Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Тамбовский государственный технический университет»

А.Д.Нахман

ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Утверждено Методическим Советом ТГТУ
в качестве учебно-методического пособия
для студентов первого курса
инженерных направлений подготовки

Тамбов

2014

Рецензенты:

Заведующая кафедрой общеобразовательных дисциплин
ТОГОАУ ДПО «Институт повышения квалификации работников образования»
доцент Т.В.Мирзаева,
доцент кафедры «Высшая математика»
ФБГОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет»,
кандидат физико-математических наук В.В.Васильев

Утверждено Методическим Советом
ТГТУ (протокол № 7 от 23.09.14)

Изложены основные понятия и факты теории числовых и функциональных рядов. Приведено значительное количество подробно решенных типовых примеров, а также упражнений для самостоятельного решения. Материал может быть использован студентами инженерных направлений подготовки при изучении модуля «Математический анализ» в курсе математики.

ВВЕДЕНИЕ

Основные положения теории числовых и функциональных рядов являются важнейшей составляющей математической подготовки студентов инженерных, экономических и др. специальностей. Вопросы сходимости и суммируемости рядов, представления функций рядами остаются актуальными в современной математической науке ее приложениях, находят применения в таких учебных курсах как дифференциальные уравнения, комплексный анализ, теория вероятностей, вычислительная математика и др. Причина затруднений и типичных ошибок и затруднений многих учащихся состоит в том, что ряды представляются большинству учащихся чисто абстрактными, необычными объектами, не имеющими никакой прикладной значимости; возникают типичные недоумения, например: «почему мы исследуем вопрос о сходимости ряда, а не ищем значение суммы?», «почему признаков сходимости так много?», «зачем функции весьма простого вида требуется раскладывать в бесконечную сумму (по степеням x)» и т.п.

Одну из причин таких затруднений на начальном этапе изучения мы видим в том, что целью решения задач является получение *качественной*, а не *количественной* характеристики объекта («ряд сходится/расходится» вместо привычного ответа в виде числа, интервала, функции). Мы считаем, что «путанные» представлений об объекте в многом могут быть объяснены многозначностью самого термина «ряд»: «ряд чисел» (конечный упорядоченный набор), «ряд распределения» случайной величины, «вариационный ряд», иногда употребляемый в инженерной практике термин «конечный ряд» (конечная сумма) и т.п.

Преодолению указанных и других трудностей, профилактике типичных ошибок способствовала бы пропедевтика основных понятий путем выделения линии последовательностей и рядов во всем предшествующем (изучению числовых и функциональных рядов) математическом материале.

Материал теории последовательностей и рядов способствует возрастанию мотивации изучения математики, реализации внутрипредметных и межпредметных связей.

«Возвращение» в школьный курс определения предела последовательности, вопроса о суммировании бесконечно-убывающей геометрической прогрессии, и вновь вводимая вероятностно-статистическая линия создают объективные предпосылки для соответствующей пропедевтической деятельности. Ее содержательный компонент, по нашему мнению, может быть выстроен следующим образом.

Прежде всего следует выделить цепочку уже имеющихся в школьном курсе математики понятий/операций, конечным звеном которой и является понятие ряда. Здесь можно назвать, как минимум, следующее: упорядоченные наборы чисел, построенные на основании некоторой закономерности (такие «ряды» чисел рассматриваются уже начальной школе), набор вариант и набор соответствующих им частот в задачах статистики , суммы многих слагаемых (поиск среднего арифметического чисел, поиск выборочных средних), произведения многих множителей (факториалы – в задачах комбинаторики), понятия числовой последовательности как функции натурального аргумента, прогрессии и ее суммы, бесконечно-убывающей геометрической прогрессии. Новые для учащихся виды последовательностей, бесконечных «в обе стороны» возникают при записи множества всех решений тригонометрических уравнений, задача отбора корней приводит к выделению подпоследовательностей с определенными характеристиками. Обзор указанных понятий предшествует введению *бесконечных* сумм (термин**,** который, с нашей точки зрения, на начальном этапе предпочтительнее, нежели «числовой ряд»).

В общем случае ряд вводится как процесс и результат *«разворачивания» конечной суммы в бесконечную* при неограниченном росте числа слагаемых:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n).$$

Существование этого предела и означает сходимость (а в противном случае – расходимость) ряда. Примерами расходящихся рядов могут служить как гармонический ряд, так и сумма любой бесконечной арифметической прогрессии.

Формулировка и доказательство необходимого признака сходимости ряда способствуют, с нашей точки зрения, лучшему пониманию вводимых понятий. Здесь же вводится достаточный признак расходимости ряда, который дает, в частности, возможность проанализировать все случаи поведения суммы бесконечной геометрической прогрессии (а не только бесконечно-убывающей).

Полезными являются следующими соображения, на которые следует обратить внимание учащихся: для числовых рядов вопрос сходимости имеет первостепенное значение, поскольку, установив факт сходимости, мы вправе приближенно вычислить сумму ряда, выбирая в качестве аппроксимаций отрезки ряда достаточно большой длины. Здесь (без доказательства) можно привести признак Лейбница сходимости знакочередующихся рядов и предложить примеры на вычисление суммы с наперед заданной точностью.

Предлагаемая пропедевтика основных понятий и фактов теории рядов, как нам представляется, может существенным образом послужить обеспечению преемственности и системности обучения математике.

В силу сказанного методические рекомендации по решению задач выделены в отдельную главу. Материал завершается подборкой большого количества упражнений для самостоятельного решения.

1.ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

1.1. Числовые ряды. Основные понятия. Простейшие свойства

1.1.1 Пусть дана бесконечная последовательность действительных чисел $w_1, w_2, w_3, ..., w_n, ...$. Формально составленная *бесконечная сумма* вида

$$w_1 + w_2 + w_3 + ... + w_n + ...$$

или, коротко,

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n \tag{1.1.1}$$

называется *числовым рядом*; общий член последовательности $\{w_n\}$ называется общим членом ряда (1.1.1).

Конечную сумму первых *n* членов

$$S_n = w_1 + w_2 + w_3 + ... + w_n \tag{1.1.2}$$

назовем n- ой частичной суммой ряда (1.1.2); при этом, по определению, $S_1 = w_1$.

Если существует предел вида

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n,$$

то числовой ряд (1.1.1) называется *сходящимся*, а в противном случае - *расходящимся*.

Число S назовем суммой сходящегося ряда; говорят также, что ряд (1.1.1) сходится к сумме S и применяют запись

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} w_n$$

Главная задача, которая решается в теории числовых рядов - сходится или расходится данный ряд; вопрос о его сумме можно ставить лишь тогда, когда доказана сходимость. Сумму же сходящегося ряда всегда можно вычислить приближенно, взяв достаточно большое количество n членов в составе его частичной суммы S_n; при этом точность вычисления увеличивается с ростом n.

Пример 1. Доказать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

и найти его сумму.

Решение. Воспользуемся определением сходимости ряда и его суммы, для чего вычислим частичную сумму произвольного (n-го) порядка. Преобразуем общий член ряда к виду

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

и сложим первые n членов. При этом мы обнаруживаем, что члены, начиная со второго и кончая предпоследним, будут взаимно уничтожаться:

$$S_n = (1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + \ldots + (\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}) + (\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}) = 1-\frac{1}{n+1}.$$

Теперь вычисляем следующий предел:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1}) = 1$$

Таким образом, ряд оказался сходящимся и его сумма $S=1$.

Пример 2. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Замечание. Указанный ряд называется *гармоническим*. Ниже будет рассмотрен более общий случай так называемого ряда Дирихле (иначе называемого обобщенным гармоническим рядом).

Решение. Исследование разобьем на несколько этапов.

1. Поведение частичных сумм ряда определится следующей оценкой его общего члена:

$$\frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln n.$$

2. Доказательство этой оценки основано на неравенстве

$$\ln(1+x) < x, \quad x > 0, \qquad (1.1.3)$$

которое мы сейчас установим (читателю рекомендуется изобразить графики левой и правой части неравенства). Разность левой и правой частей (1.1.3)

$$y(x) = \ln(1+x) - x$$

- убывающая функция , поскольку $y'(x) = \dfrac{1}{x+1} - 1 < 0$ при $x > 0$.

Кроме того, очевидно, что $y(0) = 0$; значит разность $y(x)$ остается отрицательной: $\ln(1+x) - x < 0$ при всех $x > 0$. Это и утверждалось в соотношении (1.1.3).

3. Выбирая $x = \dfrac{1}{n}$ в (1.1.3), имеем неравенство

$$\frac{1}{n} > \ln(1+\frac{1}{n}) = \ln\frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n,$$

для общего члена ряда, которое мы и хотели установить.

4. Теперь частичная сумма n-го порядка

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$$

имеет оценку снизу

$$S_n > (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \ldots(\ln n - \ln(n-1)) + (\ln(n+1) - \ln n) = \ln(n+1),$$

откуда вытекает, что $S_n \to \infty$ вместе с $\ln(n+1)$ при $n \to \infty$.

Итак, исследуемый ряд расходится. Интересна следующая интерпретация полученного результата. Допустим, что человек делает шаг, затем еще полшага, затем треть, четверть шага и т.д. Как далеко он при этом уйдет?

Ясно, что для ответа на этот вопрос следует сложить числа

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \text{ т.е найти сумму ряда } \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots,$$

которая, как мы только что выяснили, оказывается бесконечной. Следовательно, человек при описанном процессе уйдет как угодно далеко.

1.1.2 Установим некоторые *свойства сходящихся рядов*. Пусть даны произвольные действительные числа τ, ρ и сходящиеся числовые ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n, \tag{1.1.4}$$

суммы которых равны U и V соответственно.

Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\tau u_n + \rho v_n) \tag{1.1.5}$$

сходится и его сумма равна $\tau U + \rho V$.

Доказательство легко следует из определений сходимости и суммы ряда. Исключим из рассмотрения случай $\tau = \rho = 0$, в котором утверждение становится очевидным (сумма ряда, состоящего из нулей, равна нулю) и запишем n-ую частичную сумму исследуемого ряда (1.1.5):

$$S_n = (\tau u_1 + \rho v_1) + (\tau u_2 + \rho v_2) + \dots + (\tau u_n + \rho v_n) =$$

$$= \tau(u_1 + u_2 + .. + u_n) + \rho(v_1 + v_2 + \dots + v_n) = \tau U_n + \rho V_n,$$

где U_n, V_n - частичные суммы соответствующих рядов (1.1.4). В силу их сходимости имеем

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \tau U_n + \lim_{n\to\infty} \rho V_n = \tau U + \rho V.$$

Итак, ряд (1.1.5) оказался (на основании определения) сходящимся к сумме $\tau U + \rho V$.

В частности, при $\rho = 0$, $\tau \neq 0$, получаем что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau u_n$$

имеет то же поведение, что и

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Если исходный ряд был сходящимся, то его сумма умножится на τ.

1.1.3 По заданной бесконечной последовательности $\{w_n\}$ построим теперь ряд вида

$$w_{N+1} + w_{N+2} + \ldots, \qquad (1.1.6)$$

где $N = 1,2,\ldots$ и назовем его N-ым *остатком ряда* (1.1.1); иными словами, N-ый остаток (1.1.1) есть ряд, полученный отбрасыванием первых N членов.

Обозначим при $n > N$ через $S_{N,n}$ n-ю частичную сумму ряда-остатка (1.1.6)

$$S_{N,n} = w_{N+1} + \ldots + w_n$$

и, в случае его сходимости, через $R = R_N$ - сумму этого ряда, т.е.

$$R_N = \lim_{n\to\infty} S_{N,n} .$$

Докажем, что *ряд (1.1.1) сходится тогда и только тогда, когда сходится каждый его ряд-остаток (1.1.6)*. Другими словами, установим, что *отбрасывание или добавление конечного числа (первых) членов не влияет на сходимость данного ряда*.

Действительно, при $n > N$ частичная сумма ряда (1.1.1) есть

$$S_n = w_1 + \ldots + w_N + w_{N+1} + \ldots + w_n = S_N + S_{N,n},$$

откуда следует, что S_n и $S_{N,n}$ отличаются на фиксированную величину S_N, а значит одновременно имеют или не имеют предел при $n \to \infty$. Итак, ряды (1.1.1) и (1.1.6) сходятся или расходятся одновременно.

Установим также следующее *свойство остатка*: если ряд (1.1.1) является сходящимся, то

$$\lim_{N\to\infty} R_N = 0. \qquad (1.1.7)$$

Действительно, если перейти к пределу при $n \to \infty$ в только что установленном равенстве $S_n = S_N + S_{N,n}$, то получим $S - S_N = R_N$, где R_N сумма N-го остатка. Теперь, устремляя $N \to \infty$ в последнем соотношении и пользуясь сходимостью (к сумме S) ряда (1.1.1), имеем

$$S - \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} R_N \quad \text{или} \quad S - S = \lim_{N\to\infty} R_N,$$

откуда и вытекает соотношение (1.1.7).

1.2 Необходимый признак сходимости ряда. Сумма геометрической прогрессии

1.2.1 ***Теорема*** (*необходимый признак сходимости ряда*). Если ряд (1.1.1) сходится, то существует предел (при $n \to \infty$) его общего члена w_n, причем

$$\lim_{n\to\infty} w_n = 0. \qquad (1.2.1)$$

Обратное утверждение неверно.

Доказательство. Пусть S – сумма сходящегося ряда. Очевидно, что соотношение $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ может быть записано также и в виде $S = \lim_{n\to\infty} S_{n-1}$. Тогда, вычисляя для $w_n = S_n - S_{n-1}$ предел разности, имеем

$$\lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0,$$

так что существование предела общего члена и его равенство нулю доказаны.

Ряд с общим членом $w_n = \dfrac{1}{n}$ является расходящимся гармоническим рядом (пример 2 п.1.1.1), причем для таких w_n выполнено соотношение

(1.2.1). Приведенный пример показывает, что, утверждение, обратное сформулированному в теореме, неверно.

Следствие (*достаточный признак расходимости*). Если

$$\lim_{n\to\infty} |w_n| \neq 0 \qquad (1.2.2)$$

или если предел вида

$$\lim_{n\to\infty} w_n$$

не существует, то ряд (1.1.1) расходится.

Действительно, в противном случае (т.е. если бы ряд сходился) мы имели бы существование и равенство нулю предела вида (1.2.1), но тогда при $n \to \infty$ имело бы место и соотношение $|w_n| \to 0$, что противоречит условию (1.2.2).

1.2.2 *Сумма геометрической прогрессии.* Пусть a и q - ненулевые действительные числа. Рассмотрим *бесконечную геометрическую прогрессию*

$$a,\ aq,\ aq^2, \ldots, aq^n, \ldots$$

ряд, составленный из ее членов

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n \qquad (1.2.3)$$

и исследуем его сходимость.

