Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Тамбовский государственный технический университет»

А.Д.Нахман

ТРИГОНОМЕТРИЯ

Утверждено Методическим Советом ТГТУ
в качестве учебно-методического пособия
для абитуриентов и студентов первого курса
инженерных направлений подготовки

Тамбов

2014

Рецензенты:

заведующая кафедрой общеобразовательных дисциплин

ТОГОАУ ДПО «Институт повышения квалификации работников образования»

доцент Т.В.Мирзаева,

доцент кафедры «Высшая математика»

ФБГОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет»,

кандидат физико-математических наук В.В.Васильев

Утверждено Методическим Советом

ТГТУ (протокол № 7 от 23.09.14)

Изложены основные понятия и факты тригонометрии. Предложены задания для входного контроля и теоретические упражнения. Приведены методические указания к решениям, значительное количество подробно решенных задач (как типовых, так и повышенной и высокой сложности), а также упражнений, адресованных учащимся для самостоятельного решения. Пособие может быть использовано студентами инженерных и экономических направлений подготовки в процессе изучения математического анализа и повторения тригонометрического материала, широко востребованного в вузовском курсе математики. Материал может быть также рекомендован абитуриентам для подготовки к ЕГЭ.

ВВЕДЕНИЕ

Тригонометрия – важная и весомая составляющая контрольно-измерительных материалов единого экзамена, централизованного тестирования и заданий вступительных экзаменов; этот материал традиционно используется в математических олимпиадах, сохраняя характер селективного инструмента отбора. Соответственно, сохраняется и потребность в хорошей организации обучения этому блоку содержания. В средней школе долгое время существовал отдельный курс тригонометрии, обеспеченный учебниками и задачниками. Но постепенно тригонометрический материал «растворился» в курсе геометрии, алгебры, анализа. У учащихся укоренилось ощущение, что тригонометрия – это многочисленный набор незапоминаемых формул. Безусловно, определенный минимум формул учащийся должен знать на память, но куда важнее, если учащийся вместо запоминания, например, таблицы формул приведения (или обращения к готовой таблице) будет знать, что:

- под знаком тригонометрической функции можно исключить слагаемое, равное ее периоду (целому числу основных периодов);

- исключение нечетного количества значений π под знаком синуса или косинуса влечет за собою изменение (на противоположный) знака значения функции;

- исключение нечетного количества значений $\frac{\pi}{2}$ влечет за собою изменение функции на «кофункцию» с постановкой того знака, которым обладало значение функции от *данного* аргумента.

Приоритеты должны быть отданы именно своеобразным идеям тригонометрии, существенно новым для учащегося дидактическим единицам: понятию тригонометрической окружности, свойствам периодичности, неоднозначной обратимости тригонометрических функций и др.

Последовательность изучения тригонометрического материала целесообразно выстраивать, следуя дидактическому принципу историзма – как бы повторяя пути первооткрывателей. В соответствии с этим обратимся к краткой истории тригонометрии.

Тригонометрия в переводе с греческого означает «измерение треугольников» (решение треугольников), т.е. определение одних элементов треугольника по заданным другим элементам. Именно такие задачи возникают на практике в земельных измерениях, строительном деле, астрономии.

Хотя название науки возникло сравнительно недавно, многие относимые сейчас к тригонометрии понятия и факты были известны более двух тысяч лет назад (Гиппарх, Птолемей и др.); тригонометрические функции как зависимости между отношениями сторон треугольника и его углами встречаются в III веке до н.э. в работах математиков Древней Греции – Евклида, Архимеда, Апполония Пергского. В римский период эти отношения достаточно систематично исследовались Менелаем (I век н.э.); теорема синусов встречается в трудах индийского ученого Бхаскары и азербайджанского астронома и математика Насиреддина Туси Мухамеда; последний изложил плоскую и сферическую тригонометрию как самостоятельную дисциплину.

