подобия скорость должна увеличиваться пропорционально уменьшению размера модели.

Скорость слишком большая и неудобна для наблюдения. Посмотрим, получает ли сопротивление модель:

$$\Delta p_{\text{ск}} = \frac{\rho \cdot w^2}{2} = 1.2 \cdot \frac{50^2}{2} = 1500 \text{ Па } (\approx 1 \text{ мм.вод.ст.})$$

$$\Delta p_{\text{общ}} = \Sigma \zeta \cdot \Delta p_{\text{ск}} = 150 \cdot 6 = 900 \text{ мм.вод.ст.}$$

Промышленные вентиляторы обеспечивают обычно 100-150 мм. То есть необходимо использовать газодувку или компрессор, что для экспериментов также не удобно.

Вода:

$$w_0'' = 10 \cdot 5 \cdot \frac{1.2 \cdot 1 \text{ сП}}{1000 \cdot 0.02 \text{ сП}} = \frac{60}{20} = 3 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Это приемлемо для наблюдений. Сопротивления будут:

$$\Delta p_{\text{ск}} = \frac{1000 \cdot 9}{2} = 4500 \text{ Па} = 0.45 \text{ м.вод.ст.}$$

$$1 \text{ атм} \cong 10 \text{ м.вод.ст.}$$

$$\Delta p_{\text{общ}} = 0.45 \cdot 6 = 2.7 \text{ м} = 0.27 \text{ атм.}$$

Серийные промышленные центробежные насосы (К8/18) дают соответствующий напор 6-18 атм. реально и гарантировано.  $\Delta p_{\text{общ}} > 3 \div 4 \text{ атм.}$ , поэтому это также вполне приемлемо.

В результате в данном случае и в других аналогичных случаях целесообразно выбрать воду в качестве модельного вещества и выполнить с нею все эксперименты, а затем результаты использовать для отработки конструкции и для расчетов. Для наглядности можно использовать видеосъемку и видеопроказ. Если произвести показ отснятого материала с учетом геометрического масштаба  $l$  и скоростного  $Fr$ , то мы должны получить реальную картину движения потоков в промышленном аппарате.

Такое моделирование возможно только в достаточно простых аппаратах, поскольку при более сложных критериальных уравнениях типичными являются несовместность требования равенства критериев при изменении масштаба:

$$Re = \text{const}; Fr = \text{const}.$$

$$\frac{w'' d'' \rho''}{\mu''} = \frac{w' d' \rho'}{\mu'}; w'' \approx w' \cdot \frac{d'}{d''} \approx M$$

нужно увеличивать пропорционально масштабу

$$\frac{w''^2}{g'' l''} = \frac{w'^2}{g' l'}$$

$$w'' \approx \sqrt{w'^2 \cdot \frac{g'' l''}{g' l'}} = w' \sqrt{\frac{d''}{d'}} \approx \frac{l}{\sqrt{M}}$$

нужно уменьшать пропорционально  $\sqrt{M}$ , то есть требования  $Re$  и  $Fr$  несовместны.

В таких случаях возможно использование специальных методов. Например: моделирование в поле искусственных массовых сил, то есть центробежных.

Приближенное моделирование, когда выбирают наиболее важный критерий или усредненное значение обоих критериев.

Последовательное моделирование, когда обеспечиваются последовательные приближения 1-ого критерия, затем 2-го критерия и изучается влияние на физическую картину процесса. Здесь выводы сложнее и носят полуколичественный характер.

Используются методы аналогового и математического моделирования.

Однако имеются явления, для которых моделирование на традиционных закономерностях теории подобия принципиально не возможно из физических соображений, обычно при разном масштабе самих физич. явлений. Например: химический и каталитический процессы с учетом химизма реакции или процессы космических масштабов, земных, промышленная аппаратура, микрочастицы.

В настоящее время для исследований химических и даже биохимических процессов также широко применяют комплексные методы традиционной теории подобия в сочетании со специально разрабатываемыми конкретными зависимостями. В действительности оказываются закономерности подобия, аналогии, симметрии оказываются сходными с общефизическими закономерностями и вытекают из законов сохранения и закономерностей развития. Например: симметрия и аналогия имеется на всех уровнях материи, которые возможно наблюдать в научном эксперименте в настоящее время.

## **2. ТЕОРИЯ И ТЕХНИКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ**

### **2.1 Эксперимент в инженерной практике**

Общей чертой, объединяющей инженеров, социологов, биологов и др. является то, что они проводят эксперимент. Биологи на животных, инженеры на различных установках, вычислительных машинах и промышленных объектах.

Под экспериментом (от латинского *experiment*, переводится как “проба”, “опыт”) мы в дальнейшем будем понимать систему операций и воздействий на объект, предназначенных для получения информации об объекте, явлении на основе результатов измерений.

Эксперименты и экспериментаторы могут отличаться друг от друга, но фактически планирование, проведение и анализ всех экспериментов осуществляется в одинаковой последовательности. Хотя объекты исследований различны, методы экспериментальных исследований имеют много общего:

- каким бы простым эксперимент не был вначале ставится план его проведения;

- стремятся уменьшить число переменных, поскольку это упрощает его работу и делает ее более экономичной;

- все стараются исключить влияние внешних (случайных факторов);

- необходимо контролировать ход эксперимента;

всех интересует точность измерительных приборов и точность получения данных;

и наконец, в процессе любого эксперимента необходимо анализировать получаемые результаты и давать их интерпретацию, поскольку без этого решающего этапа весь процесс не имеет смысла.

Будем рассматривать инженерный эксперимент, причем под объектом исследования будем понимать либо модель физическую, либо модель математическую, реализованную в виде программного продукта на ПЭВМ, либо реальный процесс, устройство, конструкцию.

## **2.2 Классификация видов экспериментальных исследований**

По форме представления результатов выделяются следующие виды экспериментов:

**Качественный эксперимент.** Устанавливается факт существования каких-либо явлений, но количественных характеристик при этом не дается. Любой эксперимент, каким бы сложным он не казался, заканчивается представлением результатов, формулировкой выводов, выдачей рекомендаций. Эта информация может быть представлена в виде графиков, чертежей, таблиц, формул, статистических данных или словесных описаний. Качественный эксперимент, как правило, предусматривает именно словесное описание. Однако словесное описание – самый неэффективный способ представления результатов, поскольку не позволяет дать количественные рекомендации, анализировать свойства объекта в иных условиях, решать задачи его управления. В инженерной практике основное содержание эксперимента должно представляться числом или количественными зависимостями.

**Количественный эксперимент.** Позволяет не только фиксировать существование того или иного явления, но и устанавливать количественные взаимосвязи между факторами, определяющими протекание процесса, а также устанавливать математическую модель влияния этих факторов на то или иное явление.

По условиям проведения различают:

**Лабораторный эксперимент.** В лаборатории меньше влияние случайных погрешностей, обеспечивается большая "стерильность" условий проведения опытов, осуществляется в большинстве случаев и более тщательная подготовка, одним словом выше "культура эксперимента". Как правило, в лабораторных условиях экспериментатор может воспроизвести опыт "одинаково" значительно лучше, чем в промышленности. Это означает, что при прочих равных условиях для установления некоторого факта на заводе потребуются выполнить значительно больше опытов, чем в лаборатории. Другое важное отличие – различные ограничения на возможности варьирования факторами. Когда в лаборатории исследуется химическая



реакция, температуру по желанию можно менять в широких пределах, а в металлургических печах, напротив, если ее и можно менять, то в значительно более узком диапазоне и с большей осторожностью.

В промышленных экспериментах эти условия обеспечить значительно сложнее. Усложняются измерения и сбор информации, значительно больше влияние различного рода помех на организацию и проведение эксперимента, измерительные приборы, поэтому особенно необходимо использовать специальные методы. Требуется по возможно меньшему числу измерений получить наиболее достоверные результаты. Заметим, что в современной математической статистике имеются специальные методы, которые при том же количестве измерений позволяют повысить точность или даже при их уменьшении получить более представительную информацию.

По виду воздействий на объект различают:

Активный эксперимент – это такой эксперимент, когда уровень (значение) фактора для каждого опыта задает исследователь. Он целенаправленно изменяет условия функционирования процесса и наблюдает результаты. Такой эксперимент можно планировать.

Пассивный – это эксперимент, в котором уровень факторов регистрирует исследователь в каждом опыте, но не задает его значение. В дальнейшем он обрабатывает результаты такой регистрации и пытается давать рекомендации.

Здесь использовано новое понятие – фактор, под которым будем понимать контролируемые переменные объекта (явления), влияющие на количественные характеристики последнего. Количественные характеристики будем оценивать выходными величинами, функцией отклика.

### **2.3 Погрешности результатов экспериментальных исследований**

Результаты опытов обычно не являются точными. По различным причинам результаты любых двух параллельных опытов отличаются друг от друга, за исключением случайных совпадений. Экспериментатор, в какой бы области он не работал, почти всегда придерживается более или менее регулярной последовательности: вначале производится планирование, затем приобретается оборудование, после этого производятся испытания и наконец выполняется анализ и составляется отчет. При планировании и приобретении оборудования анализ ошибок должен быть на одном из первых мест.

Под точностью эксперимента понимают его качество, отражающее близость полученных результатов к истинному значению искомой величины. Точность эксперимента тем выше, чем меньше его погрешность.

Абсолютная погрешность – это разность  $\Delta x$  между результатом эксперимента  $x$  и истинным значением искомой величины  $x^*$ :

$$\Delta = |x - x^*|. \quad (2.1)$$

Относительная погрешность

$$\delta = \Delta x / X \quad (2.2)$$

Следует заметить, что истинное значение величины, определяемой в результате эксперимента, всегда остается неизвестным, поэтому и погрешности эксперимента могут быть оценены лишь приближенно.

Приведенной погрешностью называют отношение абсолютной погрешности  $\Delta x$  к нормирующему значению  $x_n$ , выраженному в процентах:

$$\gamma = \frac{\Delta x}{x_n} \cdot 100\%. \quad (2.2a)$$

В качестве нормирующего значения используют условно принятое значение измеряемой величины, выраженное в тех же единицах, в качестве которых, как правило, используют абсолютные значения разности верхнего и нижнего пределов шкалы.

При проведении эксперимента его погрешности принято условно разделять на систематические, случайные и грубые (промахи).

Систематической называется погрешность, которая при повторных экспериментах остается постоянной или изменяется закономерно. Наличие систематических погрешностей может быть обнаружено путем анализа условий измерения одного и того же значения измеряемой величины разными методами или приборами. Примером переменной систематической погрешности может быть погрешность от измерения (закономерно) напряжения источника питания, если результат измерения зависит от напряжения (например, потенциометр). Систематические погрешности нельзя уменьшить увеличением числа параллельных опытов. Должны устраняться вызывающие их причины. Общим методом выявления причин систематических погрешностей является калибровка (поверка), которая представляет собой поверку прибора во всем диапазоне измеряемой величины с помощью известного эталона. Прибор может давать очень малый разброс показаний, но результат будет неверным вследствие наличия систематической ошибки. Пример: пирометр излучения дает показания, ОС: 950, 952, 948, 950, 951 при истинном значении 1000 ОС (рис.2.1). Можно выделить следующие источники систематических погрешностей.

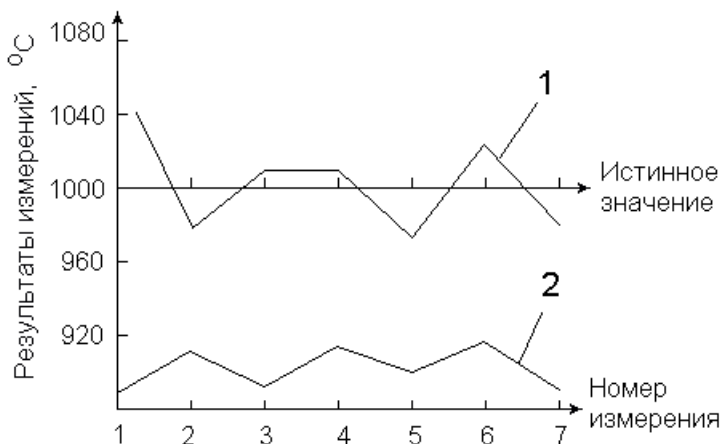


Рис. 2.1. Пример данных, иллюстрирующий различие между случайной и систематической погрешностями: 1 – измерения характеризуются наличием случайной погрешности; 2 – измерения характеризуются наличием систематической погрешности.

Инструментальные (приборные или аппаратурные) погрешности средств измерений называются такие, которые принадлежат данному средству измерений, они могут быть определены при его испытаниях и занесены в его паспорт. Принято различать основную погрешность средств измерений, т.е. погрешность в условиях, принятых за нормальные, и дополнительную погрешность, вызванную отклонением влияющих параметров за пределы области нормальных значений (вибрации, влажности среды, инерцией и т.п.);

Методические погрешности – это погрешности, которые не могут быть приписаны данному прибору, не смогут быть указаны в его паспорте, т.е. связаны не с самим прибором, а с методикой проведения измерений. Очень часто причиной возникновения методической погрешности является то, что организуя измерения, измеряют или вынуждены измерять не ту величину, которую в принципе требуется измерять, а некоторую другую, близкую, но не равную ей. Например, для измерения температуры поверхности тела по его тепловому излучению, зависящего не только от этой температуры, но и приведенной степени черноты  $\epsilon_{пр}$  ( $q = \epsilon_{пр} C_0 T_4$ ). (Определение температурного поля термически массивного тела по температуре его поверхности).

Отличительной особенностью методических погрешностей является то, что они могут быть определены лишь путем создания математической модели исследуемого объекта и не смогут быть найдены сколь угодно

тщательным исследованием лишь самого измерительного прибора. Действительно, определить температурное поле тела по температуре его поверхности можно только располагая математической моделью нагрева металла, а определить температуру поверхности по показаниям радиационного пирометра только при заданной (рассчитанной) степени черноты этого тела.