Случай 1: $|q| \geq 1$; в этом случае $|aq^n| = |a| \cdot |q|^n \geq |a|$. Могут представиться две возможности: либо предел общего члена ряда (1.2.3) не существует, либо он существует и тогда согласно неравенству $|q| \geq 1$ значение предела

$$\lim_{n\to\infty} |aq^n|$$

не меньше числа $|a| > 0$. В обоих случаях, по достаточному признаку расходимости ряда (следствие пункта 1.2.1), получаем, что (1.2.3) расходится.

Случай 2: $|q|<1$; в этом случае n-ая частичная сумма ряда (1.2.3) имеет вид

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

(формула суммы первых членов геометрической прогрессии).

Вычислим предел последовательности частичных сумм:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}(1-\lim_{n\to\infty} q^n).$$

Последний предел существует, т.к.

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \quad \text{при} \quad |q|<1.$$

Теперь

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q},$$

т.е. ряд оказался сходящимся к сумме

$$S = \frac{a}{1-q}.$$

Итак, мы установили, что *ряд (1.2.3) с* $a \neq 0$ *является сходящимся тогда и только тогда, когда* $|q|<1$ и нашли в этом случае его сумму.

1.3 Сходимость рядов с положительными членами: признаки сравнения

1.3.1 Рассмотрим случай, когда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1.3.1}$$

составлен из положительных чисел, т.е. порожден последовательностью $\{a_n\},\ a_n > 0,\ n = 1,2,...;$ такой ряд называют *знакоположительным.* Обозначим через S_n его n-ую частичную сумму.

В вопросах исследования знакоположительных рядов потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма. Если последовательность $\{S_n\}$ ограничена сверху, то ряд (1.3.1) сходится.

Доказательство. С ростом n последовательность $\{S_n\}$ возрастает, т.к. в частичной сумме будут добавляться положительные члены. Кроме того, по условию, эта последовательность ограничена. Но, как известно из математического анализа, всякая возрастающая ограниченная (сверху) последовательность имеет предел; в нашем случае, следовательно, существует (конечный) предел последовательности S_n при $n \to \infty$. Это и означает сходимость ряда (1.3.1).

1.3.2 Одним из способов исследования сходимости знакоположительного ряда является сравнение его общего члена с общим членом некоторого ряда с известным поведением ("эталонного ряда"). Примером эталонного является ряд, составленный из членов бесконечной геометрической прогрессии (см. п. 1.2.2). Другие примеры см. в конце настоящего параграфа.

***Теорема* 1** (*признак сравнения по величине*). Пусть даны два знакоположительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1.3.2}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{1.3.3}$$

и при всех $n = 1,2,...$ имеет место неравенство

$$a_n \le b_n. \tag{1.3.4}$$

Тогда: 1)если сходится ряд (1.3.3) (к некоторой сумме B) , то сходится и ряд (1.3.2) (к некоторой сумме A); при этом для их сумм имеет место соотношение $A \le B$;

2)если ряд (1.3.2) расходится, то расходится и ряд (1.3.3).

Замечание. Согласно свойству п.1.1.3 (отбрасывание или добавление конечного числа членов не влияет на сходимость ряда) утверждение теоремы имеет место, если соотношение (1.3.4) выполняется не при всех n, а лишь начиная с некоторого номера N.

Доказательство. 1) Если ряд (1.3.3) сходится, то последовательность $\{B_n\}$ его частичных сумм (как сходящаяся последовательность) ограничена сверху некоторой постоянной $C: B_n \le C$. Если также A_n - последовательность частичных сумм ряда (1.3.2), то из неравенства (1.3.4) вытекает, что

$$A_n \le B_n \le C \qquad (1.3.5)$$

при всех n. Следовательно, последовательность A_n ограничена сверху, а тогда, по лемме п.1.3.1, ряд (1.3.2) сходится. Переходя к пределу в неравенстве (1.3.5), получаем также $A \le B$. Утверждение 1) установлено.

2)Если ряд (1.3.3) расходится, то (1.3.2) не может быть сходящимся: иначе, согласно утверждению 1), обязан был бы сходиться и ряд (1.3.2). Второе утверждение теоремы доказано.

1.3.3 ***Теорема* 2** (*признак сравнения в предельной форме*). Пусть даны два знакоположительных ряда (1.3.2) и (1.3.3), причем существует (конечный) предел вида

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n},\ L > 0. \qquad (1.3.6)$$

Тогда ряды (1.3.2) и (1.3.3) сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Согласно (1.3.6) и определению предела, для каждого $\varepsilon > 0$ (выбранного так, чтобы $\varepsilon < L$) неравенство

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - L \right| < \varepsilon$$

имеет место при всех достаточно больших *n* (именно, при $n > N$, где номер

N определяется выбранным ε). Из последнего соотношения (при указанных n) вытекает, что

$$-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} - L < \varepsilon$$

или, одновременно,

$$a_n < (L+\varepsilon)b_n, \qquad b_n < \frac{1}{L-\varepsilon}a_n \tag{1.3.7}$$

Согласно выбору ε имеет место оценки $L+\varepsilon > 0$ и $L-\varepsilon > 0$. Тогда (согласно свойству п.1.1.2) ряд с общим членом $\frac{1}{L-\varepsilon}a_n$ ведет себя так же, как (1.3.2), а ряд с членами $(L+\varepsilon)b_n$ – как (1.3.3). Теперь (в силу теоремы 1), первое неравенство в (1.3.7) будет означать, что из сходимости (1.3.3) вытекает сходимость (1.3.2), а из расходимости (1.3.2) – расходимость (1.3.3). Аналогичные утверждения следует из второго неравенства в (1.3.7), если "поменять ролями" (1.3.2) и (1.3.3). Таким образом, поведение рядов (1.3.2) и (1.3.3) – одинаково, что и утверждалось.

Пример 1. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(2^n+1)n}.$$

Решение. Оценим сверху общий член ряда:

$$a_n < \frac{2n+1}{2^n n} = (\frac{2n}{n} + \frac{1}{n})(\frac{1}{2})^n \le 3(\frac{1}{2})^n.$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3(\frac{1}{2})^n$$

составлен из членов геометрической прогрессии с первым членом $a=3$ и знаменателем $q=\frac{1}{2}$, меньшим единицы; следовательно, этот ряд сходится. По теореме 1 сравнения тогда сходится и данный ряд.

Пример 2. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+3n+1}.$$

Решение. При больших значениях n поведение общего члена ряда

$$a_n=\frac{n}{n^2+3n+1}$$

определяется поведением старших степеней параметра n. Это обстоятельство наводит на мысль рассмотреть последовательность $\{b_n\}$ с общим членом

$$b_n=\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}$$

и сравнить (на основании признака в предельной форме) данный ряд с

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Последний (гармонический) ряд, как установлено выше (п. 1.1.1) , является расходящимся. Имеем

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+3n+1}:\frac{1}{n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2(1+3/n+1/n^2)}=1,$$

т.е. $L\neq 0$. Отсюда заключаем, что поведение сравниваемых рядов одинаково, а значит данный ряд расходится.

1.3.4 Использование признаков сравнения знакоположительных рядов предполагает наличие некоторого эталона для сравнения. Было бы полезно дополнить список признаков такими, которые позволяли бы исследовать поведение ряда, исходя лишь из вида его общего члена. Соответствующие признаки предлагаются в следующих параграфах.

1.4 Сходимость рядов с положительными членами: признаки Коши и Даламбера

Рассмотрим знакоположительный ряд (1.3.1).

1.4.1 ***Теорема* 1** (*радикальный признак Коши*). Пусть существует предел вида

$$K = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}\ . \tag{1.4.1}$$

Если $K < 1$, то ряд (1.3.1) сходится; если же $K > 1$, то ряд расходится.

Замечание. В случае $K = 1$ признак Коши не дает ответа на вопрос о сходимости ряда: существуют примеры как сходящихся, так и расходящихся рядов, для которых $K = 1$.

Доказательство. Согласно (1.4.1) и определению предела, для каждого $\varepsilon > 0$ существует номер N , такой что неравенство

$$|\sqrt[n]{a_n} - K| < \varepsilon$$

имеет место при всех $n > N$. Из последнего соотношения (при указанных n) вытекает, что

$$K - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < K + \varepsilon. \tag{1.4.2}$$

Случай 1: $K < 1$. Ввиду произвольности выбора ε положим $0 < \varepsilon < 1 - K$ и обозначим $q = K + \varepsilon$, так что $0 < q < 1$. Из (1.4.2) вытекает тогда, что $a_n < (K+\varepsilon)^n$ или $a_n < q^n$ при всех $n > N$. Поскольку сумма членов геометрической прогрессии

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} q^n$$

является сходящимся рядом то по первой теореме сравнения (см. также замечание к ней) сходится и ряд (1.3.1).

Случай 2: $K > 1$. В этом случае выберем ε так, что $0 < \varepsilon < K - 1$ и обозначим $Q = K - \varepsilon$, так что $Q > 1$. Из (1.4.2) вытекает тогда, что

$a_n > (K+\varepsilon)^n$ или $a_n > Q^n$ при всех n, начиная с некоторого номера N. Но в этом случае члены ряда (1.3.1) не могут стремиться к нулю и ряд расходится по достаточному признаку расходимости.

Теорема полностью доказана.

1.4.2 ***Теорема* 2** (*признак Даламбера*). Пусть существует предел вида

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Если $D < 1$, то ряд (1.3.1) сходится; если же $D > 1$, то ряд расходится.

Доказательство мы не приводим, но его идея та же, что и в случае теоремы 1. Отметим только (это потребуется в дальнейшем), что при $D > 1$ расходимость ряда имеет место ввиду достаточного признака расходимости (см. доказательство признака Коши).

Замечание 1. В случае $D = 1$ (подобно признаку Коши) теорема 2 не дает ответа на вопрос о сходимости ряда.

Замечание 2. Число D будет отличным от единицы, если члены ряда (1.3.1) убывают или растут достаточно быстро (см. примеры ниже).

Пример 1. Исследовать сходимость ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n+1}{n})^{n^2}$$

Решение. Имеем знакоположительный ряд с общим членом

$$a_n = (\frac{n+1}{n})^{n^2},$$

вид которого наводит на мысль использовать признак Коши. Вычисляем

$$K = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} (\frac{n+1}{n})^n = e.$$

Поскольку $K = e = 2{,}71... > 1$, то данный ряд расходится.

Пример 2. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)5^n}{n^2}.$$

Решение. Общий член знакоположительного ряда

$$a_n = \frac{(2n+1)5^n}{n^2}$$

содержит множителем показательную функцию, и, следовательно, растет (с ростом n) достаточно быстро. Следовательно, целесообразным будет применение признака Даламбера. Найдем a_{n+1}, взяв $(n + 1)$ вместо n в аналитическом выражении для a_n:

$$a_{n+1} = \frac{(2(n+1)+1)5^{n+1}}{(n+1)^2} = \frac{(2n+3)5^{n+1}}{(n+1)^2}.$$

Теперь вычисляем соответствующий предел:

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)5^{n+1}}{(n+1)^2} : \frac{(2n+1)5^n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{2n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \frac{5^{n+1}}{5^n} =$$

$$= 5 \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n}}{2+\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2 = 5 \cdot \frac{2}{2} \cdot 1 = 5 > 1.$$

Имеем: $D > 1$; согласно признаку Даламбера, ряд расходится.

***Пример* 3**. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n!}.$$

Решение. Наличие $n!$ в знаменателе дроби

$$a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{n!}$$

свидетельствует о ее быстром убывании, в силу чего может быть эффективен признак Даламбера. Имеем $a_{n+1} = \dfrac{\sqrt{n+2}}{(n+1)!}$ и

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+2}{n+1}}\cdot\frac{n!}{(n+1)!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}}\cdot\frac{n!}{n!(n+1)}=0.$$

Поскольку оказалось $D<1$, то данный ряд сходится.

1.5 Сходимость рядов с положительными членами: интегральный признак Коши

Следующий признак позволяет свести вопрос об исследовании сходимости знакоположительного ряда к более знакомой задаче об исследовании сходимости несобственного интеграла.

1.5.1 Рассмотрим аналитическое выражение общего члена a_n (формулу, которой он задан) знакоположительного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n \qquad (1.5.1)$$

и заменим в ней n на x. В результате получим некоторую функцию $a(x)$. Пусть эта функция непрерывна и убывает на промежутке $[1,+\infty)$.

Теорема (*интегральный признак Коши*). Если несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty}a(x)dx \qquad (1.5.2)$$

сходится, то сходится и ряд (1.5.1); если же интеграл (1.5.2.) расходится, то расходится и ряд.

Доказательство основано на следующем неравенстве:

$$S_n-a_1<\int_1^n a(x)dx<S_{n-1}.$$

Чтобы его доказать, используем следующие рассуждения геометрического характера (см. рис. 1.5.1).

Значение $\int_1^n a(x)dx$ численно равно площади криволинейной трапеции, основанием которой является отрезок $[1,n]$ и которая ограничена сверху графиком $y = a(x)$. Точки с координатами (n, a_n) расположены на графике $y = a(x)$, а

$$S_n - a_1 = a_2 + a_3 + ... + a_n.$$

Первое слагаемое $a_2 = 1 \cdot a_2$ можно считать равным площади прямоугольника, основание которого - отрезок $[1,2]$ оси абсцисс, а высота h равна a_2; второй член - площади прямоугольника с основанием $[2,3]$ и высотой $h = a_3$;…; последний член суммы a_n численно совпадает с площадью прямоугольника, имеющего основанием отрезок $[n-1, n]$ и высоту, равную a_n. Полученная ступенчатая фигура (см. рис. 1.5.1), состоящая из указанных прямоугольников, содержится в криволинейной трапеции, а значит имеет меньшую площадь:

$$S_n - a_1 < \int_1^n a(x)dx.$$

Аналогичны рассуждения в случае второго неравенства: сумма $S_{n-1} = 1 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 + ... + 1 \cdot a_{n-1}$ численно равна площади ступенчатой фигуры, состоящей из прямоугольников, основания которых - отрезки $[1,2], [2,3], ..., [n-1, n]$, а высоты равны, соответственно $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$. Эта фигура содержит в себе криволинейную трапецию, а значит имеет большую площадь:

$$S_{n-1} > \int_1^n a(x)dx. \qquad (1.5.3)$$

В случае сходимости несобственного интеграла (1.5.2) из неравенства

$$S_n < a_1 + \int_1^n a(x)dx < a_1 + \int_1^\infty a(x)dx$$

получаем ограниченность последовательности частичных сумм и, следовательно (на основании леммы п.1.3.1) ее сходимость. В случае же расходимости несобственного интеграла и оценки (1.5.3) имеем неограниченность последовательности S_{n-1}, а значит, расходимость ряда (1.5.1).