При переводе арабских математических текстов возник латинский термин *синус* (sinus – изгиб, кривизна); косинус – это сокращение латинского выражения completely sinus, т. е. “дополнительный синус” (или иначе “синус дополнительной дуги”, т.е. дуги, дополнительной до 90 градусов).

Тангенсы возникли в связи с решением задачи об определении длины тени. *Тангенс и котангенс* введены в X веке арабским математиком Абу-ль-Вафой, который составил и первые таблицы для их нахождения. Однако в Европе тангенсы были «заново открыты» лишь в XIV веке немецким математиком и астрономом Региомонтаном; он же составил подробные тригонометрические таблицы.

Название «тангенс», происходит от латинского tanger (касаться), tangens переводится как «касающийся» (линия тангенсов – касательная к единичной окружности).

Дальнейшее развитие тригонометрия получила в 15-17 веках в трудах выдающихся ученых: астрономов Николая Коперника и Иогана Кеплера и математика Франсуа Виета.

Долгое время тригонометрия носила чисто геометрический характер, т. е. ее факты формулировались и доказывались с помощью геометрических понятий и утверждений. Такою она была еще в средние века, хотя иногда в ней использовались и аналитические методы. Значительные стимулы к развитию тригонометрии возникали в связи с решением задач астрономии: астрономов интересовали соотношения между сторонами и углами сферических треугольников. Начиная с XVII в., тригонометрические функции стали применяться к решению уравнений, задач механики, оптики, электричества, радиотехники, для описания колебательных процессов, процессов распространения волн и т. д.; вследствие этого тригонометрические функции всесторонне и глубоко исследовались и приобрели важное значение для всей математики.

Аналитическая теория тригонометрических функций в основном была создана выдающимся математиком XVIII веке Леонардом Эйлером (1707-1783), членом Петербургской Академии наук. Его научное наследие включает блестящие результаты в области математического анализа, геометрии, теории чисел, механики. Именно Эйлер первым ввел определения тригонометрических функций в их современном виде, стал рассматривать функции произвольного угла, получил формулы приведения.

Накопленная информация о тригонометрических функциях позволила перейти к рассмотрению задач о разложении периодических функций в сумму косинусов и синусов. Такие задачи возникают в различных приложениях, как, например, в механике: представить периодическое движение в виде суммы простейших гармоник. В общем случае речь должна идти о бесконечной сумме, т.е. о функциональном (тригонометрическом) ряде, называемом рядом Фурье. Так тригонометрические функции легли в основу современной математической теории – гармонического анализа.

1.ТРИГОНОМЕТРИЯ. ПРОГРАММА КУРСА

1.1 ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Настоящая программа предназначена, в первую, очередь для обобщающего повторения тригонометрии и систематизации знаний. Обобщающее повторение целесообразно организовывать в виде решения системы тематических упражнений нарастающей трудности, сопровождаемого классификацией типов задач и формулировкой обобщенных приемов их решения. Эта же программа (вопросы содержания, последовательность прохождения тем) может быть положена и в основу «адаптивного» курса для студентов вузов со слабой математической подготовкой.

1.1.1 Цели изучения курса тригонометрии.

Образовательные цели:

- овладение системой знаний и умений в области тригонометрии, необходимых для продолжения образования, освоения смежных дисциплин, использования в математическом моделировании некоторых периодических процессов, применения в практической деятельности,

Развивающие цели:

- развитие алгоритмической культуры;
- развитие критичности мышления, интуиции, логического мышления**.**

Воспитательные цели:

- воспитание интереса к математике, стремления к использованию математических знаний (в частности, знаний в области тригонометрии) в повседневной жизни, способности к преодолению трудностей;
- воспитание средствами математики культуры личности, отношения к математике как части общечеловеческой культуры, понимания значимости математики для общественного прогресса.