Субъективные погрешности, обусловленные особенностями исследователя (совпадение яркости накала лампы и излучаемого тела в оптических пирометрах, определяемое наблюдателем, и т.п.).

Следует иметь в виду, что полностью исключить систематические погрешности невозможно, так как методы и средства, с помощью которых обнаруживаются и оцениваются систематические погрешности, сами имеют свои погрешности.

Случайной называется погрешность, обусловленная действием ряда причин, меняющихся случайным образом от эксперимента к эксперименту. Значение этой погрешности не может быть определено в каждом эксперименте и на нее невозможно оказать влияние. В то же время в результате большого числа экспериментов могут быть выявлены некоторые закономерности, присущие этому типу погрешностей. К случайным относятся непостоянные погрешности, причины возникновения которых неизвестны. Эти погрешности, как правило, вызываются сложной совокупностью изменяющихся факторов, обычно неизвестные экспериментатору и трудно поддающиеся анализу. Таким образом, случайные погрешности представляют собой беспорядочные флуктуации показаний прибора относительно истинного значения измеряемой величины. Для исследования случайных погрешностей, возникающих при проведении эксперимента, широко используются математическая статистика и теория вероятностей.

Грубые погрешности (промахи) возникают вследствие непредвиденного изменения условий эксперимента, качества измерений, поломок прибора, неправильной записи в рабочих журналах, механических ударах прибора, неправильном отчете показаний прибора, отключении источника питания и т.п. Результат, содержащий грубую ошибку, резко отличается по величине от остальных измерений. Такие результаты должны быть исключены из рассмотрения до математической обработки результатов эксперимента.

### 3. МЕТОДЫ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТОВ. ЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

#### 3.1. Основные определения и понятия

Ранее мы рассматривали пассивный эксперимент и математическая статистика использовалась, в частности, при обработке экспериментальных данных. На стадии постановки эксперимента она не использовалась. При активном же эксперименте математическая статистика используется уже на стадии постановки и планирования эксперимента.

Пассивный эксперимент предусматривает накопление информации "в режиме нормальной эксплуатации", но это требует много времени и затрат. Поэтому предлагается "не ждать милостей от природы", а активно вмешиваться в ход технологического процесса: разбалтывать (покачивать) его тихонько, но целенаправленно, и быстро накапливать при этом информацию. Программа покачивания как раз и задается планом. Сам метод планирования может изменяться в зависимости от вида задачи, но принцип покачивания остается.

Теория планирования эксперимента началась с работ знаменитого английского ученого Р.Фишера в 30-х годах XX столетия, которую он использовал для решения агробиологических задач. В дальнейшем это направление было развито в пятидесятых годах в США Дж.Боксом и его сотрудниками. Отечественные ученые внесли большой вклад в развитие теории эксперимента, предложив ряд новых методов, а инженеры-исследователи все шире применяют эти методы на практике.

Под математической теорией планирования эксперимента будем понимать науку о способах составления экономичных экспериментальных планов, которые одновременно позволяют извлекать наибольшее количество информации об объекте исследования, о способах проведения эксперимента, о способах обработки экспериментальных данных и их использования для оптимизации производственных процессов, а также инженерных расчетов.

Принятая терминология — это либо перевод терминов с английского, либо просто их перенос в оригинале, это необходимо иметь в виду при чтении литературы по теории планирования экспериментов.

Истинный вид функции отклика  $y=f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_k)$  до эксперимента чаще всего неизвестен, в связи с чем для математического описания поверхности отклика используют уравнение

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_i + \sum_{i,j=1}^k \beta_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} x_i^2 + \dots \quad (6.1)$$

где  $x_i, x_j$  — переменные факторы при  $i=1, \dots, n; j=1, \dots, n; i \neq j$ ;

$$\beta_i = \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_0; \beta_{ij} = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_0; \beta_{ii} = \left( \frac{\partial^2 f}{2 \partial x_i^2} \right)_0 \quad - \text{коэффици-$$

енты.

Это уравнение является разложением в ряд Тейлора неизвестных функций отклика в окрестности точки с  $x_i = x_{i0}$ .

На практике по результатам эксперимента производится обработка данных по методу наименьших квадратов. Этот метод позволяет найти оценку  $b$  коэффициентов  $\beta$ , и данный полином заменяется уравнением вида:

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{i,j=1}^k b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^k b_{ii} x_i^2 + \dots, \quad (3.2)$$

которое является регрессионной моделью (моделью регрессионного анализа). В этом выражении  $\hat{y}$  означает модельное, т.е. рассчитываемое по уравнению модели, значение выхода. Коэффициенты регрессии определяются экспериментально и служат для статистической оценки теоретических коэффициентов, т.е.

$$b_0 \rightarrow \beta_0, \quad b_i \rightarrow \beta_i, \quad b_{ij} \rightarrow \beta_{ij}, \quad b_{ii} \rightarrow \beta_{ii}.$$

В регрессионной модели члены второй степени  $x_i x_j, x_i^2$  характеризуют кривизну поверхности отклика. Чем больше кривизна этой поверхности, тем больше в модели регрессии членов высшей степени. На практике чаще всего стремятся ограничиться линейной моделью.

Последовательность активного эксперимента заключается в следующем.

1. Разрабатывается схема проведения исследований, т.е. выполняется планирование эксперимента. При планировании экспериментов обычно требуется с наименьшими затратами и с необходимой точностью либо:

- а) построить регрессионную модель процесса;
- б) определить его оптимальные условия.

2. Осуществляется реализация опыта по заранее составленному исследователем плану, т.е. осуществляется сам активный эксперимент.

3. Выполняется обработка результатов измерений, их анализ и принятие решений.

Таким образом, планирование эксперимента — это процедура выбора условий проведения опытов, их количества, необходимых и достаточных для решения задач с поставленной точностью.

Использование теории планирования эксперимента обеспечивает:

1. Минимизацию, т.е. предельное сокращение необходимого числа опытов.
2. Одновременное варьирование всех факторов.
3. Выбор четкой стратегии, что позволяет принимать обоснованные решения после каждой серии опытов.
4. Минимизацию ошибок эксперимента за счет использования специальных проверок.

Для иллюстрации некоторых из этих положений воспользуемся ставшим уже классическим примером из книги В.В. Налимова, Т.И. Голикова. Логические основания планирования эксперимента. М.: Металлургия, 1980. 152 с.

### **3.2. Пример «хорошего» и «плохого» эксперимента**

Рассмотрим пример — взвешивание трех объектов А, В, С на аналитических весах. Первый, традиционный подход, предусматривает последовательное взвешивание каждого из образцов. Так поступает традиционно исследователь: вначале он делает холостое взвешивание для определения нулевой точки весов, а затем по очереди взвешивают каждый из образцов. Это пример традиционного использования однофакторного эксперимента, т.е. здесь исследователь изучает реакцию на поведение каждого из факторов в отдельности. Традиционная схема взвешивания трех объектов представлена в табл.3.1.

Таблица 3.1

Традиционное проведение эксперимента \*

Номер опыта	А	В	С	Результат взвешивания
1	-1	-1	-1	$y_0$
2	+1	-1	-1	$y_1$
3	-1	+1	-1	$y_2$
4	+1	+1	+1	$y_3$

\* Когда образец кладется на весы, в таблице ставится +1, когда он на весах отсутствует, то -1.

Масса каждого объекта оценивается только по результатам двух опытов: того опыта, в котором на весы был положен изучаемый объект, и холостым опытом. Например, масса объекта А равна  $m_A = y_1 - y_0$ . Как обычно, ошибка взвешивания предполагается независимой от взвешиваемой величины, аддитивной и имеющей одно и тоже распределение. Тогда дисперсия измерения веса образца равна

$$\sigma_A^2 = \sigma_{y_1}^2 + \sigma_{y_0}^2 = 2\sigma^2, \quad (3.3)$$

где  $\sigma^2$  — дисперсия любого взвешивания. Такими же будут и дисперсии весов образцов В и С.

Приведем теперь тот же эксперимент по несколько иной схеме, задаваемой матрицей планирования, приведенной в табл.3.2.

Таблица 3.2

Планирование эксперимента при взвешивании трех объектов

Номер опыта	А	В	С	Результат взвешивания
1	+1	-1	-1	$y_1$
2	-1	+1	-1	$y_2$
3	-1	-1	+1	$y_3$
4	+1	+1	+1	$y_4$

В первых трех опытах последовательно взвешивают объекты А, В, С, в последнем опыте взвешивают объекты А, В, С, т.е. все три объекта вместе, а "холостое" взвешивание не производится.

Легко заметить, что масса каждого объекта будет задаваться формулами



$$\begin{aligned}
m_A &= \frac{1}{2}(y_1 - y_2 - y_3 + y_4); \\
m_B &= \frac{1}{2}(y_2 - y_1 - y_3 + y_4); \\
m_C &= \frac{1}{2}(y_3 - y_1 - y_2 + y_4).
\end{aligned}
\tag{3.4}$$

Масса объекта А, вычисленная по приведенной выше формуле, оказывается не искаженной массами весов объектов В и С, т.к. масса каждого из них входит в формулу для массы А дважды с разными знаками.

Найдем теперь дисперсию, связанную с ошибкой взвешивания по новой схеме постановки экспериментов

$$\sigma_A^2 = \frac{1}{4}(\sigma_{y_1}^2 + \sigma_{y_2}^2 + \sigma_{y_3}^2 + \sigma_{y_4}^2) = \sigma^2.
\tag{3.5}$$

Аналогичным образом находим:

$$\sigma_B^2 = \sigma^2, \quad \sigma_C^2 = \sigma^2.$$

Мы видим, что при новой схеме дисперсия взвешивания получается вдвое меньше, чем при традиционной схеме, хотя в обоих случаях на взвешивание трех объектов затрачивалось по четыре опыта.

Зададимся вопросом: "В результате чего происходит увеличение точности экспериментов в два раза?".

В первом случае эксперимент был поставлен так, что каждую массу мы получали лишь из двух взвешиваний. При новой схеме взвешивания каждая масса вычислялась уже по результатам всех четырех взвешиваний. **Вторую схему можно назвать многофакторной, т.к. здесь оперируют всеми факторами так, что каждая масса вычислялась по результатам сразу всех опытов, проведенных в данной серии экспериментов — вот главная причина уменьшения дисперсии вдвое.**

Не подумайте, что мы зря потратили время на обсуждение такой тривиальной задачи. Точно такой же подход используется при изучении других, более сложных задач.

Таким образом, использование теории планирования эксперимента может явиться одним из путей существенного повышения эффективности многофакторных экспериментальных исследований.

В планировании экспериментов используются, в основном, планы первого и второго порядков. Планы более высоких порядков используются в инженерной практике редко. В связи с этим далее приводится краткое изложение методики составления планов эксперимента для моделей первого и второго порядков.

**Под планами первого порядка понимают такие планы, которые позволяют провести эксперимент для отыскания уравнения регрессии, содержащего только первые степени факторов и их произведения**

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^k b_{ij} x_i x_j + \sum_{\substack{i,j,u=1 \\ i \neq j \neq u}}^k b_{iju} x_i x_j x_u + \dots \quad (3.6)$$

Планы второго порядка позволяют провести эксперимент для отыскания уравнения регрессии, содержащего и вторые степени факторов.

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{i=1}^k b_{ii} x_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^k b_{ij} x_i x_j + \dots \quad (3.7)$$

Нахождение уравнения регрессии методом планирования экспериментов состоит из следующих этапов:

- выбор основных факторов и их уровней;
- планирование и проведение собственно эксперимента;
- определение коэффициентов уравнения регрессии;
- статистический анализ результатов эксперимента.

### 3.3. Планирование первого порядка

На первой стадии исследования обычно принимают полином первой степени. Так, для трехфакторной задачи теоретическое уравнение регрессии имеет вид

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^3 \beta_i x_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 \beta_{ij} x_i x_j + \beta_{123} x_1 x_2 x_3. \quad (3.8)$$

Уравнение регрессии, получаемое на основании результатов эксперимента, в отличие от приведенного теоретического уравнения, имеет вид

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^3 b_i x_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 b_{ij} x_i x_j + b_{123} x_1 x_2 x_3, \quad (3.9)$$

где коэффициенты регрессии  $b_0, b_1, \dots, b_3, \dots, b_{123}$  являются оценками для теоретических коэффициентов регрессии, т.е.

$$b_i \rightarrow \beta_i, \quad b_{ij} \rightarrow \beta_{ij}, \quad b_{123} \rightarrow \beta_{123}.$$

Члены, содержащие произведения  $x_1 x_2, x_2 x_3$  и т.д., называют членами, отражающими попарное взаимодействие факторов, члены вида  $x_1 x_2 x_3$  — членами тройного взаимодействия.

### 3.3.1. Выбор основных факторов и их уровней

В качестве факторов можно выбирать только контролируемые и управляемые переменные, т.е. такие, которые исследователь может поддерживать постоянными в течение каждого опыта на заданном уровне. В число факторов должны быть включены параметры процесса, оказывающие наиболее сильное влияние на функцию отклика. Необходимо заметить, что несмотря на всю заманчивость и очевидные преимущества активного спланированного эксперимента перед пассивным, в его применении имеется целый ряд трудностей, связанных с определенными ограничениями на его реализацию. Важнейшим условием применимости этого подхода является управляемость процессов по каждому из выбранных факторов, т.е. возможность независимого изменения каждого из этих факторов и поддержания его на заданном уровне в период проведения опытов.

Для каждого фактора необходимо указать тот интервал изменения параметров, в пределах которого ставится исследование. Для этого на основе априорной информации устанавливаются ориентировочные значения факторов  $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{i0}, \dots, x_{k0}$ . Этой комбинации значений факторов соответствует точка в многомерном факторном пространстве, которая принимается за исходную точку. Координаты этой точки принимаются за основной (нулевой) уровень.