Итак, ряд (1.5.1) ведет себя так же, как несобственный интеграл (1.5.2), что и требовалось доказать.

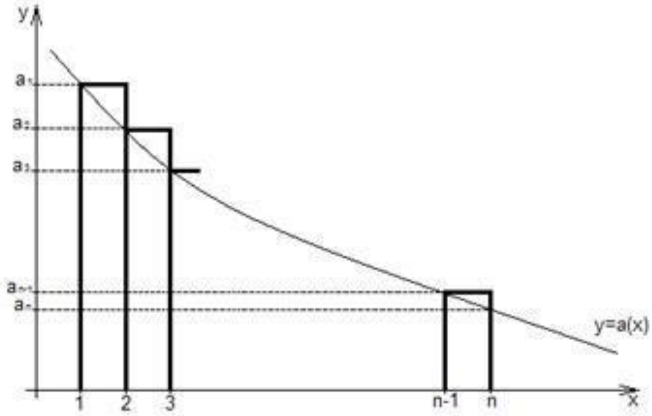

Рис. 1.5.1

Замечание. Если нумерация членов ряда начинается не с единицы, а с некоторого натурального κ, т.е. если имеем знакоположительный ряд

$$\sum_{n=\kappa}^{\infty} a_n,$$

то интегральный признак применяется к функции $a(x)$ при $x \in [\kappa, +\infty)$, т.е. поведение ряда определяется сходимостью или расходимостью несобственного интеграла

$$\int_{\kappa}^{\infty} a(x)\, dx.$$

1.5.2 Рассмотрим ряд (называемый рядом Дирихле или обобщенным гармоническим рядом)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \ p \in R. \qquad (1.5.4)$$

Докажем, что ряд (1.5.4) сходится при $p > 1$ и расходится при остальных действительных значениях p.

Начнем со случая $p > 0$, $p \neq 1$ и применим интегральный признак Коши.

Заменяя в записи общего члена ряда n на x, получим функцию $a(x) = \frac{1}{x^p}$, $x \in [1,+\infty)$. Ясно, что на указанном промежутке функция $a(x)$ непрерывна и убывает. Исследуем теперь несобственный интеграл (1.5.2).

Если $p > 1$, то

$$\int_1^{\infty} a(x)dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \int_1^T x^{-p} dx = \lim_{T\to\infty} \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_1^T = \frac{1}{1-p} \lim_{T\to\infty} \left(\frac{1}{T^{1-p}} - 1\right) = \frac{1}{p-1}.$$

Итак, исследуемый интеграл оказался сходящимся, откуда и следует сходимость ряда (1.5.1).

Если $0 < p < 1$, то тот же интеграл вычисляется в виде

$$\int_1^{\infty} a(x)dx = \frac{1}{1-p} \lim_{T\to\infty} (T^{1-p} - 1) = +\infty,$$

откуда следует расходимость ряда (1.5.4).

В случае $p = 1$ снова применяем интегральный признак Коши с $a(x) = \frac{1}{x}$
:

$$\int_1^{\infty} a(x)dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{T\to\infty} (\ln x) \Big|_1^T = \lim_{T\to\infty} \ln T = +\infty,$$

так что интеграл (1.5.2) расходится; тем самым еще раз установлена расходимость гармонического ряда.

Наконец, при $p \le 0$ имеем $a_n = n^{-p} \ge 1$, так что общий член ряда (1.5.4) не стремится к нулю, а тогда этот ряд расходится по достаточному признаку расходимости.

Замечание. Если к гармоническому ряду применить признаки Коши и Даламбера, то, как нетрудно проверить, получится соответственно $K = 1$ и $D = 1$. В то же время условия $K = 1$ и $D = 1$ выполняются и для членов сходящегося ($p > 1$) ряда Дирихле. Приведенные примеры подтверждают ранее сделанный вывод, что по одной только информации вида $K = 1$ и $D = 1$

о поведении ряда судить нельзя; следует провести дополнительное исследование: например, применить другие признаки.

1.6 Знакочередующиеся ряды

1.6.1 Рассмотрим знакоположительную последовательность

$$\{a_n\},\ a_n \in R, a_n > 0, n = 1,2,... \qquad (1.6.1)$$

Ряд вида

$$a_1 - a_2 + a_3 - ... + (-1)^{n-1}a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n \qquad (1.6.2)$$

называется *знакочередующимся*. Достаточный признак его сходимости содержится в следующей теореме Лейбница.

Теорема 1. Если последовательность (1.6.1) является убывающей и

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \qquad (1.6.3)$$

то знакочередующийся ряд (1.6.2) сходится. При этом для суммы S ряда (1.6.2) справедлива оценка

$$0 \le S \le a_1. \qquad (1.6.4)$$

Доказательство. В последовательности частичных сумм S_n ряда (1.6.1) индекс n пробегает последовательно нечетные и четные значения $n = 2m-1,\quad n = 2m \quad (m = 1,2,...)$. Следовательно, достаточно доказать существование и совпадение пределов последовательностей частичных сумм нечетного и четного порядка $S_{2m-1},\ S_{2m}\ (m \to \infty)$. Суммы S_{2m-1} и S_{2m} отличаются лишь членом a_{2m-1}, а именно $S_{2m-1} = S_{2m} - a_{2m-1}$. Следовательно, если существует конечный предел

$$S = \lim_{m\to\infty} S_{2m}, \qquad (1.6.5)$$

то

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m-1} = \lim_{m\to\infty} S_{2m} - \lim_{m\to\infty} a_{2m-1} \quad .$$

При этом

$$\lim_{m\to\infty} a_{2m-1} = 0$$

в силу соотношения (1.6.3), которое возможно применить, поскольку $2m-1\to\infty$ при $m\to\infty$.

Остается доказать существование предела (1.6.5), для чего достаточно установить возрастание и ограниченность (сверху) последовательности S_{2m}.

Для этого, в свою очередь, запишем S_{2m} в виде

$$S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + ...(a_{2m-1} - a_{2m}) \tag{1.6.6}$$

и

$$S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - ... - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m}, \tag{1.6.7}$$

использовав два различных способа попарной группировки слагаемых.

С ростом m в сумме (1.6.6) будут добавляться положительные (по причине убывания последовательности (1.6.1)) разности вида $a_{2m-1} - a_{2m}$, в результате чего эта сумма будет возрастать; при этом

$$S_{2m} \geq 0. \tag{1.6.8}$$

С другой стороны, по той же причине убывания последовательности положительных чисел (1.6.1), в (1.6.7) из a_1 вычитаются положительные члены, так что

$$S_{2m} < a_1 \quad \text{при всех} \quad m = 1,2,... \tag{1.6.9}$$

Итак, возрастание и ограниченность (сверху) последовательности S_{2m} установлены, к чему и сводилось доказательство теоремы.

Оценка (1.6.4) может быть получена из (1.6.5), (1.6.8) и (1.6.9) путем предельного перехода при $m\to\infty$. Теорема полностью доказана.

Замечание. Утверждение теоремы можно применить и к знакочередующемуся ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n,$$

который начинается с отрицательного члена, поскольку умножение всех членов ряда на ненулевое число (в нашем случае на -1) не влияет (см. п. 1.1.2) на его сходимость. В этом случае сумма S ряда окажется отрицательной и оценка (1.6.4) будет справедлива для $|S|$.

1.6.2 ***Следствие.*** При выполнении условий теоремы Лейбница сумма остатка

$$R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \qquad (1.6.10)$$

знакочередующегося ряда имеет оценку

$$|R_N| \le a_{N+1}. \qquad (1.6.11)$$

Для доказательства (1.6.11) запишем остаток (1.6.10) ряда в виде

$$R_N = (-1)^N a_{N+1} + (-1)^{N+1} a_{N+2} + (-1)^{N+2} a_{N+3} ... =$$
$$= (-1)^N (a_{N+1} - a_{N+2} + a_{N+3} - ...),$$

откуда

$$(-1)^N R_N = a_{N+1} - a_{N+2} + a_{N+3} - ...$$

есть сумма знакочередующегося ряда, члены которого удовлетворяют условиям теоремы Лейбница, причем первым членом ряда является a_{N+1}. Согласно утверждению теоремы об оценке суммы знакочередующегося ряда имеем теперь $0 \le (-1)^N R_N \le a_{N+1}$ или (с учетом того, что N может быть нечетным), $|R_N| \le a_{N+1}$, что и утверждалось.

Утверждение следствия может быть переформулировано в виде следующего правила: *при замене суммы знакочередующегося ряда суммой первых его нескольких членов абсолютная погрешность не превзойдет модуля первого из отброшенных членов.*

1.6.3 ***Примеры.***

Пример 1. Ряд вида

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ... + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} ... \qquad (1.6.12)$$

является сходящимся, поскольку выполнены оба условия признака Лейбница: последовательность $\{\frac{1}{n}\}$ является, очевидно, убывающей и имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Пример 2. Вычислить сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2^n}$$

с точностью до 0,01.

Решение. Имеем знакочередующийся ряд с $a_n=\frac{n}{2^n}$ и отрицательным первым членом

$$-\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}-\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}-\frac{5}{2^5}+\frac{6}{2^6}-\frac{7}{2^7}+\frac{8}{2^8}-\frac{9}{2^9}+\frac{10}{2^{10}}-...,$$

причем для последовательности $\{a_n\}$ выполнены условия теоремы Лейбница. Последнее утверждение вытекает из того обстоятельства, что показательная функция $y=2^x$ растет (при $x\to\infty$) быстрее линейной $y=x$; более точно проверить условия теоремы можно, доказав средствами дифференциального исчисления убывание функции $y=\frac{x}{2^x}$ и ее стремление к нулю при $x\to\infty$ (для этого можно использовать правило Лопиталя).

Согласно вышеприведенному правилу, сумму ряда можно вычислить приближенно, оставив все первые его члены, модули которых еще больше 0,01 и отбросив все члены, начиная с того, который уже меньше 0,01. Таким является член $\frac{10}{2^{10}}$<0,01 , тогда как предшествующий ему $\frac{9}{2^9}$=0, 017…>0,01.

Имеем

$$S\approx-\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}-\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}-\frac{5}{2^5}+\frac{6}{2^6}-\frac{7}{2^7}+\frac{8}{2^8}-\frac{9}{2^9}\approx\text{-0,16}$$

с точностью до 0,01.

1.7 Абсолютная и условная сходимость знакопеременного ряда

1.7.1 Рассмотрим ряд из действительных чисел

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{1.7.1}$$

среди членов которого имеются как положительные, так и отрицательные числа; такой ряд называется *знакопеременным*. Рассмотрим также ряд, составленный из *абсолютных величин* членов (1.7.1):

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|. \tag{1.7.2}$$

Будем считать, что количество как положительных, так и отрицательных членов в (1.7.1) является бесконечным, так как в противном случае вопрос о сходимости сводится к случаю знакоположительных рядов. В самом деле, если, например, количество положительных членов в (1.7.1) оказывается конечным, то, начиная с некоторого номера, все члены ряда будут отрицательными. Тогда поведение ряда определяется поведением этого остатка (п. 1.1.4), состоящего только из отрицательных членов. Если же изменить знаки всех членов ряда - остатка на противоположные, т.е. умножить все члены на (-1), то его поведение не изменится (свойство п.1.1.3). Таким образом, вопрос сведен к исследованию сходимости полученного знакоположительного ряда.

Теорема. Если сходится ряд (1.7.2), то сходится и ряд (1.7.1).

Сходимость ряда (1.7.1) в этом случае называется *абсолютной*.

Обратное утверждение неверно: знакопеременный ряд может быть сходящимся, тогда как (1.7.2) - расходящийся. Примером служит (1.6.12), для которого ряд из абсолютных величин - это расходящийся (см. п.1.1.2) гармонический ряд. В таких случаях говорят, что ряд (1.7.1) *сходится условно*.

Подразделение сходимости на абсолютную и условную присуще именно знакопеременным рядам. С точки зрения введенных понятий сходящийся знакоположительный ряд – это всегда абсолютно сходящийся ряд, поскольку ряд из модулей совпадает с ним самим.

Доказательство теоремы. Пусть

$$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n \tag{1.7.3}$$

n -ая частичная сумма ряда, а

$$\sigma_n = |u_1| + |u_2| + ... + |u_n| \tag{1.7.4}$$

n -ая частичная сумма ряда из абсолютных величин (1.7.2).

Выделим в (1.7.3) сумму всех положительных членов, и обозначим ее через S_n^+, а сумму абсолютных величин всех отрицательных членов (в составе S_n) обозначим через S_n^-. Суммы S_n и S_n, составленные из положительных чисел, возрастают с ростом n. Тогда, очевидно,

$$S_n = S_n^- - S_n^-, \ \sigma_n = S_n^+ + S_n^-.$$

Последовательность (1.7.4) имеет предел (ввиду сходимости ряда (1.7.2)), а значит является ограниченной, т.е. существует постоянная $C > 0$, такая что

$\sigma_n \le C$ при всех n. Ясно, что тогда $S_n^+ \le S_n^+ + S_n^- = \sigma_n \le C,$ и, точно так же, $S_n^- \le \sigma_n \le C$. Значит, последовательности S_n и S_n^-, будучи возрастающими и ограниченными, имеют конечные пределы. Тогда имеет предел их разность S_n, что и означает сходимость ряда (1.7.1).

1.7.2 ***Примеры.***

Пример 1. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\frac{\pi}{2^n}.$$

Решение. Имеем общий член ряда в виде

$$w_n = (-1)^n \sin\frac{\pi}{2^n}$$

и

$$\sin\frac{\pi}{2^n} > 0;$$

последнее неравенство имеет место, т.к. при $n = 1,2,...$ значения аргумента $\frac{\pi}{2^n}$ принадлежат первой четверти тригонометрической окружности. Значит,

$$|w_n| = \sin\frac{\pi}{2^n},$$

а тогда для ряда из модулей число Даламбера

$$D = \lim_{n\to\infty}\frac{|w_{n+1}|}{|w_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\frac{\pi}{2^n}} == \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^n}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

вычисляя последний предел, мы воспользовались эквивалентностью бесконечно малых $\sin t$ и t при $t \to 0$ в случаях, когда значения t выбраны равными $\frac{\pi}{2^{n+1}}$ и $\frac{\pi}{2^n}$.

Итак, $D = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, откуда следует, что сходится ряд из модулей, а тогда данный ряд сходится абсолютно.

Пример 2. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1-(-1)^n n}.$$

Решение. Имеем

$$|w_n| = \frac{n}{|1-(-1)^n n|} = \frac{n}{|(-1)^n n|\cdot|\frac{(-1)^n}{n}-1|} = \frac{1}{|\frac{(-1)^n}{n}-1|},$$

и теперь легко заметить, что $|w_n|$ не стремится к нулю:

$$\lim_{n\to\infty}|w_n| = 1.$$

Согласно достаточному признаку расходимости, данный ряд будет расходящимся.