1.1.2 Задачи курса тригонометрии:

- использование тригонометрических функций острых углов в решении прямоугольных треугольников;
- формирование понятий тригонометрической окружности, тригонометрических функций произвольных углов и ознакомление со свойствами и графиками этих функций;
- изучение основных связей между тригонометрическими функциями одного и различных аргументов (тригонометрических формул) и их использование в преобразованиях тригонометрических выражений;
- ознакомление с обратными тригонометрическими функциями, их свойствами и графиками;
- изучение основных приемов решения тригонометрических уравнений и неравенств.

1.1.3 В результате изучения тригонометрии учащийся должен

знать:

-определения основных тригонометрических функций и функций, им обратных, а также вид их графиков; значения синуса, косинуса, тангенса, котангенса стандартных аргументов;

-формулы преобразования тригонометрических выражений;

-формулы решения простейших тригонометрических уравнений;

уметь:

-упрощать тригонометрические выражения, вычислять их значения;

-упрощать суперпозиции, содержащие «прямые» и обратные тригонометрические функции;

-выполнять преобразования графиков тригонометрических функций;

-решать тригонометрические уравнения стандартных типов и простейшие тригонометрические неравенства;

- применять свойства тригонометрических функций при решении нестандартных задач («перенос» знаний и умений в новые ситуации).

1.1.4 Изучение тригонометрии в составе математических дисциплин непосредственно или опосредовано способствует формированию следующих общекультурных компетенций:

- владение культурой мышления, способностью к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке целей и выбору путей ее достижения;
- способность к абстрактному и критическому мышлению, к принятию нестандартных решений и разрешению проблемных ситуаций;
-способность логически верно, аргументировано и ясно строить устную и письменную речь, публично представлять собственные и известные научные результаты, вести дискуссии;
-способностью к саморазвитию, самореализации, приобретению новых знаний, повышению своей квалификации и мастерства;
- способностью критически оценивать свои достоинства и недостатки, определять пути и выбрать средства развития достоинств и устранения недостатков;

общепрофессиональные компетенции (для студентов высших учебных заведений):

- способность выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлечь их для решения соответствующий физико-математический аппарат;
- способность к применению методов алгебры, геометрии, математического анализа теоретического и экспериментального исследования;
- способность осуществлять сбор, анализ и обработку данных, необходимых для решения поставленных профессиональных задач, а также выбирать инструментальные средства для обработки полученных, проанализировать результаты расчетов и обосновать полученные выводы;

-способность на основе описания реальных процессов и явлений строить стандартные теоретические, эконометрические и др. модели, анализировать и содержательно интерпретировать полученные результаты их исследования

1.2 ВОПРОСЫ СОДЕРЖАНИЯ

Вводный материал: тригонометрические соотношения в прямоугольном треугольнике

Теорема Пифагора. Понятие синуса, косинуса, тангенса и котангенса острого угла. Тригонометрические функции в треугольнике с гипотенузой единичной длины. Соотношения между тригонометрическими функциями острого угла. Решение прямоугольных треугольников.

1. Основные тригонометрические функции

1.1. Тригонометрическая окружность. Отсчет углов, отрицательные и положительные углы. Градусная и радианная меры дуг (углов). Функции $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\mathrm{tg}\, x$, $y=\mathrm{ctg}\, x$. Значения тригонометрических функций аргументов, кратных $\frac{\pi}{2}$. Таблица значений тригонометрических функций углов $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$.

1.2. Знаки тригонометрических функций в различных четвертях тригонометрического круга. Формулы связи функций одного аргумента.

1.3. Характер четности и периодичность основных тригонометрических функций. Формулы приведения.

1.4. Графики основных тригонометрических функций. Преобразования графиков.

2. Преобразование тригонометрических выражений

2.1. Формулы сложения. Формулы преобразования произведений тригонометрических функций в сумму и суммы тригонометрических функций в произведение.

2.2. Тригонометрические функции двойного аргумента. Формулы понижения степени. Выражения синуса и косинуса через тангенс половинного аргумента.