Интервалом варьирования факторов называется некоторое число (каждое для соответствующего фактора), прибавление которого к основному уровню дает верхний, а вычитание — нижний пределы. Для упрощения записи условий эксперимента и обработки экспериментальных данных масштабы по осям выбираются так, чтобы верхний уровень составлял +1, нижний -1, а основной — 0.

Для факторов с непрерывной областью определения это достигается с помощью преобразования (кодирования факторов)

$$X_j = \frac{x_j - x_{j0}}{\Delta x_j}. \quad (3.10)$$

**В теории планирования экспериментов показано, что минимально необходимое число уровней факторов на единицу больше порядка уравнения.**

### 3.3.2. Планирование эксперимента

Рассмотрим сначала частный случай, когда функция отклика линейно зависит от трех независимых факторов. Уравнение регрессии в этом случае имеет вид (3.9), а план эксперимента представлен в табл. 3.3.

Таблица 3.3

Таблица полного факторного эксперимента для трех факторов

Номер опыта	План								Результат $y_i$
	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1$ $x_2$	$x_1$ $x_3$	$x_2$ $x_3$	$x_1$ $x_2$ $x_3$	
1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	$y_1$
2	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	$y_2$
3	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	$y_3$
4	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	$y_4$
5	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	$y_5$
6	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	$y_6$
7	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	$y_7$
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	$y_8$

Здесь добавлен столбец фиктивной переменной  $x_0$ , нужный для оценки свободного члена  $b_0$ . После реализации плана получают 4 уравне-

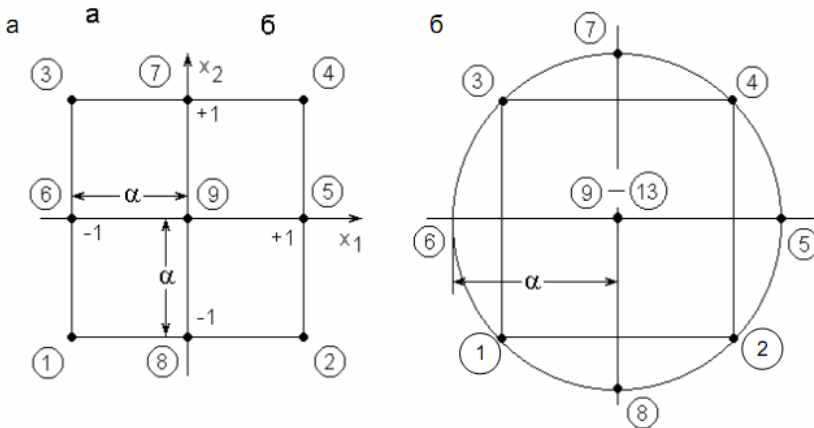
ния с 4 неизвестными, их решение и даст оценку всех 8 коэффициентов регрессии  $b_0, b_1, \dots, b_3, b_{12}, \dots, b_{123}$ .

**План, в котором число опытов равно числу определяемых коэффициентов, называется насыщенным.**

Заметим, что мы использовали все точки с "крайними" координатами, т.е.  $\pm 1$ , или говоря другими словами, все возможные комбинации выбранных уровней. В самом деле, всех возможных комбинаций  $2^k=8$ , ( $k$  — число факторов) и мы все их использовали. Если эксперименты проводятся только на двух уровнях (при двух значениях факторов) и при этом в процессе эксперимента осуществляются все возможные неповторяющиеся комбинации из  $k$  факторов, то постановка опытов по такому плану носит название полного факторного эксперимента (ПФЭ) или  $2^k$ .

Иными словами, **полный факторный эксперимент (ПФЭ) — это эксперимент, реализующий все возможные неповторяющиеся комбинации уровней независимых факторов.**

Кодированный план геометрически может быть интерпретирован в виде куба, восемь вершин которого представляют собой восемь экспериментальных точек (рис.3.1).



**Рис.3.1.** Геометрическое изображение ПФЭ

При числе факторов  $k=2$  построение матрицы ПФЭ не вызывает затруднений, при увеличении же числа факторов возникает необходимость в некоторых специальных приемах построения матрицы.

Первый прием основан на чередовании знаков. В первом столбце (для  $x_1$ ) знаки чередуются поочередно. Во втором (для  $x_2$ ) — через 2, в третьем (для  $x_3$ ) — через 4 и т.д. по степеням двойки  $2^k$ . Этот подход и использован при составлении плана, представленного в табл.3.3.

Второй прием основан на последовательном достраивании матрицы. Для этого при добавлении нового фактора необходимо повторить комбинации уровней исходного плана — сначала при значениях нового фактора на верхнем уровне, а затем — на нижнем.

Матрица ПФЭ обладает следующими свойствами.

1. Свойство симметричности: алгебраическая сумма элементов вектор-столбца каждого фактора равна нулю (за исключением столбца соответствующего свободному члену)

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = 0, \quad (3.12)$$

где  $i$  — номер фактора;  $j$  — номер опыта.

2. Свойство нормирования: сумма квадратов элементов каждого столбца равна числу опытов

$$\sum_{j=1}^n X_{ij}^2 = n. \quad (3.13)$$

3. Свойство ортогональности: скалярное произведение всех вектор-столбцов (сумма почленных произведений любых двух вектор-столбцов матрицы) равно нулю.

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} X_{uj} = 0, \quad i \neq u. \quad (3.14)$$

**Планы, для которых выполняется свойство 3, называют ортогональными.** Благодаря этому свойству резко уменьшаются трудности, связанные с расчетом коэффициентов уравнения регрессии.

Поскольку результаты наблюдений отклика носят случайный характер, приходится в каждой точке плана проводить не один, а  $m^*$  параллельных опытов (обычно  $m^*=2÷4$ ), осреднение результатов которых, как

уже отмечалось, дает возможность уменьшить погрешности оценки истинного значения отклика в  $\sqrt{m^*}$  раз.

В каждой серии экспериментов их последовательность рандомизируется, т.е. с помощью таблиц случайных чисел определяется случайная последовательность реализации экспериментов. Рандомизация дает возможность свести эффект некоторого случайного фактора к случайной погрешности. Это позволяет в определенной степени исключить предвзятость и субъективизм исследователя, а также систематические ошибки, связанные, например, с разогревом или охлаждением агрегатов и др. факторов при исследовании процесса.

### 3.3.3. Определение коэффициентов уравнения регрессии

Воспользуемся свойствами ПФЭ для определения коэффициентов уравнения регрессии методом наименьших квадратов

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2.$$

$$\Phi = \sum_{j=1}^n (y_j - \hat{y}_j)^2 \rightarrow \min; \quad b_i$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial b_1} = 2 \sum_{j=1}^n (y_j - b_0 - b_1 X_{1j} - b_2 X_{2j}) X_{1j} = 0; \quad (3.15)$$

$$\sum_{j=1}^n y_j X_{1j} - b_0 \sum_{j=1}^n X_{1j} - b_1 \sum_{j=1}^n X_{1j}^2 - b_2 \sum_{j=1}^n X_{1j} X_{2j} = 0.$$

Воспользуемся свойствами ПФЭ:

- (симметричности)  $b_0 \sum X_{1j} = 0$ ;
- (нормирования)  $b_1 \sum X_{1j}^2 = nb_1$ ;
- (ортогональности)  $b_2 \sum X_{1j} X_{2j} = 0$ ;

$$b_1 = \frac{\sum_{j=1}^n y_j X_{1j}}{n}; \quad b_2 = \frac{\sum_{j=1}^n y_j X_{2j}}{n}; \quad b_0 = \frac{\sum_{j=1}^n y_j X_{0j}}{n}. \quad (3.16)$$

Следовательно, **любые коэффициенты уравнения регрессии определяются скалярным произведением столбца  $y$  на соответствующий столбец  $X$ .**

Можно показать, что аналогичным образом определяются и коэффициенты, если в уравнении регрессии (3.6) учитываются линейные взаимодействия (двойные, тройные)

$$b_{12} = \frac{\sum_{j=1}^n y_j (X_1 X_2)_j}{n}; \quad b_{123} = \frac{\sum_{j=1}^n y_j (X_1 X_2 X_3)_j}{n} \text{ и т.д. (3.17)}$$

Следует обратить особое внимание на то, что **все линейные коэффициенты независимы**, так как в формулы для их расчета (3.16), (3.17) входят свои одноименные переменные. Поэтому **каждый коэффициент характеризует роль соответствующей переменной в процессе или силу влияния факторов**. Чем больше численная величина коэффициента, тем большее влияние оказывает этот фактор. Если коэффициент имеет знак плюс, то с увеличением значения фактора отклик увеличивается, а если минус — уменьшается.

В результате получения уравнения регрессии может получиться так, что один (или несколько) коэффициентов не очень большие и окажутся незначимыми. Факторы, имеющие коэффициенты, незначимо отличающиеся от нуля, могут быть выведены из состава уравнения, так как их влияние на параметры отклика будет отнесено к ошибке эксперимента. **Учитывая ортогональность плана оставшиеся коэффициенты уравнения регрессии можно не пересчитывать.** При отсутствии ортогональности плана эксперимента все коэффициенты необходимо пересчитывать заново.

### 3.3.4. Статистический анализ результатов эксперимента

Планирование эксперимента исходит из статистического характера зависимостей, поэтому полученные уравнения подвергаются тщательному статистическому анализу с целью извлечь из результатов эксперимента максимум информации и убедиться в достоверности полученной зависимости и ее точности. Процедура проверки значимости коэффициентов уравнения регрессии и его адекватности принципиально не отличается от



описания, данного в параграфах 4.5.1 и 4.5.2., поэтому остановимся только на отдельных моментах. Как уже отмечалось ранее, каждый эксперимент несет в себе какую-то погрешность, для повышения надежности результатов производятся повторения опытов при тех же условиях, т.е. повторяются опыты  $m^*$  раз для каждой строки таблицы планирования.

Построчные (выборочные) дисперсии подсчитываются по формуле

$$S_j^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m^*} (y_{ji} - \bar{y}_j)^2}{m^* - 1}, \quad (3.18)$$

где  $m^*$  — число опытов в точках плана;  $\bar{y}_j = \frac{\sum_{i=1}^{m^*} y_{ji}}{m^*}$  — средний отклик по  $m^*$  опытам в точке с номером  $j$ .

Дисперсия воспроизводимости (отклика)  $S_{\text{ВОСП}}^2$  есть среднеарифметическое дисперсий всех  $n$  различных вариантов опытов

$$S_{\text{ВОСП}}^2 = \frac{\sum_{j=1}^n S_j^2}{n} = \frac{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{m^*} (y_{ji} - \bar{y}_j)^2}{n(m^* - 1)}, \quad (3.19)$$

которая представляет собой среднюю арифметическую величину из  $n$  дисперсий различных вариантов эксперимента.

Прежде чем производить объединение дисперсий, следует убедиться в их однородности. Проверка производится с помощью критерия Фишера или Кохрена (см. гл. 3). Для оценки значимости коэффициентов прежде всего находят дисперсию коэффициентов регрессии. Учитывая свойства 1-3 плана табл. 3.3 из выражений (4.27а) и (4.27б) при одинаковом дублировании опытов по точкам с числом повторных опытов  $m^*$  она определяется по формуле

$$S_b^2 = \frac{S_{\text{ВОСП}}^2}{m^* n}, \quad (3.20)$$

а при отсутствии дублирования по соотношению

$$S_b^2 = \frac{S_{\text{восп}}^2}{n}. \quad (3.20a)$$

Следовательно, все коэффициенты уравнения регрессии ПФЭ имеют одинаковую точность (дисперсию). Это принципиальное отличие коэффициентов уравнения регрессии, полученных по плану табл.3.3, от коэффициентов уравнений, полученных пассивным экспериментом. **Планы, по результатам которых коэффициенты уравнения регрессии определяются с одинаковой дисперсией, называются ротатабельными.** В связи с этим план, представленный в табл.3.3, является не только ортогональным, но ротатабельным. В дальнейшем проверка значимости каждого коэффициента производится независимо с использованием t-критерия Стьюдента (см. гл.4). Статистически незначимые коэффициенты исключаются из уравнения, а остальные коэффициенты при этом не пересчитываются. После этого уравнение регрессии составляется в виде уравнения связи выходного параметра  $y$  и переменных  $X_i$ , включающего только значимые коэффициенты.

После вычисления коэффициентов уравнения следует прежде всего проверить его пригодность или адекватность. Для этого достаточно оценить отклонение выходной величины  $\hat{y}$ , предсказанной уравнением регрессии, от результатов эксперимента  $y$  в различных точках.

Рассеяние результатов эксперимента относительно уравнения регрессии, аппроксимирующего искомую зависимость, можно, как уже было показано ранее, охарактеризовать с помощью остаточной дисперсии (дисперсии адекватности), оценка которой, справедливая при одинаковом числе дублирующих опытов, находится по формуле

$$S_{\text{ад}}^2 = \frac{m * \sum_{j=1}^n (\bar{y}_j - \hat{y}_j)^2}{n - 1}. \quad (3.21)$$

Здесь  $n$  — число опытов (вариантов);  $l=k+1$ , где  $k$  — число членов в уравнении регрессии.

Проверка адекватности состоит в выяснении соотношения между дисперсией адекватности  $S_{\text{ад}}^2$  и дисперсией воспроизводимости  $S_{\text{восп}}^2$  и

проводится с помощью F-критерия Фишера, который в данном случае рассчитывается как

$$F_{\text{эксп}} = \frac{S_{\text{ад}}^2}{S_{\text{восп}}^2}. \quad (3.22)$$

Если вычисленное значение критерия меньше теоретического  $F_{\alpha; m_1; m_2}$  для соответствующих степеней свободы  $m_1 = n(m^* - 1)$ ,  $m_2 = n - 1$  при заданном уровне значимости  $\alpha$ , то описание свойств объекта уравнением регрессии признается адекватным объекту. Адекватность модели может быть достигнута уменьшением интервала варьирования факторов, а если это не дает результата, то переходом к плану второго порядка.