2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

2.1 Функциональные ряды. Равномерная сходимость

2.1.1 Пусть на некотором числовом множестве G задана бесконечная последовательность функций $\{u_n(x)\}$, $n = 1,2,\ldots$ Выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \qquad (2.1.1)$$

называется *функциональным рядом* на G. При каждом $x = x_0 \in G$ имеем *числовой* ряд из членов $u_n(x_0)$. Если получаемый числовой ряд сходится, то x_0 называется его точкой сходимости, а если расходится - то точкой расходимости. На множестве $G_0 \subset G$ всех точек сходимости ряда (2.1.1) задана тогда функция $S = S(x)$, называемая суммой ряда (2.1.1), где $S(x_0)$ есть обозначение суммы ряда (2.1.1) в точке x_0.

2.1.2 Как оказывается, привычные свойства конечных сумм функций могут не сохраняться при переходе к рядам (непрерывность суммы функций и др.) Такое положение может быть "исправлено" требованием так называемой равномерной сходимости ряда.

Пусть $S(x)$ есть сумма ряда (2.1.1) на некотором отрезке $G = [a,b]$ и при каждом n существует наибольшее значение модуля уклонения $S_n(x)$ от $S(x)$

$$\rho_n = \max_{z \in G} |S_n(x) - S(x)|, \quad n = 1,2,\ldots$$

Если

$$\lim_{n \to \infty} \rho_n = 0,$$

то ряд (2.4.1) называется *равномерно сходящимся* на G к сумме $S(x)$.

***Теорема* 1** (*достаточный признак* Вейерштрасса *равномерной сходимости*). Если существует числовая последовательность $\{\alpha_n\}$, такая что для всех $x \in G,\ n = 1,2,...$ имеют место оценки

$$|u_n(x)| \le \alpha_n \tag{2.1.2}$$

и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \tag{2.1.3}$$

- сходящийся, то ряд (2.1.1) равномерно сходится на G.

При выполнении условий теоремы говорят, что ряд (2.1.1) *мажорируем* на G, а знакоположительный ряд (2.1.3) называется *мажорантным*. В этих терминах теорема может быть сформулирована так: *мажорируемый на* G *функциональный ряд сходится равномерно на* G.

Отметим также (не приводя здесь соответствующих примеров), что условие мажорируемости является лишь достаточным для равномерной сходимости, но не является необходимым .

Доказательство. Ввиду соотношения (2.1.2), выполненного на G, имеем абсолютную сходимость (на G) ряда (2.1.1) к некоторой сумме $S(x)$; при этом

$$S(x) - S_n(x) = r_n(x), \tag{2.1.4}$$

где $r_n(x)$ - сумма ряда - остатка. По определению суммы ряда и ввиду свойств пределов (предельный переход под знаком модуля и предельный переход в неравенстве) имеем

$$|r_n(x)| = |\lim_{m\to\infty}(u_{n+1}(x) + ... + u_m(x))| = |\lim_{m\to\infty}|u_{n+1}(x) + ... + u_m(x)| \le$$

$$\le |\lim_{m\to\infty}(|u_{n+1}(x)| + ... + |u_m(x)|) \le |\lim_{m\to\infty}(\alpha_{n+1} + ... + \alpha_m).$$

Сумма под знаком последнего написанного предела представляет собою m-ю частичную сумму n-го остатка числового ряда (2.1.3), а значение предела - сумма его n-го остатка, которую мы обозначим через r_n^*:

$$|r_n(x)| \le r_n^*.$$

Ввиду сходимости ряда (2.1.3) имеем (см. п.1.1.4) $r_n^* \to 0$ при $n \to \infty$. Согласно (2.1.4), в определении равномерной сходимости функционального ряда при выполнении условия теоремы тогда имеем

$$\rho_n = \max_{x\in G} |S(x) - S_n(x)| = \max_{x\in G} |S_n(x) - S(x)| = \max_{x\in G} |r_n(x)| \le r_n^*.$$

и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n = 0,$$

что и означает равномерную (на G) сходимость ряда (2.1.1).

2.1.3 ***Теорема* 2.** Если ряд (2.1.1), составленный из функций $u_n(x)$, непрерывных на некотором отрезке $G = [a,b]$, равномерно на G сходится, то его сумма $S(x)$ непрерывна в каждой точке $x_0 \in G$, т.е.

$$\lim_{x\to x_0} S(x) = S(x_0). \qquad (2.1.5)$$

Доказательство. Оценим $|S(x) - S(x_0)|$. Имеем в силу (2.14)

$$|S(x) - S(x_0)| = |(S_n(x) + r_n(x)) - (S_n(x_0) + r_n(x_0))| \le$$

$$\le (|S_n(x) - S_n(x_0)| + |r_n(x)| + |r_n(x_0)|) \le |S_n(x) - S_n(x_0)| + 2\max_{x\in G} |r_n(x)| =$$

$$= |S_n(x) - S_n(x_0)| + 2\rho_n, \qquad (2.1.6)$$

где, по определению равномерной сходимости ряда, $\rho_n \to 0$ при $n \to \infty$. Поскольку конечная сумма $S_n(x)$ непрерывных (на G) функций является непрерывной, имеем

$$\lim_{x\to x_0} S_n(x) = S_n(x_0) \text{ или } \lim_{x\to x_0} |S_n(x) - S_n(x_0)| = 0,$$

а тогда, в силу (2.1.6),

$$\lim_{x\to x_0} |S(x) - S(x_0)| \le \lim_{x\to x_0} |S_n(x) - S_n(x_0)| + 2\rho_n = 2\rho_n. \qquad (2.1.7)$$

Левая часть (2.1.7) не зависит от n, и, следовательно, сохраняет свой вид при предельном переходе (по n), тогда как правая стремится к нулю. Переходя к пределу при $n \to \infty$ в обеих частях (2.1.7), получаем

$$\lim_{x\to x_0} |S(x) - S(x_0)| = 0,$$

откуда и следует (2.1.5).

2.1.4. Отметим (без доказательств) также следующие свойства равномерно сходящихся на отрезке $G=[a,b]$ функциональных рядов.

1) Ряд (2.1.1), составленный из непрерывных на функций можно *почленно интегрировать* по всякому отрезку $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$: если $S(x)$ - сумма ряда (2.1.1), то

$$\int_\alpha^\beta S(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_\alpha^\beta u_n(x)\,dx \quad .$$

2) Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u'_n(x)$ также сходится равномерно на $G=[a,b]$, то функция $S=S(x)$ *дифференцируема* на (a,b), причем в каждой точке этого промежутка

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u'_n(x).$$

2.2 Степенные ряды

2.2.1 Пусть $\{x^n\}, n=1,2,\ldots,$ - последовательность степенных функций, $\{a_n\}, n=0,1,\ldots$ - произвольная последовательность действительных чисел.

Ряд вида

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots \qquad (2.2.1)$$

называется *степенным*; для (2.2.1) употребляем также обозначение

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \ .$$

Очевидно, что любой степенной ряд сходится в точке $x_0=0$, т.к. все его частичные суммы $S_n(x_0)=a_0$, и, следовательно, предел последовательности

$S_n(x_0)$ существует и равен a_0. Нахождение других точек сходимости будет опираться на следующую теорему.

Теорема (Абеля). Если степенной ряд (2.2.1) сходится в некоторой точке $x_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится на промежутке, определяемом неравенством $|x| < |x_0|$. Если же x' - точка расходимости, то ряд (2.2.1) расходится при всех *x* таких, что $|x| > |x'|$.

Доказательство. 1) Ряд из модулей для (2.2.1) имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |x|^n . \tag{2.2.2}$$

Общий член ряда (2.4.2) можно представить следующим образом:

$$u_n(x) = |a_n| \cdot |x|^n = |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n , \tag{2.2.3}$$

где $x_0 \neq 0$ - точка сходимости ряда (2.2.1). Поскольку в этой точке выполнен необходимый признак сходимости, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} |a_n x_0^n| = 0 ,$$

то для всех *n* существует постоянная $\mathrm{M} > 0$ такая, что

$$|a_n x_0^n| \leq M .$$

При условии $|x| < |x_0|$ имеем для $q = \left|\frac{x}{x_0}\right|$, что $0 \leq q < 1$. Следовательно, в силу (2.2.3), справедлива оценка $0 \leq u_n(x) \leq M q^n, 0 \leq q < 1$, и ряд

$$M + Mq + Mq^2 + \ldots + Mq^n + \ldots$$

является сходящимся (сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии). По теореме сравнения знакоположительных рядов тогда сходится и ряд (2.2.2). Значит, в интервале $(-|x_0|, |x_0|)$ ряд (2.2.1) сходится абсолютно, что и утверждалось.

2. В случае $|x| > |x'|$ ряд (2.2.1) не может сходится в точке *x*. Действительно, в силу $|x'| < |x|$, сходимость (2.2.1) в точке *x* означала бы (по

первой части теоремы Абеля), что ряд сходится и в точке x'. Но это противоречит условию. Итак, вторая часть теоремы также доказана.

2.2.2 Из теоремы Абеля вытекает, что всякая точка сходимости x_0 степенного ряда ближе к началу координат, чем любая точка расходимости (если такая имеется). Следовательно, должно существовать некоторое "пограничное" расстояние *R*, такое что при $|x| < R$, т.е в интервале (-*R*, *R*), имеет место сходимость (абсолютная), а при $|x| > R$ (вне интервала) - расходимость ряда (2.2.1). Число *R* называется *радиусом сходимости* степенного ряда, а (–*R*, *R*) – его интервалом сходимости.

2.2.3 При всяком $0 < \rho < R$ ряд (2.2.1) будет сходится и равномерно на отрезке $[-\rho, \rho]$. Действительно, взяв точку x^*, такую, что $|x^*| = \rho$, имеем абсолютную сходимость в точке x^*, т.е. сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot \rho^n.$$

В то же время, для членов (2.2.2) имеем оценку

$$\left|a_n x^n\right| \leq |a_n| \cdot |x|^n < |a_n| \rho^n.$$

Согласно признаку Вейерштрасса, получаем равномерную сходимость при $|x| \leq \rho$. В частности (т.к. непрерывны все степенные функции $u_n(x) = x^n$), непрерывной в интервале сходимости будут и сумма ряда (2.2.1).

2.2.4 *Радиус сходимости R* можно найти по одной из формул

$$R = \frac{1}{D} \quad \text{или} \quad R = \frac{1}{K}, \tag{2.2.4}$$

если существует соответствующее "число Даламбера"

$$D = \lim_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \tag{2.2.5}$$

или "число Коши"

$$K = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}\,. \tag{2.2.6}$$

Формулы (2.2.5) – (2.2.6) остаются справедливыми, если $D = 0$ или $(K = 0)$ - тогда $R = \infty$, т.е. областью сходимости ряда является вся числовая ось. Если же $D = +\infty$ $(K = +\infty)$, то $R = 0$, т.е. "областью" сходимости является единственная точка $x_0 = 0$. Примеры такого рода см. ниже.

Докажем, (2.2.4) например, в случае (2.2.6). Согласно признаку Коши, ряд (2.2.2) сходится если

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n| \cdot |x|^n} < 1, \text{ т.е. } |x| \cdot K < 1, \tag{2.2.7}$$

откуда получаем при $|z| < \dfrac{1}{K}$ сходимость ряда (2.2.2), а значит и абсолютную сходимость ряда (2.2.1). В то же время при $|x| > \dfrac{1}{K}$ из доказательства признака Коши следует не только расходимость ряд из модулей (2.2.2), но и (см. пп. 1.4.1, 1.4.2) расходимость (2.2.1).

Итак, именно число $R = \dfrac{1}{K}$ оказалось радиусом сходимости согласно определению *R*.

Отметим также, что при $K = 0$ условие (2.2.7) выполнено при всех x (т.е. $R = \infty$), а при $K = \infty$ условие (2.4.6) не выполнено при любом $x \neq 0$; точка же $x_0 = 0$, как упоминалось, служит точкой сходимости любого степенного ряда ($R = 0$). Утверждение п. 2.2.4 полностью доказано.

2.2.5 Из результатов п.2.2.3 вытекает, что степенной ряд (2.2.1) мажорируем на всяком отрезке вида $[-\rho, \rho] \subset (-R, R)$, а значит, равномерно сходится на этом отрезке. Отсюда вытекает возможность почленного интегрирования ряда по всякому отрезку, расположенному внутри интервала сходимости (см. п.2.1.4).

Возможность же почленного дифференцирования будет обеспечена равномерной сходимостью ряда составленного из производных; см.

утверждение п. 2.1.4 . Достаточно поэтому установить мажорируемость ряда

$$(a_0)' + (a_1 x)' + (a_2 x^2)' + \ldots + (a_n x^n)' + \ldots,$$

т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}. \tag{2.2.8}$$

на любом отрезке $[-\rho, \rho] \subset (-R, R)$. Доказательство мажорируемости проведем в предположении, что существует предел, обозначенный через D в (2.2.5); следовательно $R = \frac{1}{D}$.

Определим радиус сходимости $\tilde{R}$ ряда (2.2.8). Соответствующее число Даламбера имеет вид

$$\tilde{D} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)|a_{n+1}|}{n|a_n|} =$$

$$= (\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}) \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1 \cdot D,$$

следовательно, $\tilde{R} = \frac{1}{D}$. Таким образом, $\tilde{R} = R$, и интервалы сходимости рядов (2.2.8), (2.2.1) совпадают. Окончательно, имеем мажорируемость ряда (2.2.8) на всяком отрезке $[-\rho, \rho] \subset (-R, R)$, а значит и возможность почленного дифференцирования исходного степенного ряда (2.2.1).

2.2.6 Если рассуждения п. 2.2.5 применить к ряду из производных (2.2.8), то получаем возможность и его почленного дифференцирования в интервале $(-R, R)$. Повторяя и далее указанные рассуждения, приходим к следующему важному выводу: *степенной ряд, обладающий суммой $S(x)$ в некотором интервале сходимости, можно почленно дифференцировать сколь угодно много раз в этом интервале; при этом сумма ряда из n -ых производных совпадает с $S^{(n)}(x)$.*

2.2.7 ***Примеры.***

1. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$$

Решение. Имеем функциональный ряд, который становится степенным после замены переменной $y = e^{-x}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y^n.$$

Получена сумма бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем y. Ряд сходится тогда и только тогда, когда $|y| < 1$. Значит, область сходимости определяется неравенством $e^{-x} < 1$, откуда $-x < 0$, так что $x > 0$. Окончательно, получили, что область сходимости ряда есть полупрямая $x > 0$.

2. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{nx^n}.$$

Решение. Если положить $X = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, то получим степенной ряд действительной переменной X

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n} X^n$$

с коэффициентами вида $a_n = \frac{5^n}{n}$. Число Даламбера находим в виде

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n5^{n+1}}{(n+1)5^n} = 5\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})} = 5,$$

откуда $R = \frac{1}{5}$, и интервал абсолютной сходимости ряда определяется соотношением

$$-\frac{1}{5} < X < \frac{1}{5};$$

вне этого интервала степенной ряд расходится. Исследуем концы интервала.

а) $X = \frac{1}{5}$. В этой точке значение общего члена ряда

$$f_n(X) = \frac{5^n}{n} X^n \text{ есть величина } f_n(\frac{1}{5}) = \frac{5^n}{n}(\frac{1}{5})^n = \frac{1}{n},$$

так что приходим к числовому ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

(гармонический ряд), который расходится.

б) $X = -\frac{1}{5}$. Имеем

$$f_n(-\frac{1}{5}) = \frac{5^n}{n} \frac{(-1)^n}{5^n} = \frac{(-1)^n}{n};$$

полученный знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

является условно сходящимся (п.1.7.1).

Итак, область сходимости степенного ряда определяется соотношением $-\frac{1}{5} \le X < \frac{1}{5}$. Поскольку $X = \frac{1}{x}$, то остается решить двойное неравенство $-\frac{1}{5} \le \frac{1}{x} < \frac{1}{5}$. Можно записать, что $\frac{1}{|x|} < \frac{1}{5}$ либо $\frac{1}{x} = -\frac{1}{5}$. В первом случае имеем $|x| > 5$, что равносильно совокупности двух неравенств: $x > 5$, $x < -5$, во втором – $x = -5$. Окончательно имеем область сходимости в виде

$$x \in (-\infty, -5] \bigcup (5, +\infty).$$

2.3 Разложения функций в степенные ряды

2.3.1 Одной из задач, рассмотренных выше, была *задача о представлении данной функции* действительного переменного $y = f(x)$

суммой соответствующего степенного ряда. Такой ряд имеет вид

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ...; \quad n = 0,1,... \qquad (2.3.1)$$

Как отмечалось выше, в интервале сходимости $(-R, R)$ записанный ряд можно почленно дифференцировать сколь угодно много раз. Поскольку $f(x)$ – его сумма, то она необходимо должна быть дифференцируема сколь угодно много раз. Докажем, что в этом случае разложение (2.3.1) принимает вид

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + ... \qquad (2.3.2)$$

Действительно,

а)полагая $x = 0$ в (2.3.1), получаем $a_0 = f(0)$;

б)почленно дифференцируя (2.3.1) и снова полагая $x = 0$, имеем $a_1 = f'(0)$;

в)в результате второго почленного диффренцирования (2.3.1) при $x = 0$ получаем $f''(0) = 2! a_2$, откуда $a_2 = \dfrac{f''(0)}{2!}$;

…г)на (n+1)-ом шаге ($n = 0,1,2,...$) приходим к равенству

$$a_n = \frac{f^n(0)}{n!}.$$

Учитывая вид полученных коэффициентов a_n, мы и получаем (2.3.2); говорят также, что функция $f(x)$ разложена в ряд по степеням x, или, коротко, в ряд Маклорена.

2.3.2 Поскольку в настоящем параграфе мы проводим лишь обзорное рассмотрение, то ограничимся формулировкой следующего достаточного условия разложимости в ряд Маклорена функций действительного переменного: *если для всех значений* $n = 1,2,...$ *существует постоянная* $C > 0$ *, такая что в некоторой окрестности точки* $x_0 = 0$ *выполняется неравенство*

$$| f(x) | + | f^n(x) | \leq C,$$

то функция $f(x)$ в этой окрестности есть сумма соответствующего ряда

Маклорена (2.3.2).

2.3.2 Нетрудно поверить, что это утверждение применимо к функциям $f(x)=e^x$, $f(x)=\sin x$, $f(x)=\cos x$ во всякой окрестности точки $x_0=0$. Если вычислить коэффициенты ряда Маклорена для каждой из них, то получим, что при всех значениях действительного аргумента имеют место разложения:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \qquad (2.3.3)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \qquad (2.3.4)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \qquad (2.3.5)$$

Остановимся на обосновании, например, соотношения (2.3.3). Имеем

$$f'(x) = f''(x) = \ldots = f^{(n)}(x) = \ldots = e^x,\ n = 1,2,\ldots,$$

а тогда

$$f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = \ldots = 1.$$

Подставляя полученные значения в (2.3.2), мы приходим к (2.3.3). Для доказательства сходимости ряда (2.3.3) при каждом x к сумме $f(x)=e^x$, заметим что в каждом интервале $(-R_0, R_0)$ имеет место соотношение

$$|f(x)| + |f^{(n)}(x)| \le C_0,\ n = 1,2,\ldots,$$

где постоянная $C_0 = e^{R_0}$. На основании сформулированного выше достаточного условия разложимости функции в ряд Маклорена тогда *во всяком* фиксированном интервале ряд (2.3.3) имеет своей суммой именно $f(x)=e^x$. Ввиду произвольности выбранного интервала разложение (2.3.3) имеет место при всех действительных x, что и утверждалось.

2.3.3 Имеют место также следующие разложения (при указанных значениях аргумента *x*):

1) «биномиальное» разложение (разложение произвольной степени двучлена)

$$(1+x)^{\alpha} = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots;\ \ x\in(-1;1)\ ; \qquad (2.3.6)$$

в частности (при α =–1),

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\ldots+(-1)^n x^n+\ldots;\ x\in(-1;1); \qquad (2.3.7)$$

2)разложение логарифмической функции

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^n\,\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots;\ x\in(-1;1]\,. \qquad (2.3.8)$$

2.3.4 Указанные разложения имеют весьма широкий спектр применений. С их помощью можно:

а)получать разложения других элементарных функций;

б)получать приближенные значения трансцендентных функций;

в)вычислять (записывать в форме ряда) «неберущиеся» интегралы и др.

Пример. Записать в виде суммы степенного ряда

$$Y(x)=\int_0^x e^{-x^2}dx\,.$$

Решение. Как известно из математического анализа, первообразные функции $y=e^{-x^2}$ (и, в частности, интеграл с переменным верхним пределом $Y(x)$) не выражаются через элементарные функции. Поэтому указанная постановка задачи – получить выражение первообразной хотя бы в виде суммы степенного ряда – является вполне уместной. Начнем с разложения (2.3.3), которое имеет место *при всех значениях аргумента* x, и в частности, когда в роли аргумента выступает $(-x^2)$. Имеем тогда

$$e^{-x^2}=1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\ldots+\frac{(-x^2)^n}{n!}+\ldots,$$

или

$$e^{-x^2}=1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+\ldots,\qquad x\in(-\infty,+\infty).$$

В результате почленного интегрирования (возможного по любому промежутку, и, в частности, от 0 до x) получаем

$$\int_0^x e^{-x^2}dx=\int_0^x dx-\int_0^x x^2dx+\int_0^x\frac{x^4}{2!}dx-\ldots+(-1)^n\int_0^x\frac{x^{2n}}{n!}dx+\ldots$$

или

$$\int_0^x e^{-x^2}dx=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5\cdot 2!}x^5-\ldots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)n!}x^{2n+1}+\ldots,\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

Итак, данная функция $Y(x)$ представлена в виде суммы степенного ряда при всех действительных значениях x.

3.МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

3.1 Вычисление суммы ряда

Задача о точном вычислении суммы сходящегося ряда, вообще говоря, относится к алгоритмически неразрешимым, однако существует некоторые приемы, позволяющие в отдельных случаях сумму вычислить.

3.1.1 ***Взаимное уничтожение членов в частичной сумме.***

Решение примера в п. 1.1.2 было основано на идее взаимного уничтожения «соседних» членов в частичной сумме. С помощью этой же идеи решаем и следующий

Пример 1. Вычислить сумму ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \ln(1-\frac{1}{n^2})$.

Решение. Преобразуем общий член ряда:

$$\ln(1-\frac{1}{n^2}) = \ln(\frac{n^2-1}{n^2}) =$$

$$= \ln(\frac{n-1}{n})(\frac{n+1}{n}) = (\ln(n-1) - \ln n) + (\ln(n+1) - \ln n).$$

Теперь имеем частичную сумму m-го порядка в виде

$$S_m = (\ln 1 - \ln 2 + \ln 2 - \ln 3 + ... + \ln(m-2) - \ln(m-1) + \ln(m-1) - \ln m) +$$
$$+ (\ln 3 - \ln 2 + \ln 4 - \ln 3 + ... + \ln m - \ln(m-1) + \ln(m+1) - \ln m) =$$
$$= (\ln 1 - \ln m) + (-\ln 2 + \ln(m+1)) = \ln\frac{m+1}{2m}.$$

Следовательно,

$$S = \lim_{m\to\infty} \ln\frac{m+1}{2m} = \ln\frac{1}{2},$$

т.е. ряд сходится и его сумма равна $\ln\frac{1}{2}$.

Подобным образом решаем и следующий

Пример 2. Вычислить сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}.$$

Решение. Общий член ряда $a_n = \ln\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$ мы попытаемся, как и в предыдущем примере, записать в виде разности членов, аргументы которых отличаются на единицу. Но первая же мысль преобразовать a_n сразу к разности логарифмов – неэффективна, т.к. оба эти логарифма не будут стремиться к нулю (нарушается необходимый признак сходимости). Следовательно, нужны более тонкие преобразования:

$$a_n = \ln\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \ln\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+1}{n+2} = \ln\frac{n+1}{n}:\frac{n+2}{n+1} = \ln\frac{n+1}{n} - \ln\frac{n+2}{n+1} =$$

$$= \ln(1+\frac{1}{n}) - \ln(1+\frac{1}{n+1}).$$

Тогда m-ая частичная сумма ряда

$$S_m = \ln(1+\frac{1}{1}) - \ln(1+\frac{1}{2}) + \ln(1+\frac{1}{2}) - \ln(1+\frac{1}{3}).+\ldots+$$

$$+\ln(1+\frac{1}{m-1}) - \ln(1+\frac{1}{m}) + \ln(1+\frac{1}{m}) - \ln(1+\frac{1}{m+1}) = \ln 2 - \ln\ (1+\frac{1}{m+1}),$$

и, следовательно,

$$\lim_{m\to\infty} S_m = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2,$$

так что сумма ряда равна $\ln 2$.

Пример 3. Вычислить сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2n(n+1)}\cos\frac{\pi(2n+1)}{2n(n+1)}.$$

Решение. К нужному (см. вышеприведенные примеры) виду общий член может быть, по-видимому, приведен путем преобразования произведения тригонометрических функций в разность:

$$\sin\frac{\pi}{2n(n+1)}\cos\frac{\pi(2n+1)}{2n(n+1)}=$$

$$=\frac{1}{2}(\sin\frac{\pi(2n+2)}{2n(n+1)}-\sin\frac{\pi\cdot 2n}{2n(n+1)})=\frac{1}{2}(\sin\frac{\pi}{n}-\sin\frac{\pi}{n+1}).$$

Теперь вычисляем m-ую частичную сумму:

$$S_m=\frac{1}{2}(\sin\frac{\pi}{1}-\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{3}+...+\sin\frac{\pi}{m-1}-\sin\frac{\pi}{m}+\sin\frac{\pi}{m}-\sin\frac{\pi}{m+1})=$$

$$=\frac{1}{2}(\sin\pi-\sin\frac{\pi}{m+1})=-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{m+1}.$$

Значит,

$$\lim_{m\to\infty}S_m=\lim_{m\to\infty}(-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{m+1})=0,$$

т.е. данный ряд сходится и его сумма равна нулю.

3.1.2 ***Прием разложения правильной рациональной дроби на простейшие***:

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)}=\frac{1}{a-b}(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}). \tag{3.1.1}$$

Этот прием (без использования общей формулы (3.1.1)) был уже продемонстрирован при решении примера п. 1.1.2.

Приведем также

Пример1. Вычислить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$.

Решение. В результате разложения дроби, представляющей общий член, на простейшие (см. (3.1.1)), имеем

$$\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}).$$

Теперь вычисляем частичную сумму произвольного (m-го) порядка, выписывая последовательно слагаемые при $n=1,2,...,m-1,m$:

$$S_m=\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2m-3}-\frac{1}{2m-1}+\frac{1}{2m-1}-\frac{1}{2m+1})=$$
$$=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2m+1}).$$

Следовательно,

$$S=\lim_{m\to\infty}S_m=\frac{1}{2}(1-0)=\frac{1}{2},$$

т.е. ряд оказался сходящимся и его сумма равна $\frac{1}{2}$.

Пример 2. Вычислить сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+5n+6}$.

Решение. Разложив на множители квадратный трехчлен в знаменателе дроби и применив соотношение (3.1.1), получим

$$\frac{1}{n^2+5n+6}=\frac{1}{(n+2)(n+3)}=\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3},$$

после чего сумма членов с нулевого по m -ый (обратим внимание, что здесь нумерация членов начинается с нуля!) принимает вид

$$S_m=(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\ldots(\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2})+(\frac{1}{m+2}-\frac{1}{m+3})=\frac{1}{2}-\frac{1}{m+3}.$$

Теперь убеждаемся (на основании определения сходимости), что ряд сходится и его сумма

$$S=\lim_{m\to\infty}S_m=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}.$$

3.1.3 ***Прием использования суммы геометрической прогрессии.*** Этот прием применяется, если в общем члене ряда может быть выделен «показательный» множитель q^{n-1}, $n=1,2,...$

Пример. Вычислить сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}+2^{n+1}}{3^{n+1}}$$

Решение. Преобразуем общий член ряда к виду

$$a_n = \frac{2^{n-1}(1+2^2)}{3^{n-1}3^2} = \frac{5}{9}(\frac{2}{3})^{n-1}$$

Имеем сумму геометрической прогрессии, в которой

$$a_1 = \frac{5}{9}, \quad q = \frac{2}{3},$$

так что ее знаменатель $q \in (-1,1)$; следовательно,

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{5}{9} : \frac{2}{3} = \frac{5}{6}.$$

3.1.4 ***Прием почленного дифференцирования степенного ряда.*** Если найдена сумма степенного ряда, то ее производная есть сумма «продифференцированного» ряда (в интервале сходимости исходного ряда); см. п. 2.1.4.