2.3. Простейшая гармоника $y = A\sin(\omega t + \gamma)$. Преобразование линейного тригонометрического выражения $y = a\sin t + b\cos t$ к простейшей гармонике.

2.4. Техника преобразования тригонометрических выражений.

3. Обратные тригонометрические функции

3.1. Определения арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса, многозначность, главные значения.

Функции вида $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, y=arctg x, y=arcctg x: области определения, множества соответствующих значений, характер монотонности, графики. Связи значений арксинуса и арккосинуса, арктангенса и арккотангенса одного и того же аргумента.

3.2. Нечетность функций $y = \arcsin x$, y=arctg x и свойства вида $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$, arcctg $(-x) = \pi - \mathrm{arcctg}\ x$.

3.3. Преобразования суперпозиций типа «обратная функция от тригонометрической» и «тригонометрическая функция от обратной» (напр., $\arcsin(\sin\alpha)$, $\sin(\arccos x)$ и т.п.).

4. Тригонометрические уравнения и неравенства

4.1. Простейшие тригонометрические уравнения : $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$. Частные случаи простейших уравнений при $a = 0$, $a = 1$, $a = -1$.

4.2. Алгебраические методы решения тригонометрических уравнений: уравнения, сводящиеся к квадратным, другие случаи замены переменных в тригонометрических уравнениях, метод разложения на множители.

4.3. Условия равенства синусов, косинусов, тангенсов и котангенсов. Сведение к этим условиям уравнений вида $\sin x + \sin y = 0$, $\cos x + \cos y = 0$, $\sin x \pm \cos y = 0$.

4.4. Однородные тригонометрические уравнения.

4.5. Линейные тригонометрические уравнения.

4.6. Техника решения тригонометрических уравнений различных типов. Отбор корней в заданном интервале.

4.7 Системы тригонометрических уравнений.

4.7. Простейшие тригонометрические неравенства.

5. Задачи, использующие тригонометрический материал:

5.1 Задачи «реальной математики».

5.2 Задачи математического анализа, связанные с исследованием тригонометрических функций.

5.3 Задачи с параметрами и другие задачи повышенного и высокого уровней сложности.

2.СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

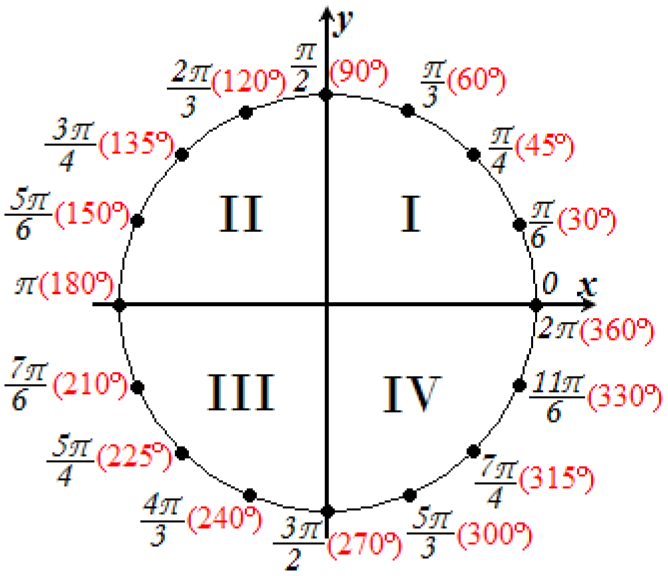
2.1 ОСНОВНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

2.1.1 Тригонометрическая окружность. Существенно новым для учащихся, начинающих изучать тригонометрию, является введение так называемой тригонометрической окружности, т.е. следующей *системы координат на окружности* ***C*(O;1)** единичного радиуса с центром в точке **O** (в начале уже имеющейся на плоскости прямоугольной системы координат).