### 3.3.5. Дробный факторный эксперимент

Во многих практических задачах взаимодействия второго и высших порядков отсутствуют или пренебрежимо малы. Кроме того, на первых этапах исследования часто необходимо получить в первом приближении лишь линейную аппроксимацию изучаемого уравнения связи при минимальном числе экспериментов. Так, для трех факторов вместо уравнения (3.9) достаточно рассмотреть уравнение вида

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 \quad (3.23)$$

и достаточно определить только четыре коэффициента.

Поэтому использовать ПФЭ для определения коэффициентов только при линейных членах не эффективно из-за реализации большого числа опытов, особенно при большом числе факторов  $k$ .

Если при решении задачи можно ограничиться линейным приближением, то в ПФЭ оказывается много "лишних" опытов. Так, для трех факторов достаточно 4 опыта, а в ПФЭ их 8. Следовательно, есть четыре "лишних". Результаты этих "лишних" опытов могут быть использованы двояко: во-первых, с их помощью можно получить более точные оценки коэффициентов регрессии; во-вторых, их можно использовать для проверки адекватности модели. Однако при 7 факторах ПФЭ содержит  $2^7 = 128$  опытов, а для линейного уравнения требуется всего 8. Таким образом, остается 120 лишних, и конечно, нет необходимости их все реализо-

вать, а достаточно лишь несколько из них использовать для проверки адекватности и уточнения оценок.

Другими словами, ПФЭ обладает большой избыточностью опытов. В связи с этим возникает вопрос: “Нельзя ли сократить число опытов необходимых для определения коэффициентов регрессии?”.

Так, для определения коэффициентов уравнения (3.23) достаточно ограничиться четырьмя опытами, если в ПФЭ  $2^3$  использовать  $x_1x_2$  в качестве плана для  $x_3$  и матрица планирования эксперимента примет вид, представленный в табл.3.4.

Таблица 3.4

Дробный факторный эксперимент

Номер опыта	План				Результат у
	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3 = x_1x_2$	
1	+1	-1	-1	+1	$y_1$
2	+1	+1	-1	-1	$y_2$
3	+1	-1	+1	-1	$y_3$
4	+1	+1	+1	+1	$y_4$

Заметим, что мы использовали не все точки с "крайними" координатами, т.е.  $\pm 1$ , или говоря другими словами, не все возможные комбинации выбранных уровней. В самом деле, всех возможных комбинаций  $2^3=8$ , мы же использовали из них только 4.

**Такой сокращенный план — носит название дробного факторного эксперимента (ДФЭ).** Следует подчеркнуть, что формальное приравнение произведения факторов фактору, не входящему в это произведение, является основополагающей идеей метода ДФЭ. В данном случае используется только половина ПФЭ  $2^3$ , поэтому план, представленный в табл.3.4, называется полурепликой от ПФЭ  $2^3$ . После реализации плана получают 4 уравнения с 4 неизвестными, их решение и даст оценку всех четырех коэффициентов регрессии  $b_i$ . Например, матрица из 8 опытов для четырехфакторного планирования будет полурепликой от ПФЭ  $2^4$ , а для пятифакторного планирования — четвертьрепликой от  $2^5$ .

**Для того, чтобы дробная реплика представляла собой ортогональный план, в качестве реплика следует брать ближайший полный**

**факторный эксперимент.** При этом число опытов должно быть больше числа коэффициентов.

Если коэффициенты регрессии при парных произведениях не равны нулю, то найденные коэффициенты  $b_i$  будут смешанными оценками их теоретических коэффициентов  $\beta_i$ . На практике обычно не удастся априорно постулировать равенство нулю эффектов взаимодействия, однако часто имеются основания полагать, что некоторые из них малы по сравнению с линейными эффектами. Операцию смешивания оценок принято условно записывать в виде выражений

$$b_1 = \beta_1 + \beta_{12}; \quad b_2 = \beta_2 + \beta_{13}; \quad b_3 = \beta_3 + \beta_{23}, \quad (3.24)$$

где  $\beta$  — математическое ожидание для соответствующего коэффициента.

Эти генерирующие коэффициенты не могут быть отдельно оценены по плану, включающему всего четыре столбца, т.к. в этом случае неразличимы столбцы для линейных членов и парных произведений. Если, например, в дополнение к столбцам, вычислить еще столбцы для произведения  $x_1x_3$ , то увидим, что элементы этого столбца в точности равны элементам столбца  $x_2$ . Таким образом, сокращение числа опытов приводит к получению смешанных оценок для коэффициентов.

Для того, чтобы определить, какие коэффициенты смешаны, удобно пользоваться следующим приемом: подставив  $x_3$  на место  $x_1x_2$ , получим соотношение  $x_3 = x_1x_2$ , называемое генерирующим соотношением.

Умножив обе части генерирующего соотношения на  $x_3$ , получим

$$X_3^2 = X_1X_2X_3 = 1, \quad \text{т.е.} \quad X_1X_2X_3 = 1. \quad (3.25)$$

Это произведение носит название определяющего контраста.

Умножив поочередно определяющий контраст на  $x_1, x_2, x_3$ , находим

$$X_1 = X_1^2X_2X_3 = X_2X_3; \quad X_2 = X_1X_3; \quad X_3 = X_1X_2. \quad (3.26)$$

Полученным соотношениям соответствует система смешанных оценок, т.е.  $\beta_1$  смешана с  $\beta_{23}, \beta_2$  — с  $\beta_{13}, \beta_3$  — с  $\beta_{12}$ .

Кроме соотношения  $X_3 = X_1X_2$ , возможны следующие случаи приравнивания одних факторов к взаимодействиям других факторов:  $X_2 = X_1X_3, X_1 = X_2X_3$ . Соответствующий набор возможных операций смешанных оценок коэффициентов модели для них примет вид:  $b_2 \rightarrow \beta_2 + b_{13}, b_1 \rightarrow \beta_1 + b_{23}$ .

Таким образом, при использовании ДФЭ необходимо иметь четкое представление о так называемой разрешающей способности дробных реплик, т.е. определить заранее, какие коэффициенты являются несмешанными оценками для соответствующих коэффициентов. Тогда в зависимости от постановки задачи подбирается дробная реплика, с помощью которой можно извлечь максимальную информацию из эксперимента.

Например, в задаче с четырьмя факторами  $k=4$  в качестве генерирующего соотношения можно взять  $x_4=x_1x_2x_3$  или любой из эффектов двойного взаимодействия, например  $x_4=x_1x_2$ . Таблица планирования эксперимента представлена в табл.3.5.

Таблица 3.5

Планирование ДФЭ

Номер опыта	План				Генерирующие соотношения	
	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4=x_1x_2x_3$	$x_4=x_1x_2$
1	+1	-1	-1	-1	-1	+1
2	+1	+1	-1	-1	+1	-1
3	+1	-1	+1	-1	+1	-1
4	+1	+1	+1	-1	-1	+1
5	+1	-1	-1	+1	+1	+1
6	+1	+1	-1	+1	-1	-1
7	+1	-1	+1	+1	-1	-1
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1

В первом случае определяющий контраст  $X_4^2=X_1X_2X_3X_4=1$  и получим оценку совместных оценок

$$X_1 = X_2X_3X_4 \rightarrow b_1 \rightarrow \beta_1 + \beta_{234};$$

$$X_2 = X_1X_3X_4 \rightarrow b_2 \rightarrow \beta_2 + \beta_{134};$$

$$X_3 = X_1X_2X_4 \rightarrow b_3 \rightarrow \beta_3 + \beta_{124};$$

$$X_4 = X_1X_2X_3 \rightarrow b_4 \rightarrow \beta_4 + \beta_{123};$$

$$X_1X_4 = X_2X_3 \rightarrow b_{14} \rightarrow \beta_{14} + \beta_{23};$$

$$X_1X_2 = X_3X_4 \rightarrow b_{12} \rightarrow \beta_{12} + \beta_{34};$$

$$X_1X_3 = X_2X_4 \rightarrow b_{13} \rightarrow \beta_{13} + \beta_{24}.$$

В реальных задачах тройные взаимодействия бывают равным нулю значительно чаще, чем двойные. Значит, если по физическому смыслу задачи более всего интересуют оценки для линейный эффектов, следует брать генерирующее соотношение  $X_4 = X_1 X_2 X_3$ .

Во втором случае определяющий контраст выражается соотношением  $X_4^2 = X_1 X_2 X_3 = 1$ ;  $X_1 X_2 X_3 = 1$ .

При этом получим следующую систему оценок.

$$X_1 = X_2 X_4; \quad b_1 \rightarrow \beta_1 + \beta_{24};$$

$$X_2 = X_1 X_4; \quad b_2 \rightarrow \beta_2 + \beta_{14};$$

$$X_3 = X_1 X_2 X_3 X_4; \quad b_3 \rightarrow \beta_3 + \beta_{1234};$$

$$X_4 = X_1 X_2; \quad b_4 \rightarrow \beta_4 + \beta_{12};$$

$$X_1 X_2 = X_2 X_3 X_4; \quad b_{12} \rightarrow \beta_{12} + \beta_{234};$$

$$X_2 X_3 = X_1 X_3 X_4; \quad b_{23} \rightarrow \beta_{23} + \beta_{134};$$

$$X_3 X_4 = X_1 X_2 X_3; \quad b_{34} \rightarrow \beta_{34} + \beta_{123}.$$

Следовательно, дробную реплику с генерирующим соотношением  $X_4 = X_1 X_2$  имеет смысл использовать, если нас более всего интересуют коэффициенты  $\beta_{12}$ ,  $\beta_{23}$ ,  $\beta_{34}$ .

Дробную реплику, в которой  $P$  линейных эффектов приравнены к эффектам взаимодействия, обозначают  $2^{k-P}$ .

Таким образом, планы первого порядка, оптимальные двухуровневые планы ПФЭ  $2^k$  и ДФЭ  $2^{k-P}$  имеют следующие преимущества:

- 1 – планы ортогональны, поэтому все вычисления просты;
- 2 – все коэффициенты определяются независимо один от другого;
- 3 – каждый коэффициент определяется по результатам всех  $n$  опытов;
- 4 – все коэффициенты регрессии определяются с одинаковой дисперсией, т.е. эти планы обладают одновременно и свойством ротатабельности.

### 3.3.6. Разработка модели гидравлического режима четырехзонной печи

В качестве примера рассмотрим разработку математической модели гидравлического режима четырехзонной методической печи с использованием теории планирования эксперимента. При планировании опытов использовалась методика проведения дробного факторного эксперимента (ДФЭ) первого порядка с двухуровневым варьированием факторов.

Перед разработкой плана эксперимента на основе априорной информации были выявлены факторы, влияющие на величину давления в томильной зоне печи. К числу таких факторов относится: расходы топлива на каждую зону нагрева и угол поворота дымового клапана. Расходы воздуха на каждую зону в качестве факторов не фигурировали, поскольку схема управления горением топлива автоматически меняет расход воздуха при изменении расхода газа.

Обозначим факторы:  $X_1$  — расход газа на томильную зону,  $\text{м}^3/\text{ч}$ ;  $X_2$  — расход газа в вторую сварочную зону,  $\text{м}^3/\text{ч}$ ;  $X_3$  — расход газа в первую сварочную зону,  $\text{м}^3/\text{ч}$ ;  $X_4$  — расход газа в нижнюю сварочную зону,  $\text{м}^3/\text{ч}$ ;  $X_5$  — положение дымового клапана, % хода ИМ (рис.3.2).

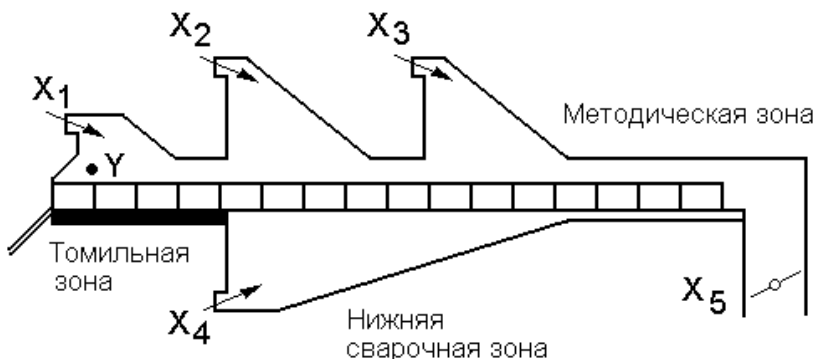


Рис.3.2 Положение факторов ( $X_1, \dots, X_5$ ) и переменной состояния ( $Y$ ) при проведении исследования на методической печи



Реализация ПФЭ в этом случае при варьировании всех факторов на двух уровнях потребовала бы постановки  $2^5=32$  опыта.

Будем предполагать, что эффекты взаимодействия факторов в исследуемом объекте маловероятны и пренебрежительно малы. Воспользуемся 1/4 репликой ПФЭ, т.е. ДФЭ типа 25-2, где формально 2 фактора заменены соответствующими произведениями остальных факторов. Это позволит сократить число опытов до  $2^3=8$ . Уровни варьирования факторов представлены в табл. 3.9.