Пример 1 . Найти сумму $S(x)$ ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n \text{ при } \quad -1 < x < 1.$$

Решение. Заметим, что общий член ряда может быть представлен в виде $u_n = nx^{n-1}x = x(x^n)'$, так что теперь достаточно найти при каждом $-1 < x < 1$ значение

$$x\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'.$$

Имеем в последнем случае ряд, составленный из производных членов степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \text{ , сумма которого } \; P(x) = \frac{x}{1-x}$$

(сумма геометрической прогрессии с первым членом $a_1 = x$ и знаменателем $q = x, \quad -1 < x < 1$). Ввиду возможности почленного дифференцирования степенного ряда в интервале его сходимости получаем теперь искомую сумму в виде

$$S(x) = x(\frac{x}{1-x})' = x(\frac{1}{1-x} - 1)' = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Пример 2. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(-1)^{n-1}5^n}{8^{n-1}}.$$

Решение. Выделим в общем члене ряда слагаемые, имеющие вид q^n (члены геометрической прогрессии) и nq^n (см. предыдущий пример):

$$a_n = \frac{(n+1)(-1)^{n-1}5^n}{8^{n-1}} = -8(n(-\frac{5}{8})^n + (-\frac{5}{8})^n).$$

Теперь достаточно вычислить суммы рядов

$$\sum_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n(-\frac{5}{8})^n \quad \text{и} \quad \sum_2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-\frac{5}{8})^n.$$

В первом случае имеем при $x = -\frac{5}{8}$ сумму ряда, рассмотренного в примере 1:

$$S_1 = \frac{x}{(1-x)^2} = -\frac{5/8}{(1+5/8)^2} = -\frac{40}{169}.$$

Во втором случае находим сумму геометрической прогрессии:

$$S_2 = -\frac{5/8}{1+5/8} = -\frac{5}{13}.$$

Теперь

$$S = -8(S_1 + S_2) = -8(-\frac{40}{169} - \frac{5}{13}) = \frac{840}{169}.$$

3.2 Задачи на исследование сходимости знакоположительных рядов

3.2.1 ***Общие рекомендации***. При исследовании конкретного знакоположительного ряда ряда следует удачно выбрать соответствующий признак. Дело в том, что каждый из достаточных признаков имеет свою (ограниченную) область применимости. Так, например, признаки Даламбера и Коши не применимы, когда соответствующее значение вычисляемого предела равно единице.

В общем случае можно пользоваться следующими рекомендациями:

1) Если члены ряда быстро убывают (растут), то бывает эффективен признак Даламбера. Так обстоит дело в случаях, когда a_n содержит в своем аналитическом выражении показательные множители (то есть множители вида $c^n,\ c = const > 0)$) или "факториальные" множители (например, $n! = 1 \cdot 2 \cdot ...(n-1)n$).

2) Если общий член ряда a_n записан в виде выражения в степени, кратной n (так что легко извлекается корень n-й степени), то эффективен признак Коши.

3) Если выражение для a_n содержит арифметические действия над степенными функциями, то при больших значениях n члены ряда ведут себя как $\dfrac{1}{n^p}$ (см. пример 2 п.1.3.3) и, следовательно, в качестве эталона для сравнения выбирают обобщенный гармонический ряд с соответствующим значением p . Обычно бывает эффективен признак сравнения в предельной форме.

4) Если для функции $f\ (x)$, полученной при замене n на x в выражении a_n, достаточно легко вычисляется первообразная $F(x)$, то бывает эффективен интегральный признак.

Указанные рекомендации не охватывают, естественно, всех возможных случаев и могут служить лишь в качестве наводящих соображений.

Использование признаков предполагает, что читатель уверенно владеет техникой вычисления пределов и, в частности, приемом деления числителя и знаменателя дроби на старшую степень аргумента при стремлении аргумента к бесконечности.

3.2.2 ***Применение признаков Коши и Даламбера.***

Пример 1. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(\frac{3n}{n+3})^{n/2}.$$

Решение. Согласно рекомендациям п. 3.2.1 здесь может быть эффективен признак Коши. Имеем для

$$a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(\frac{3n}{n+3})^{n/2}$$

число Коши

$$K=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(\frac{3n}{n+3})^{1/2}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(\frac{3}{1+\frac{1}{n}})^{1/2}=\frac{\sqrt{3}}{2}<1,$$

и, поскольку $K<1$, то ряд сходится.

Пример 2. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+3+5+...+(2n-1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-1)}.$$

Решение. Имеем общий член ряда в виде

$$a_n=\frac{1+3+5+...+(2n-1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-1)}.$$

Знаменатель дроби (выражение «факториального типа») – произведение подряд записанных первых n натуральных нечетных множителей. Следовательно, может быть эффективным признак Даламбера. Но для начала упростим числитель дроби – сумму n членов арифметической прогрессии, в которой первый член равен 1, а разность $d=2$:

$$1+3+5+...+(2n-1)=\frac{1+(2n-1)}{2}n=n^2.$$

Имеем теперь

$$a_n=\frac{n^2}{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-1)},\quad a_{n+1}=\frac{(n+1)^2}{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)},$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^2}{n^2}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}=(1+\frac{1}{n})^2\cdot\frac{1}{2n+1},$$

и

$$D=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^2\cdot\frac{1}{2n+1}=0,\ \text{т.е. } D<1,$$

а значит, ряд сходится.

Пример 3. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{5^n+5}$$

Решение. Вид общего члена

$$a_n=\frac{(n-1)!}{5^n+5}$$

данного знакоположительного ряда свидетельствует о целесообразности признака Даламбера. Имеем

$$a_{n+1}=\frac{n!}{5^{n+1}+5} \qquad \text{и} \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n!}{(n-1)!}\cdot\frac{5^n+5}{5^{n+1}+5}=n\cdot\frac{1+\frac{5}{5^n}}{5\ +\frac{5}{5^n}}$$

так что

$$D=(\lim_{n\to\infty}n)\cdot(\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{5}{5^n}}{5\ +\frac{5}{5^n}})=\infty.$$

Поскольку $D>1$, то данный ряд расходится.

3.2.3 ***Применение признаков сравнения и достаточного признака расходимости.***

Пример 1. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[4]{n}}{n+\sqrt{n^2+1}}.$$

Решение. Общий член

$$a_n=\frac{\sqrt[4]{n}}{n+\sqrt{n^2+1}}$$

данного знакоположительного ряда содержит степенные выражения, и, следовательно, возможно сравнение с обобщенным гармоническим рядом. Для выбора эталона при больших значениях аргумента n достаточно ограничиться рассмотрением лишь старших его степеней, т.е. заменить a_n на

$$\frac{\sqrt[4]{n}}{n+\sqrt{n^2}}=\frac{1}{2n^{3/4}}.$$

Теперь в качестве эталонного выбираем ряд с общим членом $b_n=\dfrac{1}{n^{3/4}}$; при этом ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/4}}$$

оказывается расходящимся, поскольку показатель степени $p=\dfrac{3}{4}$ не больше единицы (см. п. 1.3.3). Согласно признаку сравнения в предельной форме достаточно убедиться, что существует и отличен от нуля следующий предел:

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n}\cdot\sqrt[4]{n^3}}{n+\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+\sqrt{n^2+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1.$$

Следовательно, данный ряд ведет себя (в смысле сходимости) как эталонный, т.е. расходится.

Пример 2. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n-1}{100n^2-1}.$$

Решение. Общий член ряда

$$a_n=\frac{n^2+n-1}{100n^2-1}$$

есть положительная рациональная функция аргумента n, так что применима идея сравнения с обобщенным гармоническим рядом. Ограничиваясь рассмотрением старших степеней n, получаем $a_n \approx \frac{n^2}{100n^2}=\frac{1}{100}$. Однако такой результат наводит на мысль, что общий член ряда не стремится к нулю при $n\to\infty$. Действительно,

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-1}{100n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{100-\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{100}\neq 0,$$

и по достаточному признаку расходимости (п. 1.2.1) данный ряд расходится.

Пример 3. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{2n^2+1}{2n^2-1}.$$

Решение. Прежде всего убедимся, что данный ряд - знакоположительный. Действительно, при всех n=1,2,… имеем

$$\frac{2n^2+1}{2n^2-1}>1 \text{ и, следовательно, } \ln\frac{2n^2+1}{2n^2-1}>0.$$

Далее, эталон для сравнения может быть выбран благодаря тому известному из математического анализа факту, что бесконечно малые $\ln(1+\alpha)$ и α являются эквивалентными (их отношение стремится к единице при $\alpha\to 0$). Следовательно, общий член ряда следует привести к соответствующему виду:

$$\ln\frac{2n^2+1}{2n^2-1}=\ln(1+(\frac{2n^2+1}{2n^2-1}-1))=\ln(1+\frac{2}{2n^2-1}).$$

Теперь видим, что при $n \to \infty$ общий член ряда эквивалентен бесконечно малой $\alpha_n = \dfrac{2}{2n^2 - 1}$. Поскольку знаменатель последней дроби есть многочлен второй степени, то в качестве эталона для сравнения выбираем сходящийся (см. п. 1.3.3) ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

При вычислении следующего предела применяем известную теорему о возможности замены под знаком предела бесконечно малой на эквивалентную:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{2}{2n^2 - 1}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{2n^2 - 1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{2n^2 - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{2 - \frac{1}{n^2}} = 1.$$

Поскольку $L \neq 0$, то данный ряд, на основании признака сравнения (в предельной форме), как и эталонный ряд, сходится.

3.2.4 ***Применение интегрального признака.*** Вычисление несобственного интеграла – процесс трудоемкий и требующий значительной подготовки, поэтому, когда имеется альтернатива, его применения следует избегать. Возможность использования интегрального признака диктуется следующим соображением: должен быть виден способ интегрирования общего члена ряда. Дальнейшие действия предписаны условиями п.1.5.1.

Пример 1. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \ln n}{n}.$$

Решение. Ясно, что все члены ряда – положительны. Функция $a(x) = \dfrac{1 + \ln x}{x}$ может быть проинтегрирована с помощью приема введения под знак дифференциала, поскольку $d(1+\ln x)=\frac{1}{x}dx.$ Следовательно, применяем интегральный признак (альтернативных путей здесь не просматривается). Введенная в рассмотрение функция $a(x)$ при $x\in[1,+\infty)$ является, очевидно, непрерывной и убывает (логарифмическая функция растет медленнее ее аргумента, что легко иллюстрируется сравнением графиков функций $y=1+\ln x$ и $y=x$, $x\geq 1$). Теперь поведение ряда определяется следующим несобственным интегралом:

$$\int_1^\infty \frac{1+\ln x}{x}dx=\int_1^\infty (1+\ln x)\,d(1+\ln x)=\lim_{T\to\infty}\int_1^T (1+\ln x)\,d(1+\ln x)=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{(1+\ln x)^2}{2}\Big|_1^T=\lim_{T\to\infty}\left(\frac{(1+\ln T)^2}{2}-\frac{1}{2}\right)=\infty.$$

Итак, несобственный интеграл оказался расходящимся; следовательно, и данный ряд расходится.

Пример 2. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{n^2-n-2}{n+2}e^{1-n^2}.$$

Решение. Члены ряда оказываются положительными при $n^2-n-2>0$, т.е. при $n=3,4,...$ Первые же два члена не влияют на поведение ряда (см. п.1.1.4). Попытаемся применить признак сравнения (по величине), оценив рациональную функцию (от аргумента n) более простым выражением (определяемым старшими степенями n):

$$\frac{n^2-n-2}{n+2}e^{1-n^2}\leq\frac{n^2}{n}e^{1-n^2}=ne^{1-n^2},\ n=3,4,...$$

Итак, члены знакоположительного ряда

$$\sum_{n=3}^\infty \frac{n^2-n-2}{n+2}e^{1-n^2} \tag{3.2.1}$$

не превосходят соответствующих членов ряда

$$\sum_{n=3}^{\infty} n e^{1-n^2}. \qquad (3.2.2)$$

К последнему применим интегральный признак сходимости (читателю рекомендуется в качестве альтернативного решения использовать признак Даламбера). Функция $a(x) = xe^{1-x^2}$ непрерывна при $x \geq 3$ и является убывающей, поскольку ее производная

$$a'(x) = e^{1-x^2} - 2x^2 e^{1-x^2} = e^{1-x^2}(1-2x^2) < 0.$$

Согласно замечанию к п.1.5.1 достаточно теперь исследовать следующий несобственный интеграл:

$$\int_3^{\infty} xe^{1-x^2} dx = \lim_{T\to\infty} \int_3^{T} e^{1-x^2} (-\frac{1}{2}) d(1-x^2) = \lim_{T\to\infty} (-\frac{1}{2}) e^{1-x^2} \Big|_3^T =$$

$$= \lim_{T\to\infty} ((-\frac{1}{2}) e^{1-T^2} + \frac{1}{2} e^{-8}) = 0 + \frac{1}{2} e^{-8} = \frac{1}{2e^8}.$$

Согласно интегральному признаку Коши ряд (3.2.2) сходится. Признак сравнения тогда позволяет утверждать также сходимость ряда (3.2.1). Значит, сходится и данный ряд.

3.3 Задачи на исследование сходимости знакопеременных рядов

3.3.1 ***Общие рекомендации.*** Напомним, что для знакопеременных рядов существует два вида сходимости: «более сильный» - абсолютная и «более слабый» - условная. Исследование знакопеременных рядов удобно начинать с рассмотрения ряда из модулей (знакоположительный ряд, к которому применимы известные в этом случае признаки). Если он оказывается сходящимся, то решение на этом заканчивается: данный ряд сходится абсолютно (см. п. 1.7.1). Если же ряд из модулей расходится, то обращаемся к исследованию сходимости данного знакопеременного ряда. Так, например, в случае знакочередующегося ряда можно использовать признак сходимости

Лейбница. Напомним также, что если общий член ряда (модуль общего члена ряда) не стремится к нулю, то сразу же делаем заключение, что ряд расходится (см. п.1.2.1).

3.3.2 ***Примеры.***

Пример 1. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{1+n+n^2\sqrt{n}}}$$

Решение. Ясно, что значения $\sin n$ – знакопеременны. Члены ряда из модулей $a_n=\dfrac{|\sin n|}{\sqrt{1+n+n^2\sqrt{n}}}$ содержат в знаменателе степенные выражения, что наводит на мысль применить к нему один из признаков сравнения с обобщенным гармоническим рядом. Очевидно, что a_n не превосходят $b_n=\dfrac{1}{\sqrt{n^2\sqrt{n}}}=\dfrac{1}{n^{5/4}}$. В свою очередь ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{5/4}}$$

является сходящимся, поскольку (см. п.1.5.2) показатель степени (в знаменателе) $p=\dfrac{5}{4}>1$. Теперь на основании признака сходимости по величине (п.1.3.2) можно утверждать, что ряд из модулей сходится. Значит, данный ряд сходится абсолютно.

Пример 2. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\cos\frac{\pi n}{4}.$$

Решение. Имеем знакопеременный ряд. Значения $u_n=\cos\dfrac{\pi n}{4}$ при n, кратных четырем, совпадают (с точностью до знака) с единицей; при четных n, не кратных четырем – равны нулю; при нечетных n – равны (с точностью до знака) числу $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, из последовательности значений $|u_n|$ можно извлечь три подпоследовательности, имеющие (при $n \to \infty$) различные пределы. Тогда не существует $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n|$, а значит (по достаточному признаку расходимости, п. 1.2.1), данный ряд расходится.