Таблица 3.6

Уровни варьирования факторов

Уровни факторов	Факторы				
	X <sub>1</sub> , м <sup>3</sup> /ч	X <sub>2</sub> , м <sup>3</sup> /ч	X <sub>3</sub> , м <sup>3</sup> /ч	X <sub>4</sub> , м <sup>3</sup> /ч	X <sub>5</sub> , % хода ИМ
Основной (нулевой)	5250	3900	2650	1100	74
Нижний	4000	3100	1750	700	50
Верхний	6500	4700	3500	1500	98
Интервал варьирования	1250	800	900	400	24

В табл. 3.7 приведены матрица планирования ДФЭ  $2^3$  и результаты эксперимента — значения выходных переменных (давлений в томильной зоне методической печи).

Для обработки результатов эксперимента используем методику, изложенную ранее.

1. Расчет построчных средних

$$\bar{y}_j = \frac{y_{j1} + y_{j2} + \dots + y_{jm^*}}{m^*},$$

где  $m^*$  — число повторных опытов ( $m^*=2$ ). Например,

$$\bar{y}_1 = \frac{(-0,6) + (-0,5)}{2} = -0,55.$$

Результаты расчета представлены в табл. 3.7.

Таблица 3.7

Матрица ДФЭ  $2^3$  с двумя параллельными опытами

Факторы (кодированные значения)						Переменная состояния			
						Опыт 1	Опыт 2	Среднее	Модель
$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$y_1$	$y_2$	$\bar{y}_i$	$\hat{y}_i$
1	1	1	1	1	1	-0,6	-0,5	-0,55	-0,3750
1	-1	1	1	-1	-1	0,1	0,5	0,30	0,2625
1	1	-1	1	-1	-1	0,6	0,4	0,50	0,5375
1	-1	-1	1	1	1	-0,1	0,2	0,05	-0,1250
1	1	1	-1	1	-1	0,6	0,2	0,40	0,2250
1	-1	1	-1	-1	1	-0,2	-0,2	-0,20	-0,1625
1	1	-1	-1	-1	1	0,1	0,2	0,15	0,1125
1	-1	-1	-1	1	-1	0,3	0,3	0,30	0,4750

2. Определение построчных (выборочных) дисперсий

$$S_j^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m^*} (y_{ji} - \bar{y}_j)^2}{m^* - 1}; S_1^2 = \frac{(-0,6 - (-0,55))^2 + (-0,5 - (-0,55))^2}{2 - 1} = 0,005.$$

Аналогично,  $S_2^2=0,08$ ;  $S_3^2=0,02$ ;  $S_4^2=0,045$ ;  $S_5^2=0,08$ ;  $S_6^2=0$ ;  $S_7^2=0,005$ ;  $S_8^2=0$ . Сумма построчных (выборочных) дисперсий  $S_\Sigma^2=0,005+0,08+0,02+0,045+0,08++0,005=0,235$ .

3. Определение однородности дисперсий по критерию Кохрена

$$G_{\text{эксп}} = \frac{S_{j \max}^2}{S_\Sigma^2} = \frac{0,08}{0,235} = 0,34.$$

Далее по справочнику находим  $G_{\alpha; m; n}$ . Для  $\alpha=0,05$ ,  $m=m^*-1=2-1$  и  $n=8$  значение  $G_{0,05; 1; 8}=0,6798$ . Поскольку  $G_{\text{эксп}} < G_{\text{теор}}$ , то дисперсии однородны.

4. Определение коэффициентов в уравнении регрессии

$$b_0 = \frac{\sum_{j=1}^n \bar{y}_j \cdot x_{0j}}{n} = \frac{-0,55 + 0,3 + 0,5 + 0,05 + 0,4 - 0,2 + 0,15 + 0,3}{8} = 0,119;$$

$$b_1 = \frac{\sum_{j=1}^n \bar{y}_j \cdot x_{1j}}{n} = \frac{-0,55 - 0,3 + 0,5 - 0,05 + 0,4 + 0,2 + 0,15 - 0,3}{8} = 0,006;$$

$$b_2 = \frac{\sum_{j=1}^n \bar{y}_j \cdot x_{2j}}{n} = \frac{-0,55 + 0,3 - 0,5 - 0,05 + 0,4 - 0,2 - 0,15 - 0,3}{8} = -0,131;$$

$$b_3 = \frac{\sum_{j=1}^n \bar{y}_j \cdot x_{3j}}{n} = \frac{-0,55 + 0,3 + 0,5 + 0,05 - 0,4 + 0,2 - 0,15 - 0,3}{8} = -0,044;$$

$$b_4 = \frac{\sum_{j=1}^n \bar{y}_j \cdot x_{4j}}{n} = \frac{-0,55 - 0,3 - 0,5 + 0,05 + 0,4 + 0,2 - 0,15 + 0,3}{8} = -0,069;$$

$$b_5 = \frac{\sum_{j=1}^n \bar{y}_j \cdot x_{5j}}{n} = \frac{-0,55 - 0,3 - 0,5 + 0,05 - 0,4 - 0,2 + 0,15 - 0,3}{8} = -0,256.$$

5. Проверка значимости коэффициентов регрессии. Предварительно определим дисперсию воспроизводимости (дисперсию отклика)

$$S_{\text{восп}}^2 = \frac{\sum_{j=1}^n S_j^2}{n} = \frac{S_{\Sigma}^2}{n} = \frac{0,235}{8} = 0,029.$$

Дисперсия коэффициентов уравнения регрессии

$$S_b^2 = \frac{S_{\text{восп}}^2}{n \cdot m^*} = \frac{0,029}{8 \cdot 2} = 0,0018; \quad S_b = \sqrt{S_b^2} = 0,0429.$$

Находим значение доверительного интервала для коэффициентов регрессии

$$\Delta b_j = t_{\alpha; m} \cdot S_b.$$

Здесь  $m=n(m^*-1)=8(2-1)=8$ , тогда теоретическое значение критерия Стьюдента  $t_{0,05;8}=2,31$ , откуда  $\Delta b_j=2,31 \cdot 0,0429=0,099$ . Из сопоставления доверительного интервала  $\Delta b_j$  с абсолютными значениями коэффициентов модели следует, что  $|b_1|=0,006 < 0,099$ ;  $|b_3|=0,044 < 0,099$  и  $|b_4|=0,069 < 0,099$ . Эти коэффициенты оказались незначимы, а остальные значимы. Таким образом, окончательное уравнение регрессии запишется в виде

$$\hat{y} = 0,119 - 0,131X_2 - 0,256X_5.$$

Результаты расчета выходных параметров по уравнению полученной модели  $\hat{y}_i$  занесены в табл. 3.7.

6. Проверка адекватности полученной модели. Предварительно определим дисперсию адекватности

$$S_{\text{ад}}^2 = \frac{m^* \sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2}{n-1}.$$

В нашем случае  $m^*=2$ ;  $n=8$ ;  $l=k+1=5+1=6$  и в результате имеем

$$S_{\text{ад}}^2 = \frac{2}{8-6} \left[ (-0,55 + 0,375)^2 + (0,3 - 0,2625)^2 + (0,5 - 0,5375)^2 + (0,05 + 0,125)^2 + (0,4 - 0,225)^2 + (-0,2 + 0,1625)^2 + (0,15 - 0,1125)^2 + (0,3 - 0,475)^2 \right] = 0,1281.$$

С учетом ранее найденной выборочной дисперсии  $S_{\Sigma}^2=0,235$  определяем дисперсию воспроизводимости

$$S_{\text{восп}}^2 = \frac{S_{\Sigma}^2}{n} = \frac{0,235}{8} = 0,0294.$$

Экспериментальное значение критерия Фишера будет равно

$$F_{\text{эксп}} = \frac{S_{\text{ад}}^2}{S_{\text{восп}}^2} = \frac{0,1281}{0,0294} = 4,3571.$$

Теоретическое значение критерия Фишера  $F_{\alpha;m_1;m_2}$  при  $\alpha=0,05$  определим по справочнику. Для  $m_1=m^*(n-1)=2(8-1)=14$  и  $m_2=n-(k+1)=8-(5+1)=2$

значение  $F_{0,05;14;2}=19,4243$ . Поскольку  $F_{\text{экс}} < F_{\text{теор}}$ , то полученная модель адекватна.

### 3.4 Планы второго порядка

Часто для описания поверхности отклика полиномами первого порядка уже недостаточно. Во многих случаях удовлетворительная аппроксимация может быть достигнута, если воспользоваться полиномом второго порядка (3.7).

В этом случае требуется, чтобы каждый фактор варьировался не менее, чем на трех уровнях. В этом случае полный факторный эксперимент содержит слишком большое количество опытов, равное  $3^k$ . Так при  $k=3$  их 27, а число коэффициентов  $b - 10$ , при  $k=5$  число опытов 243, а коэффициентов 21. В связи с этим осуществить ПФЭ для планов второго порядка не только сложно, но и нецелесообразно.

Сократить число опытов можно воспользовавшись так называемым композиционным или последовательным планом, разработанным Боксом и Уилсоном. Так, при двух факторах модель функции отклика  $y=f(x_1, x_2)$  второго порядка представляет собой поверхность в виде цилиндра, конуса, эллипса и т.д., описываемую в общем виде уравнением

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{12}x_1x_2.$$

Для определения такой кривой необходимо располагать координатами не менее трех ее точек, т.е. факторы  $x_1$  и  $x_2$  должны варьироваться не менее, чем на трех уровнях. Поэтому план эксперимента в плоскости факторов  $x_1$  и  $x_2$  на рис.6,а не может состоять лишь из опытов 1, 2, 3, 4 ПФЭ  $2^2$ , располагающихся в вершинах квадрата как это было для модели первого порядка, а к ним должны быть добавлены опыты (звездные точки) 5, 6, 7, 8, расположенные на осях  $x_1$  и  $x_2$  с координатами  $(\pm\alpha;0)$ ,  $(0;\pm\alpha)$  и обязательно опыт 9 в центре квадрата, чтобы по любому направлению (5-9-7), (1-9-4) и т.д. располагались три точки, определяющие кривизну поверхности в этом направлении.

Таким образом, в общем случае ядро композиционного плана составляет при  $k < 5$  ПФЭ  $2^k$  при  $k \geq 5$  — дробная реплика от него. Если линейное уравнение регрессии оказалось неадекватным, необходимо:

1) добавить  $2 \cdot k$  звездных точек, расположенных на координатных осях факторного пространства  $(\pm\alpha, 0, 0, \dots, 0)$ ,  $(0, \pm\alpha, 0, \dots, 0)$ , ...,  $(0, 0, \dots, \pm\alpha)$ , где  $\alpha$  — звездное плечо, или расстояние до звездной точки;

2) провести  $n_0$  опытов при значениях факторов в центре плана.

При  $k$  факторах общее число опытов в матрице композиционного плана составит

$$n = 2^k + 2 \cdot k + n_0 \text{ при } k < 5,$$

$$n = 2^{k-1} + 2 \cdot k + n_0 \text{ при } k \geq 5.$$

При этом величина звездного плеча  $\alpha$  и число опытов в центре плана  $n_0$  зависит от выбранного вида композиционного плана.

Композиционный план для  $k=2$  и  $n_0=1$  представлен в табл.3.8.

Таблица 3.8

Композиционный план второго порядка

Номер опыта	Ф а к т о р ы						Результат $y_i$
	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_1 x_2$	$x_1^2$	$x_2^2$	
1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	$y_1$
Ядро 2	+1	+1	-1	-1	+1	+1	$y_2$
плана 3	+1	-1	+1	-1	+1	+1	$y_3$
4	+1	+1	+1	+1	+1	+1	$y_4$
5	+1	$+\alpha$	0	0	$\alpha^2$	0	$y_5$
Звезд- 6	+1	$-\alpha$	0	0	$\alpha^2$	0	$y_6$
ные 7	+1	0	$+\alpha$	0	0	$\alpha^2$	$y_7$
точки 8	+1	0	$-\alpha$	0	0	$\alpha^2$	$y_8$
Центр 9	+1	0	0	0	0	0	$y_9$
плана							

Аналогичным образом составляются планы и для большего числа факторов.

### 3.4.1 Ортогональные планы второго порядка

В общем виде данная матрица неортогональна, т.к.

$$\sum_{j=1}^n x_{0j} x_{ui}^2 \neq 0; \quad \sum_{j=1}^n x_{ij}^2 x_{uj}^2 \neq 0. \quad (3.27)$$

Приведем матрицу к ортогональному виду, для чего введем новые переменные (преобразования для квадратичных эффектов)

$$x'_{ij} = x_{ij}^2 - \frac{\sum_{j=1}^n x_{ij}^2}{n} = x_{ij}^2 - \bar{x}_i^2.$$

При этом

$$\sum_{j=1}^n x_{0j} x'_{ij} = \sum_{j=1}^n (x_{ij}^2 - \bar{x}_i^2) = \sum_{j=1}^n x_{ij}^2 - n\bar{x}_i^2 = 0.$$

Тогда уравнение регрессии (модель процесса) будет записана как

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{i,j=1}^k b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^k b_{ii} x_i^2.$$

Композиционные планы легко привести к ортогональным, выбирая звездное плечо  $\alpha$ . В табл. 3.9 приведено значение  $\alpha$  для различного числа факторов  $k$  и числа опытов в центре плана  $n_0$ .

Таблица 3.9

Число опытов в центре плана, $n_0$	Звездное плечо $\alpha$ при различном числе факторов $k$		
	$k=2$	$k=3$	$k=4$
1	1,00	1,22	1,41
2	1,08	1,29	1,47
3	1,15	1,35	1,55
4	1,21	1,41	1,61

В частности, ортогональный план второго порядка для  $k=2$  и  $n_0=1$  представлен в табл. 3.10, а его геометрическая интерпретация на рис. 3.3а.

Представленный на рис.3.3а и табл. 3.10 прямоугольный (квадратный) план эксперимента для модели второго порядка работоспособен, хотя и несколько избыточен (9 опытов для определения 6 коэффициентов). Благодаря трем избыточным опытам он позволяет усреднить случайные погрешности и оценить их характер.

Таблица 3.10

Ортогональный план второго порядка

Номер опыта	Ф а к т о р ы						Результат $y_i$
	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_1x_2$	$x_1'$	$x_2'$	
1	+1	-1	-1	+1	+1/3	+1/3	$y_1$
Ядро 2	+1	+1	-1	-1	+1/3	+1/3	$y_2$
плана 3	+1	-1	+1	-1	+1/3	+1/3	$y_3$
4	+1	+1	+1	+1	+1/3	+1/3	$y_4$
5	+1	$\alpha=+1$	0	0	+1/3	-2/3	$y_5$
Звезд- 6	+1	$\alpha=-1$	0	0	+1/3	-2/3	$y_6$
ные 7	+1	0	$\alpha=+1$	0	-2/3	+1/3	$y_7$
точки 8	+1	0	$\alpha=-1$	0	-2/3	+1/3	$y_8$
Центр 9	+1	0	0	0	-2/3	-2/3	$y_9$

В этой таблице  $x'_{uj} = x_{uj}^2 - \frac{\sum_{j=1}^9 x_{uj}^2}{9} = x_{uj}^2 - \frac{2}{3}$ .

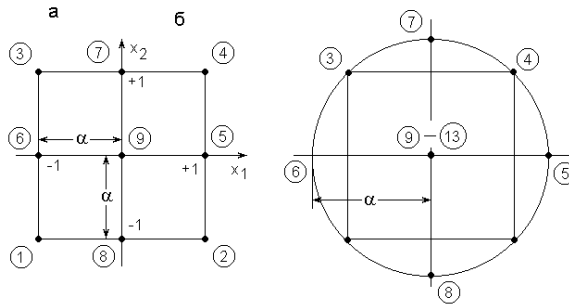


Рис. 3.3. Планы второго порядка при  $k=2$ : а — ортогональный; б — ротatableльный

В силу ортогональности матрицы планирования все коэффициенты уравнения регрессии  $\mathbf{b}$  определяются независимо один от другого по формуле:



$$b_i = \frac{\sum_{j=1}^n x_{ij} y_j}{\sum_{j=1}^n x_{ij}^2}; \quad b_{ii}' = \frac{\sum_{j=1}^n x_{ij}' y_j}{\sum_{j=1}^n x_{ij}'^2}. \quad (3.28)$$

Здесь  $i$  — номер столбца в матрице планирования;  $j$  — номер строки; сумма  $\sum_{j=1}^n x_{ij}^2$  различная для линейных, квадратичных эффектов и взаимодействий.

Дисперсии коэффициентов уравнения регрессии равны

$$S_{b,i}^2 = S_{\text{восп}} / \sum_{j=1}^n x_{ij}^2. \quad (3.29)$$

Следует особо отметить, что коэффициенты уравнения регрессии, получаемые с помощью ортогональных планов второго порядка, определяются с разной точностью (см. уравнение 3...), в то время как ортогональные планы первого порядка обеспечивают одинаковую точность коэффициентов, т.е. хотя план 3... и является ортогональным и обеспечивает независимость определения коэффициентов  $b$ , но не является ротатабельным !

В результате расчетов по матрице с преобразованными столбцами для квадратичных эффектов получим уравнение в виде

$$\hat{y} = b_0' + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{i,j=1}^k b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^k b_{ii}' (x_i^2 - \bar{x}_i^2). \quad (3.30)$$

Для преобразования к обычной записи следует перейти от коэффициента  $b_0'$  к коэффициенту  $b_0$ , используя выражение

$$b_0 = b_0' - \sum_{i=1}^k b_{ii} \bar{x}_i^2. \quad (3.31)$$

При этом дисперсия этого коэффициента рассчитывается по следующему соотношению

$$S_{b,0}^2 = S_{b',0}^2 + \sum_{i=1}^k \bar{x}_i^2 \cdot S_{b',ii}^2. \quad (3.32)$$

В дальнейшем, зная дисперсию воспроизводимости, проверяют значимость коэффициентов и адекватность уравнения:

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{i,j=1}^k b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^k b_{ii} x_i^2. \quad (3.33)$$

Значимость коэффициентов проверяется по критерию Стьюдента  $t_i = |b_i| / S_{b,i}$ . Коэффициент значим, если  $t_i > t_{\alpha, m}$ , где  $m$  — число степеней свободы дисперсии воспроизводимости.

Адекватность уравнения проверяется по критерию Фишера  $F = S_{ад}^2 / S_{восп}^2$ . Уравнение адекватно, если составленное таким образом  $F$ -отношение меньше теоретического  $F < F_{\alpha; m_1; m_2}$ , где  $m_1 = n - 1$  — число степеней свободы дисперсии адекватности;  $m_2$  — число степеней свободы дисперсии воспроизводимости;  $l$  — число коэффициентов в уравнении регрессии второго порядка, равного числу сочетаний из  $n + 2$  по 2, т.е.

$$l = \frac{(n + 2)(n + 1)}{2}.$$

### 3.4.2. Ротатабельные планы второго порядка

Как мы с Вами установили план второго порядка, представленный в табл.3.... не обладает свойством ротатабельности. Действительно, удаление от центра точек 5,6,7,8 в  $\sqrt{2} = 1,414$  раза меньше, чем удаление точек 1,2,3,4 (см.рис.3.3а), и следовательно коэффициенты уравнения регрессии определяются с различной дисперсией. Бокс и Хантер предложили ротатабельные планы 2-го порядка. Для того, чтобы композиционный план был ротатабельным, величину звездного плеча  $\alpha$  выбирают из условия

$$\alpha = 2 \sqrt{\frac{k-p}{4}},$$

где  $k$  — число факторов;  $p$  — дробная реплика (для ПФЭ  $p=0$ , для полуреплики  $p=1$ , для четвертьреплики  $p=2$  и т.д.). Число точек в центре плана  $n_0$  увеличивают. В таблице 3.11 приведены значения  $\alpha$  и  $n_0$  для различного числа независимых факторов.

Таблица 3.11

Параметр плана	Значения параметров при числе независимых факторов								
	2	3	4	5	6	6	6	7	7
Ядро плана	$2^2$	23	24	25	25-1	26	26-1	27	27-1
Звездное плечо	1,414	1,682	2,00	2,378	2,00	2,828	2,378	3,333	2,828
Число точек в центре плана, $n_0$	5	6	7	10	6	15	9	21	14

Поясним идею выбора значения звездного плеча  $\alpha$  на примере матрицы ротатабельного планирования второго порядка для  $k=2$ , представленной в табл. 3.12. Размещение точек этого плана показано на рис.3.36. Для обеспечения ротатабельности точек 5,6,7,8 необходимо удалить их от центра плана на расстояние  $\alpha$  в  $\sqrt{2}=1,414$  раз большее, чем удаление точек 1,2,3,4 от осей  $x_2$  и  $x_1$ . В результате этого все точки плана б... оказываются лежащими на окружности. Учитывая существенно большее влияние на функцию отклика случайной ошибки в точке 9, рекомендуется ставить в этой точке плана не один, а несколько дублирующих опытов (в данном случае опыты с 9 до 13) для усреднения полученных результатов и для осуществления статистического анализа результатов всего эксперимента в целом.

Таблица 3.12

Номер опыта	Ф а к т о р ы						Результат $y_j$
	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_1 x_2$	$x_1^2$	$x_2^2$	
1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	$y_1$
Ядро 2	+1	+1	-1	-1	+1	+1	$y_2$
плана 3	+1	-1	+1	-1	+1	+1	$y_3$
4	+1	+1	+1	+1	+1	+1	$y_4$
Звезд- 5	+1	+1,414	0	0	2	0	$y_5$
ные 6	+1	-1,414	0	0	2	0	$y_6$
точки 7	+1	0	+1,414	0	0	2	$y_7$
8	+1	0	-1,414	0	0	2	$y_8$
9	+1	0	0	0	0	0	$y_9$
Центр 10	+1	0	0	0	0	0	$y_{10}$
плана 11	+1	0	0	0	0	0	$y_{11}$
12	+1	0	0	0	0	0	$y_{12}$
13	+1	0	0	0	0	0	$y_{13}$

Однако, матрица ротатабельного планирования второго порядка не-ортогональна, т.к.

$$\sum_{j=1}^n x_{0j} \cdot x_{uj}^2 \neq 0; \quad \sum_{j=1}^n x_{ij}^2 \cdot x_{uj}^2 = 0; \quad i \neq u. \quad (3.34)$$

Следовательно, **если какой-либо из квадратичных эффектов оказался незначимым, то после его исключения коэффициенты уравнения регрессии необходимо пересчитать заново!**

При использовании ротатабельных планов второго порядка дисперсию воспроизводимости можно определить по опытам в центре плана. В связи с этим при проверке адекватности уравнения регрессии, полученного по ротатабельному плану второго порядка, поступают следующим образом.

Находят остаточную сумму квадратов

$$S_1^2 = \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y}_j)^2 \quad (3.35)$$

с числом степеней свободы

$$m_1 = n - 1 = n - \frac{(k+2)(k+1)}{2}.$$

По опытам в центре плана определяют сумму квадратов воспроизводимости

$$S_2^2 = \sum_{j=1}^{n_0} (y_{0j} - \bar{y}_{0j})^2 \quad (3.36)$$

с числом степеней свободы  $m_2 = n_0 - 1$ .

Далее находят сумму квадратов, характеризующих неадекватность  $S_3^2 = S_1^2 - S_2^2$ , число степеней свободы которой равно

$$m_3 = m_1 - m_2 = n - \frac{(k+2)(k+1)}{2} - (n_0 - 1).$$

Проверяют адекватность по F-критерию

$$F = \frac{S_3^2 / m_3}{S_2^2 / m_2}.$$

Уравнение адекватно, если  $F < F_{\alpha; m_3; m_2}$ .

Если модель второго порядка оказалась неадекватной, следует повторить эксперименты на меньшем интервале варьирования факторов или перенести центр плана в другую точку факторного пространства. В тех случаях, когда адекватность модели по-прежнему не достигается, рекомендуется перейти к планам третьего порядка.

### 3.5. Планирование экспериментов при поиске оптимальных условий

Во многих случаях инженерной практики перед исследователем возникает задача не только выявления характера связи между двумя или несколькими рядами наблюдений, а требуется найти такие численные значения факторов, при которых отклик (выходной параметр) достигает своего экстремального значения (максимума или минимума). Эксперимент, решающий эту задачу, называется экстремальным. В этом случае задача сводится к оптимизационной и формулируется следующим образом: требуется определить такие координаты экстремальной точки ( $x_1^*$ ,

$x_2^*$ , ...,  $x_n^*$ ) поверхности отклика  $y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , в которой она максимальна (минимальна):  $\max y(x_1, x_2, \dots, x_n)=y(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ .

Графическая интерпретация задачи оптимизации объекта  $y(x_1, x_2, \dots, x_n)$  при двух факторах  $y(x_1, x_2)$  представлена на рис.3.5.1а,б. Здесь точка А соответствует оптимальным значениям факторов  $x_1^*$  и  $x_2^*$ , обеспечивающим максимум функции отклика  $y_{\max}$ . Замкнутые линии на рис.3.5.1б характеризуют линии постоянного уровня и описываются уравнением  $y=f(x_1, x_2)=V=\text{const}$ .

Необходимость в экстремальных экспериментах довольно часто возникает в инженерной практике. Так, на модели шахтной печи с противоточно движущимся плотным продуваемым слоем, схема которой представлена на рис.3.5.2, требуется определить при заданных ее конструктивных и режимных параметрах расположение фурмы по высоте печи  $h$ , ее диаметр  $d$  и высов  $l$ , обеспечивающих максимальную степень использования теплового потенциала газового потока. В данном случае, факторами являются  $l, h, d$ , а в качестве функции отклика  $y(l,h,d)$  в первом приближении можно использовать температуру отходящих из печи газов. Заметим, что вид функции отклика в данном случае  $f(x_1, \dots, x_n)$  исследователю заранее неизвестен, т.е. отсутствует математическая модель, адекватно описывающая данный процесс. Требуется с наименьшими затратами (минимальном числе опытов) определить оптимальные значения  $l^*, h^*, d^*$ , при которых температура отходящих газов минимальна.

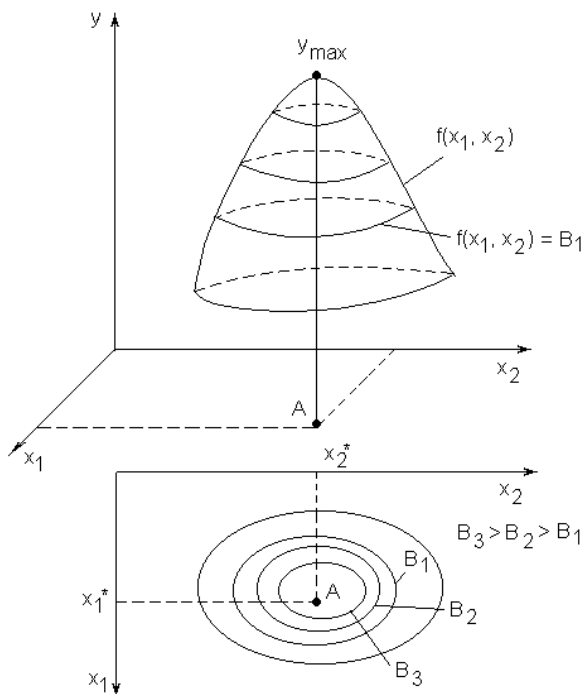


Рис.3.5.1. Поверхность отклика (а) и линии равного уровня (б):  
 $y=f(x_1, x_2)=B=\text{const}$  для  $n=2$

Известный из практики метод "проб" и "ошибок", в котором факторы изменяются на основании опыта, интуиции или наугад, при обычно имеющем место значительном числе факторов при исследовании процессов в металлургии зачастую оказывается малоэффективным вследствие весьма сложной зависимости функции отклика от факторов.