Пример 3. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln n}.$$

Решение. Имеем знакочередующийся ряд, в котором модуль общего члена равен $a_n = \frac{1}{\ln n}$. Вспоминая, что логарифмическая функция имеет медленный рост, сразу же исключаем из рассмотрения (для ряда из модулей) признаки Коши и Даламбера. Поскольку $\ln n < n,\ n = 2,3,...$ (это неравенство становится очевидным, если изобразить соответствующие графики, см. также рассуждения при обосновании (1.1.3)), то $a_n > \frac{1}{n}$, и, следовательно, члены ряда из модулей оказываются большими соответствующих членов расходящегося гармонического ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Значит, по признаку сравнения (теорема 1 п. 1.3.2), ряд из модулей расходится, а тогда данный ряд не обладает абсолютной сходимостью. Исследуем его на предмет условной сходимости, применив признак Лейбница (п. 1.6.1). Последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет обоим условиям соответствующей теоремы: она – убывающая и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Следовательно, данный ряд сходится, и сходимость его – условная.

Пример 4 Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos\frac{\pi}{n}}{n} .$$

Решение. Члены ряда из модулей

$$a_n = \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n}$$

при $n = 3,4,...$ положительны; первые же два члена не влияют на сходимость ряда из модулей. При этом

$$a_n \geq \frac{\cos\frac{\pi}{3}}{n} \qquad \text{или} \quad a_n \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} .$$

Ряд

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}$$

является расходящимся (остаток гармонического ряда). Следовательно, по первой теореме сравнения будет расходиться и ряд из модулей

$$\sum_{n=3}^{\infty} a_n .$$

Тогда данный ряд не обладает абсолютной сходимостью, и остается рассмотреть вопрос об условной сходимости знакочередующегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n .$$

При этом выполнены оба условия признака Лейбница

а) $a_n = \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n}$ убывают с ростом n. Убедиться в этом можно, если представить a_n в виде $a_n = \frac{1}{n}\cos\frac{\pi}{n}$, рассмотреть функцию $f(x) = \frac{1}{x}\cos\frac{\pi}{x}$ и убедиться, что ее производная

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\cos\frac{\pi}{x} + \frac{1}{x} \cdot \frac{\pi}{x^2}\sin\frac{\pi}{x} = -\frac{1}{x^2}(\cos\frac{\pi}{x} - \frac{\pi}{x}\sin\frac{\pi}{x})$$

отрицательна при указанных x: неравенство $f'(x) \le 0$ равносильно очевидному $ctg\frac{\pi}{x} \ge \frac{\pi}{x}, \quad x \ge 4$ (читателю рекомендуется изобразить графики функций $y = ctg\,t$ и $y = t$ при $t \in (0, \frac{\pi}{4}])$;

$$\text{б)} \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n} = 0.$$

Следовательно, данный ряд сходится (условно).

3.4 Нахождение области сходимости степенных рядов

3.4.1 ***Общие рекомендации.*** Поведение функционального ряда, как мы знаем, в различных точках (при различных значениях аргумента) может быть различным. Благодаря формулам для радиуса сходимости (2.2.4) мы можем определять области сходимости как непосредственно степенного ряда, так и ряда по степеням некоторой функции

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(\phi(x))^n;$$

в последнем случае следует произвести замену переменной $t = \phi(x)$. В частности, ряд по степеням разности $x - a$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-a)^n \qquad (3.4.1)$$

может быть исследован с помощью замены переменной $t = x - a$. Получаемая область абсолютной сходимости определяется неравенством $|t| \le R \ \ (0 < R < \infty)$, т.е. $-R < x - a < R$, или

$$a - R < x < a + R. \qquad (3.4.2)$$

Вне полученного промежутка степенной ряд (3.4.1) расходится; его поведение в точках $x = a - R$ и $x = a + R$ подлежит дополнительному исследованию.

В случае $R=0$ область сходимости вырождается в единственную точку $x=a$. В случае же $R=\infty$ имеем областью сходимости ряда (3.4.1) всю числовую ось.

3.4.2 ***Примеры***.

Пример 1. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!(x+100)^{n-1}.$$

Решение. Имеем ряд по степеням $x-(-100)$; ср. (3.4.1). Определим радиус сходимости по одной из формул (2.2.4). Для коэффициентов ряда $a_n = n!$ легко вычисляется число Даламбера

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty, \text{ так что } R=0.$$

В этом случае единственной точкой сходимости ряда является $x=-100$.

Пример 2. Найти интервал сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{3^n(n+1)^2}.$$

Исследовать сходимость на концах интервала.

Решение. а) Имеем ряд по степеням $x-2$ с коэффициентами $a_n=\dfrac{1}{3^n(n+1)^2}$. Здесь легко найти число Даламбера

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^{n+1}(n+2)^2}:\frac{1}{3^n(n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{3^{n+1}}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right)^2=\frac{1}{3}.$$

Следовательно, $R=\dfrac{1}{D}=3$. Интервал абсолютной сходимости определяется неравенством (см. (3.4.2)) $2-3<x<2+3$ или $-1<x<5$; при $x<-1$ или $x>5$ ряд расходится.

б) Исследуем концевые точки интервалы: $x=-1$ и $x=5$. При $x=5$ общий член данного степенного ряда имеет вид

$$u_n = \frac{1}{3^n (n+1)^2} 3^n = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Полученный числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$$

есть случай обобщенного гармонического ряда (1.5.3), сходящегося при $p = 2 > 1$. Таким образом, имеем сходимость при $x=5$; для полученного знакоположительного ряда ее можно считать абсолютной (см. п. 1.7.1) . При $x=-1$ получаем

$$u_n = \frac{1}{3^n (n+1)^2} (-3)^n = \frac{1}{3^n (n+1)^2} (-1)^n \cdot 3^n = (-1)^n \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Соответствующий ряд из модулей имеет общий член

$$|u_n| = \left|(-1)^n\right| \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{(n+1)^2},$$

а ряд с таким общим членом исследован выше: он – сходящийся. Итак, при $x=-1$ имеем абсолютную сходимость.

Окончательно, областью абсолютной сходимости данного ряда служит отрезок [-3, 3].

Пример 3. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n^2} x^n.$$

Решение. Коэффициенты степенного ряда $a_n = 2^{-n^2}$ – положительны. Здесь легко найти число Коши $K = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{-n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} 2^{-n} = 0$, откуда радиус сходимости $R=\dfrac{1}{K}=\infty$. В этом случае областью сходимости степенного ряда служит вся числовая ось: $(-\infty,\ \infty)$.

3.5 Задачи представления функций степенными рядами

3.5.1 ***Общие рекомендации.*** Разложения Маклорена многих элементарных функций могут быть получены из указанных в пп. 2.3.2, 2.3.3, если воспользоваться свойствами сходящихся рядов (одновременное умножение всех членов ряда и его суммы на число; одновременное сложение суммы ряда и любого из его членов с некоторым числом; почленное сложение рядов и др.). Кроме того, в интервале сходимости можно почленно интегрировать и дифференцировать степенные ряды. В частности, возможно почленное интегрирование стандартных (или полученных из них) разложений по всему промежутку [a,b], целиком содержащемуся в соответствующем интервале значений x.

3.5.2 ***Примеры.***

Пример 1. Разложить функцию $y=\dfrac{x}{2}-\ln(1-\dfrac{x}{2})$ в ряд Маклорена.

Решение. За основу, очевидно, следует взять разложение (2.3.8). Заменим в нем x на $-\dfrac{x}{2}$, но при этом мы должны потребовать, чтобы аргумент содержался в интервале (–1, 1], то есть чтобы

$$-1<-\frac{x}{2}\le 1. \qquad (3.5.1)$$

Получаем

$$\ln(1-\frac{x}{2}) = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(-\frac{x}{2}\right)^3 - \ldots + \frac{(-1)^n}{n+1}\left(-\frac{x}{2}\right)^{n+1} + \ldots \ .$$

Далее следует упростить общий член:

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{2^{n+1}} = (-1)^{2n+1}\frac{x^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} = -\frac{x^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} \ .$$

Следовательно,

$$\ln(1-\frac{x}{2}) = -\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2\cdot 2^2} - \frac{x^3}{3\cdot 2^3} - \ldots - \frac{x^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} + \ldots \ .$$

Чтобы получить разложение функции $y = \frac{x}{2} - \ln\left(1-\frac{x}{2}\right)$, последовательно рассмотрим $-\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)$ и $y = -\ln\left(1-\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2}$. Умножим обе части последнего разложения на (–1):

$$-\ln(1-\frac{x}{2}) = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2\cdot 2^2} + \frac{x^3}{3\cdot 2^3} + \ldots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} + \ldots \ .$$

Осталось прибавить к обеим частям выражение $\frac{x}{2}$ и заметить, что в правой части сумма первых двух слагаемых есть $\frac{x}{2} + \frac{x}{2} = x$, так что

$$\frac{x}{2} - \ln(1-\frac{x}{2}) = x + \frac{x^2}{2\cdot 2^2} + \frac{x^3}{3\cdot 2^3} + \ldots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} + \ldots \ . \qquad (3.5.2)$$

Согласно условию (3.5.1) это соотношение справедливо при $-2 \le x < 2$.

Итак, ответом к задаче служит разложение (3.5.2), справедливое при всех $x \in [-2, 2)$.

Пример 2. Разложить функцию $y = \operatorname{sh} 2x$; в ряд Маклорена.

Замечание. Напомним, что гиперболические синус и косинус определяются, соответственно, в виде

$$\operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \ \operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}.$$

Решение. В нашем случае следует разложить в степенной ряд функцию

$$y=\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}.$$

Используя разложение (2.3.3), имеющее место при всех $x\in(-\infty,\infty)$, и заменяя в нем последовательно аргумент x на $2x$ и на $(-2x)$, получаем:

$$e^{2x}=1+\frac{2x}{1!}+\frac{2^2x^2}{2!}+\frac{2^3x^2}{3!}+\ldots+\frac{2^nx^n}{n!}+\ldots$$

и

$$e^{-2x}=1-\frac{2x}{1!}+\frac{2^2x^2}{2!}-\frac{2^3x^2}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{2^nx^n}{n!}+\ldots\ .$$

Осталось почленно вычесть эти разложения и затем умножить обе части получаемого соотношения на $\frac{1}{2}$. Замечая при этом, что $1-(-1)^n$ равно 2 для нечетных n ($n=2m+1,\ m=0,1,\ldots$) и равно 0 для четных n ($n=2m,\ m=0,1,\ldots$), имеем общий член ряда в виде

$$u_n=\frac{2^nx^n}{n!}-(-1)^n\frac{2^nx^n}{n!}=\frac{2^nx^n}{n!}\left(1-(-1)^n\right)=\begin{cases}\dfrac{2^{2m+1}x^{2m+1}}{(2m+1)!}\cdot 2, & n=2m+1,\\ 0, & n=2m.\end{cases}$$

Исключая из записи ряда нулевые члены, получаем окончательно

$$\text{sh}2x=\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}=\frac{1}{2}\left(2\frac{2x}{1!}+2\frac{2^3x^3}{3!}+\ldots+2\frac{2^{2m+1}x^{2m+1}}{(2m+1)!}+\ldots\right)$$

или

$$\text{sh}2x=\frac{2x}{1!}+\frac{2^3x^3}{3!}+\ldots+\frac{2^{2m+1}x^{2m+1}}{(2m+1)!}+\ldots,\ x\in(-\infty,\infty).$$

Пример 3. Разложить функцию $y=2\cos^2\frac{x}{4}-\frac{3}{2}$ в ряд Маклорена.

Решение. Понятно, что за основу надо взять стандартные разложения тригонометрических функций п. 2.3. Однако предварительно понизим степень косинуса:

$$\cos^2\frac{x}{4}=\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{x}{2}\right).$$

Следовательно,

$$y=2\cos^2\frac{x}{4}-\frac{3}{2}=\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{2}.$$

Если теперь в разложении (2.3.5), которое справедливо при всех $x\in(-\infty,\infty)$, заменить аргумент на $\frac{x}{2}$ и из обеих частей получаемого соотношения вычесть $\frac{1}{2}$, то будем иметь:

$$2\cos^2\frac{x}{4}-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2^2 2!}+\frac{x^4}{2^4 4!}-\frac{x^6}{2^6 6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{2^n(2n)!}+\ldots;\ x\in(-\infty;\infty).$$

Это и есть искомое разложение.

Пример 4. Разложить функцию $y=\dfrac{x^2}{9+x}$ в ряд Маклорена.

Решение. Поскольку $y=x^2(9+x)^{-1}$, то попытаемся воспользоваться частным случаем биномиального разложения (2.3.7). Для этого основание степени должно быть приведено к виду $(1 + y)$. Это удается сделать, если вынести за скобки множитель 9:

$$y=\frac{x^2}{9}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{9}}.$$

Теперь следует:

а) использовать (2.3.7) заменив в нем аргумент на $\frac{x}{9}$, так что $-1<\frac{x}{9}<1$ или $-9<x<9$.

б) умножить обе части получаемого разложения на $\frac{x^2}{9}$.

Итак,

$$\frac{1}{1+\frac{x}{9}}=1-\frac{x}{9}+(\frac{x}{9})^2-...+(-1)^n(\frac{x}{9})^n+...$$

После умножения на $\frac{x^2}{9}$ имеем общий член ряда в виде:

$$u_n=(-1)^n\frac{x^{n+2}}{9^{n+1}}.$$

Следовательно,

$$y=\frac{x^2}{9}-\frac{x^3}{9^2}+\frac{x^4}{9^3}-...+(-1)^n\frac{x^{n+2}}{9^{n+1}}+\ldots,\qquad x\in(-9,9).$$

Пример 5. Представить интеграл

$$\int_0^1\frac{\sin x^2-x^2}{x^6}dx$$

в виде суммы числового ряда, почленно проинтегрировав степенной ряд подинтегральной функции. Найти приближенное значение интеграла, ограничившись суммой первых трех членов полученного ряда (члены вычислять с точностью до 0,001).

Решение. Задачу можно решить по следующей схеме:

а) воспользоваться разложением $y=\sin x$ (см.(2.3.4)) заменив в нем x (который произволен) на x^2;

б) прибавить $(-x^2)$ к обеим частям полученного разложения;

в) умножить обе части разложения на $\frac{1}{x^6}$ (см. замечание ниже);

г) почленно проинтегрировать полученный ряд по отрезку [0; 1];

д) произвести приближенные вычисления.