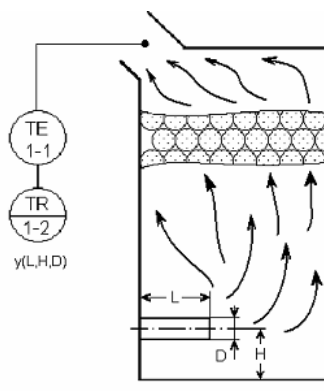


Рис.3.5.2. Схема шахтной печи

Требуют значительно меньшего числа опытов и быстрее приводят к цели те поисковые методы оптимизации, где шаговое варьирование факторами производится целенаправленно по определенному плану. Поисковые методы оптимизации относятся к классу итерационных процедур, при этом весь процесс разбивается на шаги, на каждом шаге делается ряд опытов и определяется каким образом изменить факторы, влияющие на процесс, чтобы получить улучшение результата. При этом на каждом очередном шаге получаемая информация используется для выбора последующего шага.

Разработано множество методов пошаговой оптимизации, которые подробно рассматриваются в разделе вычислительной математики – “Численные методы оптимизации”. Мы же рассмотрим только некоторые из них, эффективность использования которых в промышленном и лабораторном эксперименте подтверждена практикой применительно к металлургическим процессам.

### 3.5.1. Метод покоординатной оптимизации (Гаусса - Зейделя)

Процесс поиска оптимума методом покоординатной оптимизации (Гаусса-Зейделя) в графическом виде для двумерного случая представлен на рис.3.5.3. По этому методу выбирается произвольная точка  $M_0$  и определяются ее координаты. Поиск оптимума осуществляется поочередным варьированием каждого их факторов. При этом сначала изменяют один



фактор ( $x_1$ ) при фиксированных остальных ( $x_2 = \text{const}$ ) до тех пор, пока не прекращается прирост функции отклика (точка  $M_1$ ). В дальнейшем изменяется другой фактор ( $x_2$ ) при фиксированных остальных ( $x_1 = \text{const}$ ) и далее процедура повторяется.

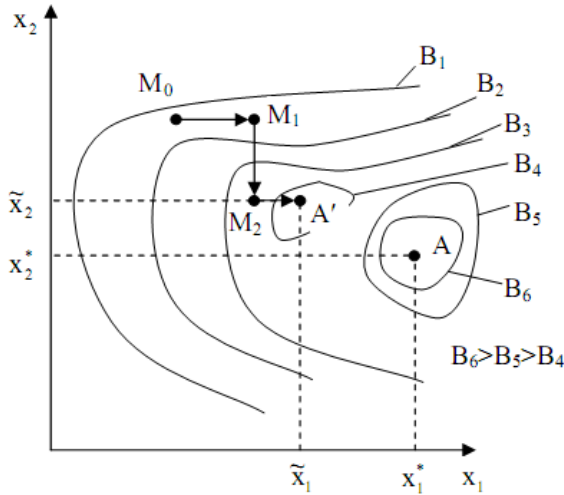


Рис.3.5.3. К методу Гаусса-Зейделя

Данный метод весьма прост, однако при большом числе факторов требуется значительное число опытов, чтобы достичь координат оптимума. Более того, при некоторых зависимостях  $y=f(x_1, \dots, x_n)$  этот метод может привести к ложному результату. На рис.3.5.3 показан один из таких частных случаев, когда поочередное изменение каждого из факторов в любую сторону вдоль координатных осей  $x_1$  и  $x_2$  вызывает уменьшение  $y$ . В результате решения находится ложный экстремум, находящийся в точке  $A_1$  с координатами  $\tilde{x}_1; \tilde{x}_2$ , в то время как действительное значение максимума  $y_{\max}$  находится в точке  $A$  с координатами  $x_1^*$  и  $x_2^*$ .

В дальнейшем рассмотрим более совершенные методы.

### 3.5.2. Метод крутого восхождения (Бокса-Уилсона)

Известно, что кратчайший, наиболее короткий путь — это движение по градиенту, т.е. перпендикулярно линиям равного уровня, на кото-

рых функция отклика принимает постоянные значения  $y(x_1, x_2, \dots, x_n) = B$ . В связи с этим при оптимизации процесса рабочее движение целесообразно совершать в направлении наиболее быстрого возрастания функции отклика, т.е. в направлении градиента функции  $y$ .

Существуют различные модификации градиентного метода, одним из них является метод крутого восхождения (Бокса-Уилсона). Сущность этого метода также рассмотрим на примере двухфакторной задачи (рис.3.5.4). В этом случае шаговое движение осуществляется в направлении наискорейшего возрастания функции отклика, т.е.  $\text{grad } y(x_1, x_2)$ . Однако направление корректируют не после каждого следующего шага, а при достижении в некоторой точке на данном направлении частного экстремума функции отклика.

Пусть в окрестности точки  $M_0$  как центра плана поставлен ПФЭ  $2^2$ . Координаты отдельных опытов соответствуют точкам 1-4. По результатам ПФЭ можно рассчитать коэффициенты линейного уравнения регрессии.

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2.$$

Градиент функции отклика в этой точке определяется как

$$\text{grad } y = \frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot \mathbf{j},$$

где  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  — единичные векторы в направлении координатных осей.

Следовательно, для движения по градиенту необходимо изменять факторы пропорционально их коэффициентам регрессии и в сторону, соответствующую знаку коэффициента. В процессе поиска двигаются в этом направлении до тех пор, пока не будет обнаружен локальный максимум (точка  $M_1$  на рис.3.5.4). В точке последнего находят новое направление градиента (направление  $M_1N$ ), осуществляя опять же ПФЭ, и далее процедура повторяется. Стрелками на рис.3.5.4. показано траектория движения к оптимуму.

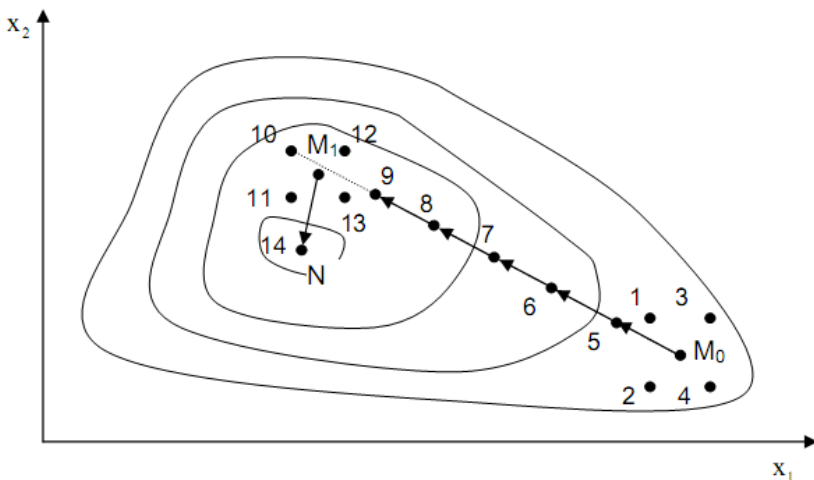


Рис.3.5.4. Процедура оптимизации методом круглого восхождения

Практически алгоритм сводится к следующей последовательности операций.

1. Планирование и постановка ПФЭ (или ДФЭ) в окрестности точки начального состояния  $x_{i0}$  (точка  $M_0$  на рис.3.5.4). Расчет коэффициентов  $b_i$  линейной математической модели с целью определения направления градиента.

2. Расчет произведений  $b_i \Delta x_i$ , где  $\Delta x_i$  — интервалы варьирования факторов при ПФЭ (ДФЭ).

3. Выбор базового фактора  $x_i = x_{i0}$ , у которого  $|b_i \Delta x_i| = a = \max$ .

4. Выбор шага круглого восхождения для базового фактора  $h_a$ .

Этот выбор производится на основании имеющейся априорной информации или с учетом опыта исследователя, технологических соображений или других критериев. Относительно выбора шага заметим, что слишком малый шаг потребует значительного числа опытов при движении к оптимуму, а большой шаг создает опасность проскакивания области оптимума.

5. Расчет шагов изменения других факторов по формуле

$$h_j = (b_j \Delta x_j) h_a / a.$$

Это соотношение между величинами шагов изменения отдельных факторов обеспечивает движение по градиенту в факторном пространстве.

6. Составление плана движения по градиенту. Для этого в соответствии с определенными значениями шагов изменения факторов и их последовательным алгебраическим суммированием с основным уровнем в точке

$$x_{jk} = x_{j0} + kh_j, \quad k = 1, 2, \dots$$

находят координаты опытов 5, 6, 7, 8, 9 (см.рис.3.5.4). Часть этих опытов пролагают "мысленными". "Мысленный" опыт заключается в получении предсказанных (расчетных) значений функции отклика по линейному уравнению регрессии, что позволяет сократить объем реальных опытов, т.е. увеличить скорость продвижения к экстремуму. При "мысленном" эксперименте" перевод координат в кодированную форму и подстановка их в уравнение модели объекта должна подтвердить действительное возрастание  $y$ . Обычно реальные опыты в начале движения из базовой точки вдоль направления градиента ставятся через 2-4 мысленных опытов. Другие опыты реализуют на практике, определяя последовательность значений  $y$  в направлении градиента. Из опытных данных находят положение локального экстремума (точка  $M_1$  на рис.3.5.4).

7. В окрестности локального экстремума ставят новую серию опытов (ПФЭ илиДФЭ) для определения новых значений коэффициентов уравнения регрессии и нового направления градиента (направление  $M_1N$  на рис.3.5.4). В дальнейшем процедура повторяется до достижения следующего локального экстремума и т.д. вплоть до определения окрестности координат максимума функции отклика, которая носит название — почти стационарной области.

Признаком достижения этой области является статистическая незначимость коэффициентов  $b_i$ . В почти стационарной области становятся значимы эффекты взаимодействия и квадратичные эффекты. Здесь требуется переходить отДФЭ (если он использовался ранее) к ПФЭ, а если и этого окажется недостаточно, перейти от планов эксперимента первого порядка к планам второго порядка.

Очевидно, что в задачах, где требуется определить координаты не максимума, а минимума функции отклика, знаки коэффициентов  $b_i$  следу-

ет поменять на обратные. В этом случае осуществляется движение по антиградиенту в факторном пространстве.

### 3.5.3. Симплексный метод планирования

Метод симплексного планирования позволяет без предварительного изучения влияния факторов найти область оптимума. В этом методе не требуется вычисления градиента функции отклика, поэтому он относится к безградиентным методам поиска оптимума. Для этого используется специальный план эксперимента в виде симплекса.

Симплекс — это простейший выпуклый многогранник, образованный  $n+1$  вершинами в  $n$ -мерном пространстве, которые соединены между собой прямыми линиями. При этом координаты вершин симплекса являются значениями факторов в отдельных опытах. Так, например, в двухфакторном пространстве (на плоскости)  $n=2$  симплекс — любой треугольник, в трехфакторном (трехмерном) пространстве — тетраэдр и т.д.

Симплекс называется правильным или регулярным, если все расстояния между образующими его вершинами равны (равносторонний треугольник, правильный тетраэдр и др.).

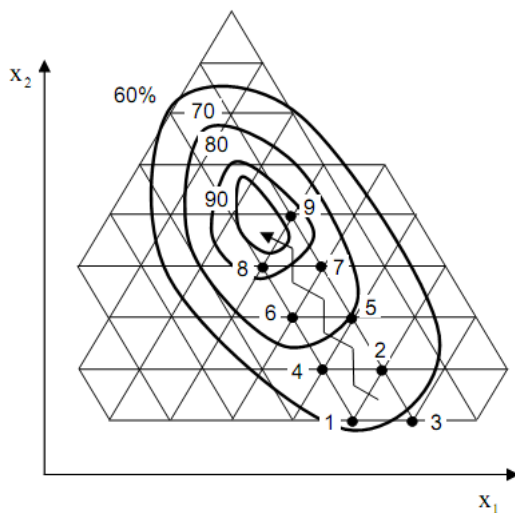


Рис.3.5.5 Схема движения к оптимальной области симплексным методом

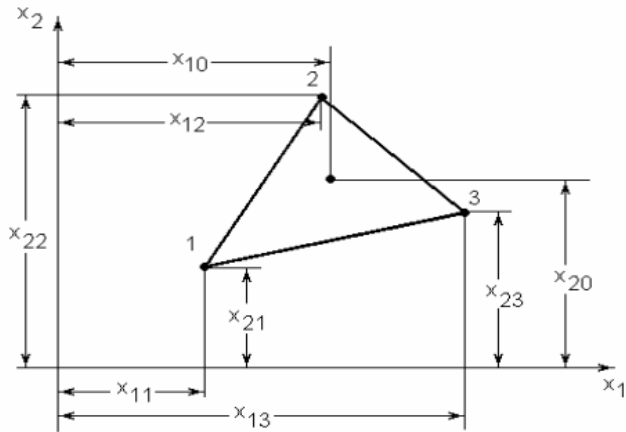


Рис. 3.5.6. Схема построения начального симплекса

После построения исходного симплекса и проведения опытов при значениях факторов, соответствующих координатам его вершин, анализируют результаты и выбирают вершину симплекса, в которой получено наименьшее (наихудшее) значение функции отклика. Для движения к оптимуму необходимо поставить опыт в новой точке, являющейся зеркальным отображением точки с наихудшим (минимальным) результатом относительно противоположной грани симплекса. На рис.3.5.5 представлено геометрическое изображение симплекс-метода для двумерного случая  $n=2$ . После проведения опытов 1, 2 и 3 худшим оказался опыт 3. Следующий опыт ставится в точке 4, которая образует с точками 1 и 2 новый правильный симплекс. Далее сопоставляются результаты опытов 1, 2 и 4. Наихудший результат получен в точке 1, поэтому она в новом симплексе заменяется зеркальным отображением (точкой 5) и т.д., пока не будет достигнута почти стационарная область. Следует заметить, что хотя этот путь и зигзагообразен, общее число опытов, необходимых для достижения области оптимума, может быть небольшим за счет того, что проводить  $n+1$  опыт приходится лишь в начале, а в дальнейшем каждый шаг сопровождается проведением только одного дополнительного опыта, условия которого выбираются на основе предшествующих результатов.