Последовательно имеем:

$$\sin x^2=x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}-\frac{x^{14}}{7!}+...+(-1)^n\frac{\left(x^2\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}+...;\ x\in(-\infty;+\infty);$$

$$\sin x^2 - x^2 = -\frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!} + \ldots;$$

$$\frac{\sin x^2 - x^2}{x^6} = -\frac{1}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^8}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{4n-4}}{(2n+1)!} + \ldots; \qquad (3.5.3)$$

$$\tau = \int_0^1 \frac{\sin x^2 - x^2}{x^6} dx = -\int_0^1 \frac{1}{3!} dx + \int_0^1 \frac{x^4}{5!} dx - \int_0^1 \frac{x^8}{7!} dx + \ldots + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{4n-4}}{(2n+1)!} dx + \ldots.$$

Вычисляя интегралы (табличные интегралы степенных функций), имеем:

$$\tau = -\frac{1}{3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} - \frac{1}{9 \cdot 7!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{(4n-3)(2n+1)!} + \ldots;$$

$$\tau \approx -0{,}167 + 0{,}002 - 0{,}000 = -0{,}165.$$

Замечание. В точке x=0 значение функции $y = \dfrac{\sin x^2 - x^2}{x^6}$ доопределено суммой соответствующего степенного ряда (3.5.3) , то есть значением $\left(-\dfrac{1}{6}\right)$.

3.5.3 ***Приложения степенных рядов к решению задачи Коши для дифференциального уравнения.*** Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

или второго порядка

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y'_0 \end{cases}$$

(для определенности мы рассматриваем начальные условия в точке $x = 0$) в общем случае, как известно, не может быть решена эффективно аналитически. Один из путей ее решения средствами степенных рядов состоит в записи искомого частного решения в виде суммы ряда Маклорена

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + ... \quad , \qquad (3.5.4)$$

коэффициенты которого определяются из начального условия (начальных условий), а также самим уравнением и результатами его последовательного дифференцирования. Не останавливаясь на обосновательной базе, продемонстрируем соответствующую технику на конкретной задаче.

Пример. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ задачи Коши

$$\begin{cases} y' = 1 + e^{-y} + xy \\ y(0) = 0. \end{cases}.$$

Решение. Разложение в степенной ряд всякой (дифференцируемой сколь угодно много раз) функции (если это разложение возможно), должно иметь вид(3.5.4). Поэтому достаточно найти лишь его коэффициенты

$$a_n = \frac{y^{(n)}(0)}{n!},$$

то есть определить числа $y(0), y'(0), y''(0), y'''(0), y''''(0)$ и т.д.

Значение $y(0) = 0$ – дано; зависимость y' от x и y известна:

$$y' = 1 + e^{-y} + xy.$$

В точке $x = 0$ имеем:

$$y'(0) = 1 + e^{-y(0)} + 0 \cdot y(0) = 1 + e^0 = 2.$$

Далее, продифференцируем по x обе части данного уравнения:

$$y'' = (1 + e^{-y} + xy)' = 0 + e^{-y}(-y)' + x'y + xy' = -e^{-y}y' + y + xy' \qquad (3.5.5)$$

(использована формула дифференцирования сложной функции, поскольку y является функцией от x). Теперь появилась возможность вычислить $y''(0)$: подставляя $x = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$ получаем:

$$y''(0) = -e^0 \cdot 2 + 0 + 0 = -2.$$

Поскольку требуется найти три первых ненулевых члена ряда, а мы уже получили $y(0) = 0, y'(0) = 2, y''(0) = -2$, то осталось найти еще один ненулевой коэффициент. Имеем в результате почленного дифференцирования левой и правой частей (3.5.5):

$$y'''=\left(e^{-y}y'+y+xy'\right)'=\left(e^{-y}(-y)'y'+e^{-y}(y')'\right)+y'+x'y'+x(y')'=$$
$$=e^{-y}(y')^2-e^{-y}y''+2y'+xy'',$$

и, следовательно, $y'''(0)=e^0\cdot 2^2-e^0(-2)+2\cdot 2+0=10.$

Подставляя найденные значения в разложение (3.5.4), получаем

$$y(x)=0+\frac{2}{1!}x+\frac{-2}{2!}x^2+\frac{10}{3!}x^3+\ldots,$$

то есть

$$y(x)=2x-x^2+\frac{5}{3}x^3+\ldots\ .$$

3.6. Числовые и функциональные ряды: история и современность.

Начала теории рядов связывают с именем И. Ньютона (1642—1727). Именно ему принадлежит постановка задачи о распространении формулы разложения бинома (теперь называемого биномом Ньютона) $(1+x)^{\alpha}$ на случай показателей степени α, отличных от натуральных чисел. Идея состояла в том, что в этом случае конечная сумма превращается в бесконечный многочлен, т.е. в степенной ряд. Развивая идею Ньютона, английский математик Б.Тейлор (1685—1731) в 1715 г. выяснил, какой именно степенной ряд должна иметь любая бесконечно много раз дифференцируемая функция. Дальнейшее развитие указанного направления исследований принадлежит К. Маклорену (1698—1746), ученику Ньютона, который в 1742 установил, например, единственность разложения функции в степенной ряд. Его именем называются теперь разложения основных элементарных функций в ряды по степеням аргумента *x*.

Итак, степенные ряды возникли раньше числовых! Даже само понятие суммы ряда было еще не определено. Так, Л.Эйлер (1707—1783) считал суммой степенного ряда значение исходной функции в выбранной точке. Но мы знаем, что это верно не всегда. Так, за границей интервала сходимости степенной ряд оказывается расходящимся. Однако понимание того, что ряды могут расходиться, формировалось в течение достаточно долгого периода. Немало существенных результатов, относящихся к расходящимся рядам, получил Л.Эйлер, но эти результаты долго не находили применения.

В формировании понятия сходимости ряда и его суммы большую роль сыграл французский ученый О. Коши (1789—1857). Так, в 1826 г., он сформулировал мысль о том, что расходящийся ряд не имеет суммы. Он же получил критерий (необходимое и достаточное условие) сходимости рядов, однако этот критерий оказался неэффективным в том смысле, что он практически неприменим для конкретных рядов, хотя имеет большое теоретическое значение. В 1768 г. французский математик и философ Ж. Л. Д'Аламбер исследовал отношение последующего члена к предыдущему в биномиальном ряде и показал, что если это отношение по модулю меньше единицы, то ряд сходится. О. Коши обобщил этот результат в 1821 г., доказав в общем виде признак сходимости знакоположительных рядов, называемый теперь признаком Д'Аламбера. Он же доказал теоремы, именуемые радикальным и интегральным признаками Коши.

Знкоположительные и знакочередующиеся ряды (последние связаны с именем Г. В. Лейбница (1646—1716), великого немецкого математика и философа, одного из основоположников дифференциального и интегрального исчисления) являются важнейшими представителями числовых рядов. Среди функциональных рядов, наряду со степенными, интерес исследователей привлекали тригонометрические ряды – ряды по синусам и косинусам. Задача представления периодических функций такими рядами исследовалась Ж. Б. Фурье (1756—1830) в 1807 г. работах по аналитической теории тепла. Ряды Фурье положили начало новому направлению в математике – гармоническому анализу.

Современные исследования в области числовых и функциональных рядов и их многочисленных приложений посвящены многообразным задачам, связанным с расходящимися рядами (вопросам так называемой обобщенной суммируемости), а также разложениям функций в ряды по ортогональным системам, частным случаем которых является система тригонометрических функций.

4. УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1.Вычислить суммы следующих рядов:

1.1 $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}$ 1.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1}-6^{n+2}+1}{9^n}$ 1.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{1-n}-16^{n/2}-5}{5^n}$

1.4 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{1+\sin\frac{\pi}{n}}{1+\sin\frac{\pi}{n+1}}$ 1.5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

1.6 $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2-3n+2}$ 1.7 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2(n-1)^2}$

1.8 $\sum_{n=1}^{\infty} (\cos\frac{\pi(n-1)}{2n}-\cos\frac{\pi n}{2(n+1)})$

2. Исследовать сходимость знакоположительных рядов, применив признаки Даламбера или Коши:

2.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+4n}{8^n}$ 2.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n+3)^n}$ 2.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+n)!}{2^n}$ 2.4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{\sqrt{n+1}}$

2.5 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n$ 2.6 $\sum_{n=1}^{\infty} 5^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 2.7 $\sum_{n=1}^{\infty} (9n+1)4^n$

2.8 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n}{(n+1)!}$ 2.9 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(4+\frac{3}{n}\right)^n$ 2.10 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{8n+1}}{3^n}$

3. Исследовать сходимость знакоположительных рядов, применив признаки сравнения или достаточный признак расходимости:

3.1 $\sum_{n=1}^{\infty} tg\,\frac{\pi}{3n}$ 3.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n+2}}$ 3.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+3}$ 3.4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{5n+2}$

3.5 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+2}{n+1}}$ 3.6 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+3n}$ 3.7 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4+\sqrt{n}}$

3.8 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^2+2}$ 3.9 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2+n)^2}$ 3.10 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{n\sqrt{n}}$

4. С помощью интегрального признака исследовать сходимость знакоположительных рядов:

4.1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6+\ln n}{n}$ 4.2 $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{1-n^2}$ 4.3 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^3 n}$ 4.4 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{2n}$

4.5 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$ 4.6 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{5n^4+1}$ 4.7 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\ln(n+1)}}{n+1}$

4.8 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-2\sqrt{n}}}{2\sqrt{n}}$ 4.9 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{1+\ln n}}$ 4.10 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n^3+1)^3}$

4. Применив подходящий признак, исследовать сходимость следующих знакоположительных рядов:

4.1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2\sqrt{n}}{2+n}$ 4.2 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{n^2+1}$ 4.3 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln 2n}{n}$

4.4 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n)!}$ 4.5 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1+3^n}{4^n})^{2n}$

5. а) Исследовать знакочередующиеся ряды на сходимость и, в случае сходимости, установить ее вид (абсолютная, условная):

5.1 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+5}$ 5.2 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+2}}{\sqrt{n^2+1}}$ 5.3 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{1+\sqrt{n-1}}$ 5.4 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+2)^n}$

5.5 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n^3+n+1}}$ 5.6 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}$ 5.7 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)}$

5.8 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-n)^n}{(n+1)^n}$ 5.9 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n\cdot n!}$ 5.10 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}3^{1-2n}4^{n+3}$

б)Вычислить с точностью до 0,001 сумму ряда

5.11 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+1}$ 5.12 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n+500}$

6. Найти интервал сходимости степенного ряда. Исследовать сходимость на концах интервала:

6.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{5^{n+1}}$ 6.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1} x^n}{3n}$ 6.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n x^{n-1}}{n^5}$ 6.4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^{2n}}$

6.5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{9^n \cdot n}$ 6.6 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)! x^n$ 6.7 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$

6.8 $\sum_{n=0}^{\infty} (x+10)^{n+1}$ 6.9 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (x+7)^n}{\sqrt[4]{n+1}}$ 6.10 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-0,5)^{n-1}}{3^n n^3}$

7. Найти области сходимости следующих функциональных рядов:

7.1 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}$ 7.2 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{(n+1)\sqrt{n+1}}$ 7.3 $\sum_{n=0}^{\infty} (1-x^2)^n$

7.4 $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \sin^n \frac{x}{6}$ 7.5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \ln^n \frac{1}{x-1}$

8. Разложить следующие функции в ряд Маклорена, указав при этом интервалы значений x, в которых разложения имеют место:

8.1 $y = x\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)$ 8.2 $y = \frac{x^2}{1-2x}$ 8.3 $y = x\sin^2\frac{x}{6}$ 8.4 $y = ch\,4x$

8.5 $y = \frac{x^2}{4+x}$; 8.6 $y = \sqrt{1+9x^2}$ 8.7 $y = \frac{\ln(1+3x^2)}{x^2}$

8.8 $y = \frac{1}{8+64x}$ 8.9 $y = \frac{x^3}{9+4x}$ 8.10 $y = x\cos\sqrt{x}$.

9. Представить интеграл в виде суммы числового ряда, почленно проинтегрировав степенной ряд подинтегральной функции. Найти

приближенное значение интеграла, ограничившись суммой первых трех ненулевых членов полученного ряда (члены вычислять с точностью до 0,001):

9.1 $\int\limits_0^{0,5} \frac{\mathrm{sh}2x}{x}dx$ 9.2 $\int\limits_0^1 e^{-x^3}dx$ 9.3 $\int\limits_0^2 \sin(x^3)dx$ 9.4 $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^6}}$

9.5 $\int\limits_0^2 \frac{\cos\frac{x}{2}-1}{x^2}dx$ 9.6 $\int\limits_0^{0,6} \frac{xdx}{1-2x^3}$ 9.7 $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-x^2)+x^2}{x^3}dx$

9.8 $\int\limits_0^2 \frac{\sin\frac{x}{2}}{x}dx$ 9.9 $\int\limits_0^{0,5} \frac{e^{2x}-1}{x}dx$ 9.10 $\int\limits_0^{\sqrt{2}} \cos\frac{x^2}{2}dx.$

10. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ следующей задачи Коши:

10.1 $\begin{cases} y' = x^2 + y^2 + 3x + 2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ 10.2 $\begin{cases} y' = x^2 + 9y + e^y + 4 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

10.3 $\begin{cases} y' = 11 + 2y^2 + x^2 + 4x \\ y(0) = 0 \end{cases}$ 10.4 $\begin{cases} y' = 2e^y + x + 3y \\ y(0) = 0 \end{cases}$

10.5 $\begin{cases} y' = 7\cos x - 3x + \cos y + 7 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ 10.6 $\begin{cases} y' = e^x + 2xy + \sin x + 2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

10.7 $\begin{cases} y' = \frac{x^2}{2} + 5\sin y + 4 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ 10.8 $\begin{cases} y' = \frac{x^3}{3} + e^{2x} + 6y \\ y(0) = 0 \end{cases}$

10.9 $\begin{cases} y' = 2\sin 2x + 3e^y + 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ 10.10 $\begin{cases} y' = \sin x + 3\sin y - 6 \\ y(0) = 0 \end{cases}.$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бермант, А.Ф. Краткий курс математического анализа : учебник. – 10-е изд., стереотип. / А.Ф.Бермант, И.Г. Араманович. – СПб. : Лань, 2003. – 736 с.

2. Нахман, А.Д. Элементы теории функций комплексного переменного: учебн. пособие /А.Д.Нахман. – Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2007. – 188 с.

3. Воробьев, Н.Н. Теория рядов: учебник/ Н.Н.Воробьев. – СПб.: «Лань», 2002. – 408 с.

4. Нахман, А.Д. Преподавание математики в условиях реализации федерального государственного образовательного стандарта: учебно-методический комплект по элементам математического анализа /А.Д.Нахман, И.Ю.Иванова. – Тамбов: ТОГОАОУ ДПО «Институт повышения квалификации работников образования», 2012. – 115с.

ОГЛАВЛЕНИЕ