После изложения основных идей симплексного метода планирования оптимальных экспериментов остановимся на некоторых его деталях.

Выбор размеров симплекса и его начального положения в известной степени произволен. Для построения начального симплекса значения в каждом опыте исходного симплекса определяются по формуле

$$x_{ij} = x_{i0} + C_{ij}\Delta x_i, \quad (3.5.2)$$

где  $x_{i0}$  — координаты центра начального симплекса;  $\Delta x_i$  — интервал варьирования  $i$ -го фактора;  $C_{ij}$  — кодированное значение  $i$ -го фактора для  $j$ -го опыта, выбираемые из числовой матрицы для симплексного планирования, приведенные в табл. 3.5.1.

Таблица 3.5.1

Коэффициенты  $C_{ij}$  для выбора координат симплекса \*

Номер опыта ( $\downarrow j$ )	факторы ( $\rightarrow i$ )					
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	...	$x_{n-1}$	$x_n$
1	$k_1$	$k_2$	$k_3$	...	$k_{n-1}$	$k_n$
2	$-R_1$			...		$k_n$
3	0	$-R_2$		...		$k_n$
4	0	0	$-R_3$	...		$k_n$
...	...	...	...	...	...	$k_n$
$n$	0	0	0	0	$R_{n-1}$	$k_n$
$n+1$	0	0	0	0	0	$R_n$

\* Примечание:

$$k_i = \frac{1}{i+1} \sqrt{\frac{i+1}{2i}} = \sqrt{\frac{1}{2i(i+1)}}; \quad R_i = \sqrt{\frac{i}{2(i+1)}}; \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

$n$  – число факторов

Если, например, необходимо составить симплекс-план для двух факторов, то вначале ставят три опыта с координатами

1-й опыт

$$\begin{aligned} x_{11} &= x_{10} + k_1\Delta x_1; \\ x_{21} &= x_{20} + k_2\Delta x_2. \end{aligned}$$

2-й опыт

$$\begin{aligned} x_{12} &= x_{10} - R_1\Delta x_1; \\ x_{22} &= x_{20} + k_2\Delta x_2. \end{aligned}$$

3-й опыт

$$x_{13} = x_{10} + 0;$$

$$x_{23} = x_{20} - R_2 \Delta x_2.$$

Симплекс, рассчитанный по этим формулам, представлен на рис.3.5.7. Так, если  $x_{10}=0$  и  $x_{20}=0$ , а  $\Delta x_1=\Delta x_2=1$ , то координаты опытов будут равны: опыт 1 (0,5;0,289), опыт 2 (-0,5; 0,289) и опыт 3 (0;-0,577), что соответствует координатам вершин равностороннего треугольника с длиной стороны, равной 1. Начало координат в этом случае находится в точке пересечения медиан (биссектрис).

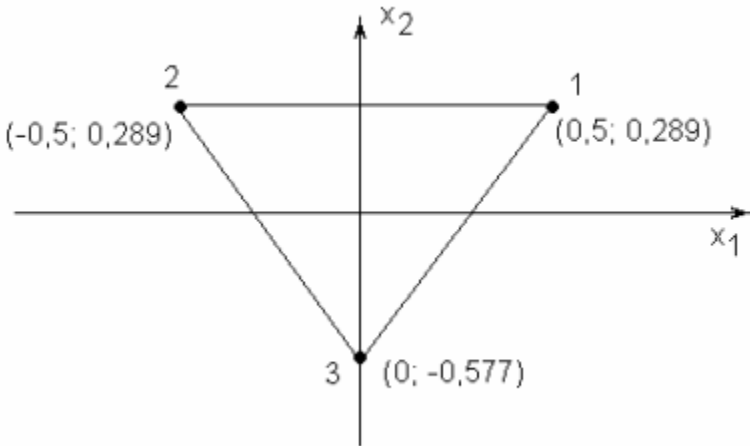


Рис.3.5.7. Координаты вершин симплекса при  $x_{i0}=0$  и  $\Delta x_i=1$  при  $n=2$

Для определения условий проведения опыта в отраженной точке (координат новой вершины симплекса) используется формула

$$x_{i'} = \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n x_{ij} - x_{i'k}, \quad i \neq j, \quad (3.5.3)$$

где  $x_{i'}$  — координата новой точки (новой вершины) симплекса для  $i$ -й переменной;  $x_{i'k}$  — координата заменяемой точки (координата вершины



симплекса с наихудшим откликом перед ее отбрасыванием);  $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij}$  –

среднее значение из координат всех вершин симплекса кроме заменяемой.

Известны следующие критерии окончания процесса последовательного отражения наихудших вершин и постановки очередных опытов в новых вершинах:

1. Разность значений функции отклика в вершинах симплекса становится меньше наперед заданной величины. Это означает либо выход в "почти стационарную" область вблизи оптимума, либо достижение участка поверхности  $\hat{y} = f(x_1; \dots; x_n) = \text{const}$  в виде "плато". В этом случае дополнительными опытами в стороне от симплекса следует удостовериться в отсутствии других участков с более существенной кривизной поверхности  $y = f(x_1; \dots; x_n)$  и принять величину с экстремальным значением функции отклика за точку оптимума.

2. Отражение любой из вершин симплекса после однократного качания приводит к его возврату в прежнее положение. При этом есть основания утверждать "накрытие" симплекса точки оптимума.

3. Циклическое движение симплекса вокруг одной из его вершин на протяжении более чем нескольких шагов. Подобная ситуация имеет место, когда искомый оптимум располагается внутри области, охватываемой циркулирующим симплексом.

В случаях 2 и 3 рекомендуется уменьшить размеры симплекса, т.е. расстояния между вершинами, и продолжить поиск до желаемого уточнения координат искомого оптимума.

Изложенный алгоритм симплексного метода сравнительно прост, он достаточно эффективен даже при незначительных ошибках в определении функции отклика, однако работает недостаточно быстро. Существует его модификация, известная под названием "метод деформируемого симплекса", которая ускоряет процесс поиска оптимума за счет использования на данном шаге информации, накопленной на предыдущих шагах.

Сущность метода поиска по деформированному симплексу заключается в том, что при отражении наихудшей вершины относительно центра тяжести противоположной грани размер симплекса не остается постоянным, а осуществляется его деформация (растяжение или сжатие). Для

пояснения существа метода введем координату центра тяжести  $\bar{x}_i$  остальных (за исключением наихудшей) вершин симплекса:

$$\bar{x}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n+1} x_{ij}}{n}; \quad j \neq j_3.$$

Тогда формула (3.5.3) может быть преобразована к виду

$$x_{iH} = 2\bar{x}_i - x_{i3}$$

или

$$\tilde{x}_{iH} = \bar{x}_i + \alpha(\bar{x}_i - x_{i3}).$$

При  $\alpha=1$  получим выражение (3.5.3) и  $\tilde{x}_{iH} = x_{iH}$ .

Введем обозначения:

$y_3$  — наихудший (минимальный отклик) в симплексе;

$y_{\max}$  — наилучший (максимальный) отклик;

$y_3'$  — отклик, следующий за наихудшим.

Следовательно  $y_3 < y_{\max} < y_3'$ .

В зависимости от значения функции отклика в точке нормального отражения  $y_H$  при  $\alpha=1$  возможны следующие варианты.

1. Если  $y_3 < y_H < y_{\max}$ , т.е.  $x_{iH}$  будет не худшей и не лучшей точкой в новом наборе точек, то  $x_{i3}$  следует заменить на  $x_{iH}$  с  $\alpha=1$ . В этом случае осуществляется нормальное отражение.

2. Если  $y_H > y_{\max}$ , то  $x_{iH}$  оказывается новой лучшей точкой в новом наборе точек. В этом случае направление растяжения признается “весьма удачным” и растягивается (по отношению к нормальному) симплекс в этом направлении. Для этого случая  $1 < \alpha < 2$  и  $\alpha$  называется коэффициентом растяжения.

3. Если  $y_3 < y_H < y_3'$ , то направление отражения признается правильным, но симплекс слишком велик и его следует сжать выбором коэффициента сжатия  $\alpha$  из диапазона  $0 < \alpha < 1$ .

4. Если  $y_H < y_3$ , то даже направление отражения выбрано неверно и следует осуществить отрицательное сжатие выбором отрицательного значения коэффициента  $\alpha$  ( $-1 < \alpha < 0$ ).

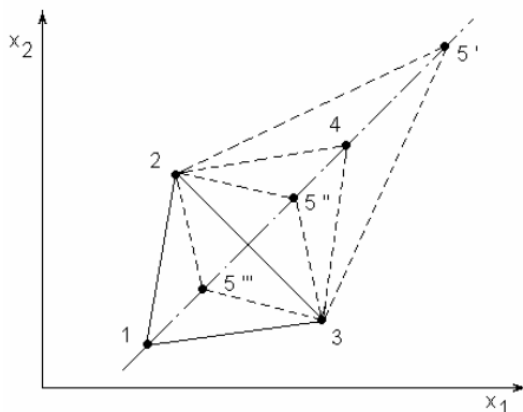


Рис.3.5.8. К методу деформированного симплекса

Таким образом, на каждом шаге следует вначале нормально отразить наихудшую вершину симплекса ( $\alpha=1$ ), поставить в этой точке опыт, определить  $u_n$ , а затем поставить следующий опыт в точке факторного пространства  $\tilde{X}_H$ , координаты которой определяются по формуле (2.5.4) с учетом рассмотренных вариантов 1-4.

На рис.2.5.8 показаны точка 4 очередного опыта при нормальном отражении ( $\alpha=1$ ) наихудшей вершины 1, точки  $5'$ ,  $5''$ ,  $5'''$  последующих опытов для случаев соответственно растяжения ( $\alpha=2$ ), сжатия ( $\alpha=0,5$ ) и отрицательного сжатия ( $\alpha=-0,5$ ) симплекса.

Таким образом, метод поиска по деформированному симплексу обладает повышенной гибкостью, позволяющей учитывать особенности поверхности отклика.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Рыков В.В. Математическая статистика и планирование: конспект лекций для студентов специальности 230401 - "Прикладная математика" / В. В. Рыков, В. Ю. Иткин; РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина. - М., 2009. - 303 с. - Режим доступа: <http://window.edu.ru/>
2. Методология планирования эксперимента [Электронный ресурс]/ сост. Т. П. Абомелик. - Ульяновск: УлГТУ, 2011. - 38 с. - Режим доступ: <http://window.edu.ru/>
3. Черный А.А. Теория и практика эффективного математического моделирования[Электронный ресурс]: Учебное пособие. - Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2010. - 419 с. - Режим доступа: <http://window.edu.ru/>
3. Температура: теория, практика, эксперимент: справ. изд.: в 3 т. Т. 1, кн. 1 : Методы контроля температуры / В. Г. Лисиенко, Е. М. Шлеймович, М. Г. Ладыгичев [и др.]; под ред. В. Г. Лисиенко. - М.: Теплотехник, 2010.-549 с.
4. Осипова В.А. Экспериментальное исследование процессов теплообмена: учеб. пособие для теплоэнерг. спец. вузов / В. А. Осипова. - 3-е изд., перераб. и доп. - М.: Энергия, 1979. - 319 с.
5. Саутин С.Н. Исследование и оптимизация химико-технологических процессов с помощью активного эксперимента: учебное пособие / С. Н. Саутин, А. Е. Пунин. - Л., 1982. - 63с.
6. Экспериментальные методы в адсорбции и молекулярной хроматографии / под ред. Ю. С. Никитика, Р. С. Петровой. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Изд-во МГУ, 1990. – 316 с.
7. Адлер Ю.П. Теория эксперимента: прошлое, настоящее, будущее / Ю. П. Адлер, Ю. В. Грановский, Е. В. Марков. - М.: Знание, 1982. - 64 с.
8. Рогов В.А., Поздняк Г. Г. Методика и практика технических экспериментов. - М.: Академия, 2005. - 288 с. Высш. школа, 1985. - 327 с.
9. Грачев Ю.П., Плаксин Ю. М. Математические методы планирования экспериментов. - М.: ДеЛи принт, 2005. - 296 с.
10. Иванова Г.М., Кузнецов Н.Д., Чистяков В.С. Теплотехнические измерения и приборы: учебник для вузов.- М.: Изд-во МЭИ, 2005.- 460 с.
11. Налимов В.В. Теория эксперимента. - М.: Наука, 1971. - 207 с.
12. Бондарь А.Г., Статюха Г. А.. Планирование эксперимента в химической технологии: Основные положения, примеры и задачи: Учеб. пособие для вузов. - Киев, 1976.- 183 с.
13. Теоретические основы теплотехники. Теплотехнический эксперимент: справочник. / под общ. ред. В.А. Григорьева, В.М. Зорина. - 2-е изд., перераб. - М.: Энергоатомиздат, 1988. - 560 с.
14. Процессы и аппараты химической технологии. Явления переноса, макрокинетика, подобие, моделирование, проектирование: Т. 1. Осно-

вы теории процессов химической технологии / Под ред. А.М. Кутепова.- М.: Логос, 2000.- 480 с.

13. Процессы и аппараты химической технологии. Явления переноса, макрокинетика, подобие, моделирование, проектирование: Т. 2. Механические и гидромеханические процессы / Под ред. А.М. Кутепова.- М.: Логос, 2001.- 600 с.