Началом отсчета на окружности служит точка $P(1,0)$. Если $M(x, y) \in$ ***C*(O;1),** то считаем, что дуга *PM* имеет положительную величину (равную ее длине) при выборе ее обхода в направлении против часовой стрелки и отрицательную (равную длине со знаком «минус») – при ее обходе по часовой стрелке.

Длина дуги измеряется в *градусах* или *радианах*. По определению, один градус (обозначение $1°$) соответствует 1 /360 части длины окружности; один радиан равен единице масштаба заданной прямоугольной системы координат.

Более мелкой, чем градус, единицей измерения дуг является *минута* (обозначение 1’) и *секунда*. Один градус состоит из 60 минут, 1 минута – из 60 секунд.



Центральный *угол POM* (далее обозначаемый через α) *отождествляется с дугой окружности PM,* так что величина угла α определяется величиною $\cup PM$. В частности, развернутый угол, т.е. угол *POQ,* где Q(-1,0), соответствует дуге *PQ* (т.е. полуокружности), обходимой в положительном направлении. Он равен тогда 180 градусам или π радианам (половине длины окружности, равной $2\pi \cdot 1$).

Отсюда получаем *следующее соотношение между единицами измерения углов (дуг)*: π радиан равно 180°, что записывают в виде π = 180°. Теперь приходим к следующим формулам, выражающим градусную меру через радианную и наоборот:

$$n \text{ радиан} = \frac{180^0}{\pi} \cdot n, \qquad n^0 = \frac{\pi}{180} \cdot n \text{ радиан}.$$

2.1.2 Основные тригонометрические функции. Синусом угла α называется ордината y точки *M,* косинусом - ее абсцисса x; обозначения: $x = \sin\alpha, y = \cos\alpha$. Тангенсом и котангенсом угла α называют, соответственно, числа

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Реже рассматривают так называемые секанс и косеканс угла α:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

Полагаем, что знаменатели всех этих дробей отличны от нуля.

Соответствиями вида $t \mapsto \sin t$, $t \mapsto \cos t$, $t \mapsto \operatorname{tg} t$, $t \mapsto \operatorname{ctg} t$, $t \mapsto \sec t$, $t \mapsto \operatorname{cosec} t$ определятся функции, называемые синусом, косинусом, тангенсом, котангенсом, секансом и косекансом.

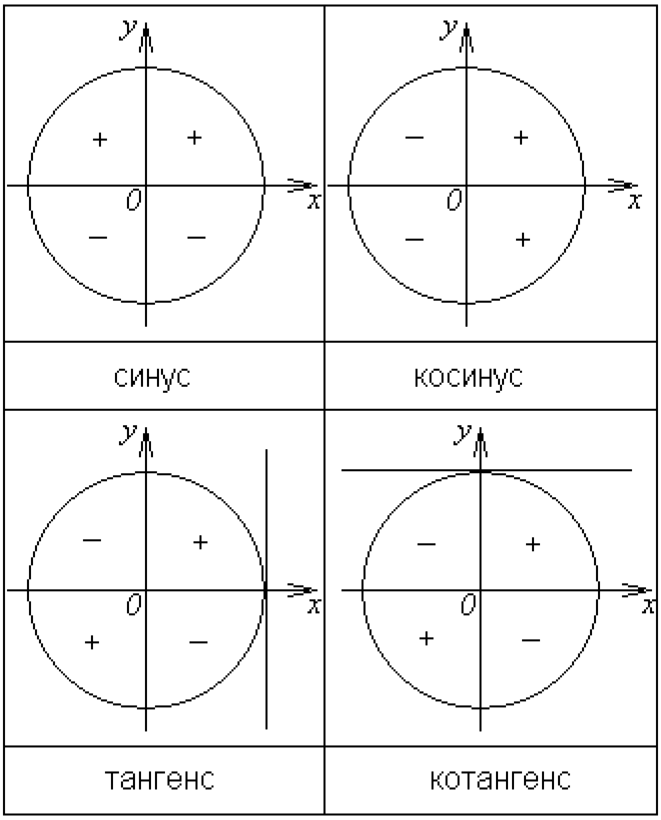
Из определений тригонометрических функций следует, что они обладают следующими знаками:

- в первой четверти (т.е. при $0<t<\frac{\pi}{2}$) все тригонометрические функции положительны: $\sin t>0$, $\cos t>0$, $\operatorname{tg} t>0$, $\operatorname{ctg} t>0$;

- во второй четверти (т.е. при $\frac{\pi}{2}<t<\pi$) имеем $\sin t>0$, $\cos t<0$, $\operatorname{tg} t<0$, $\operatorname{ctg} t<0$;

в третьей четверти (т.е. при $\pi<t<\frac{3\pi}{2}$): $\sin t<0$, $\cos t<0$, $\operatorname{tg} t>0$, $\operatorname{ctg} t>0$;

в четвертой четверти (т.е. при $\frac{3\pi}{2}<t<2\pi$) имеем $\sin t<0$, $\cos t>0$, $\operatorname{tg} t<0$, $\operatorname{ctg} t<0$.

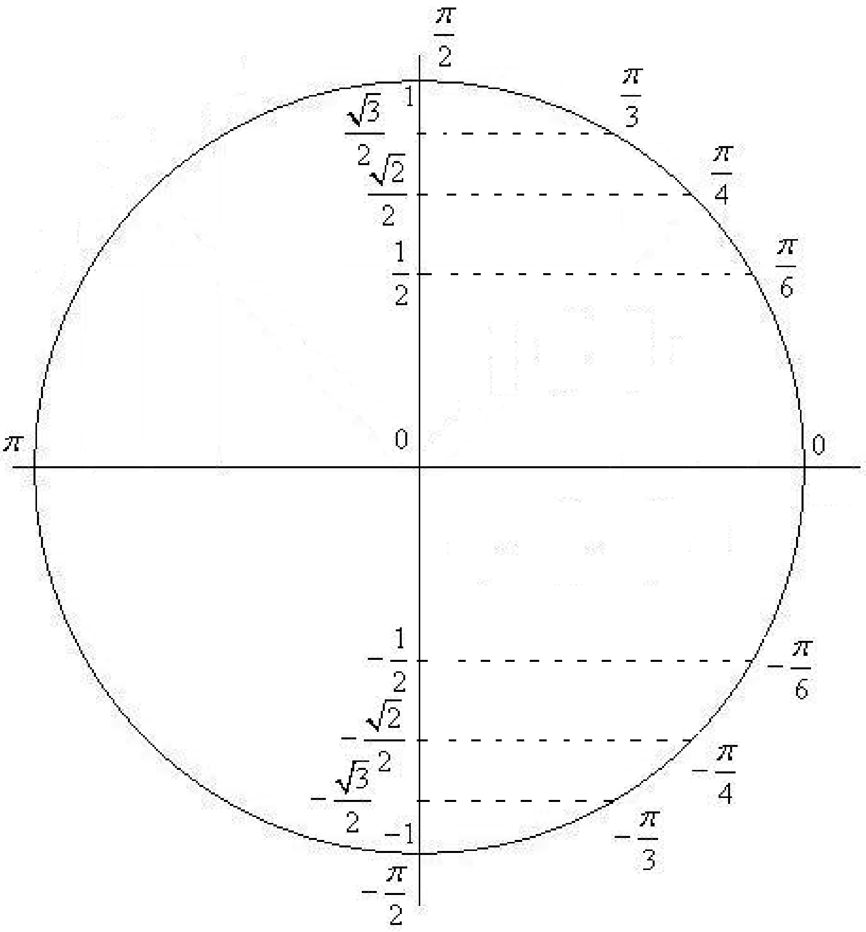


Функции вида u=cos t и u= sec t обладают свойством четности:

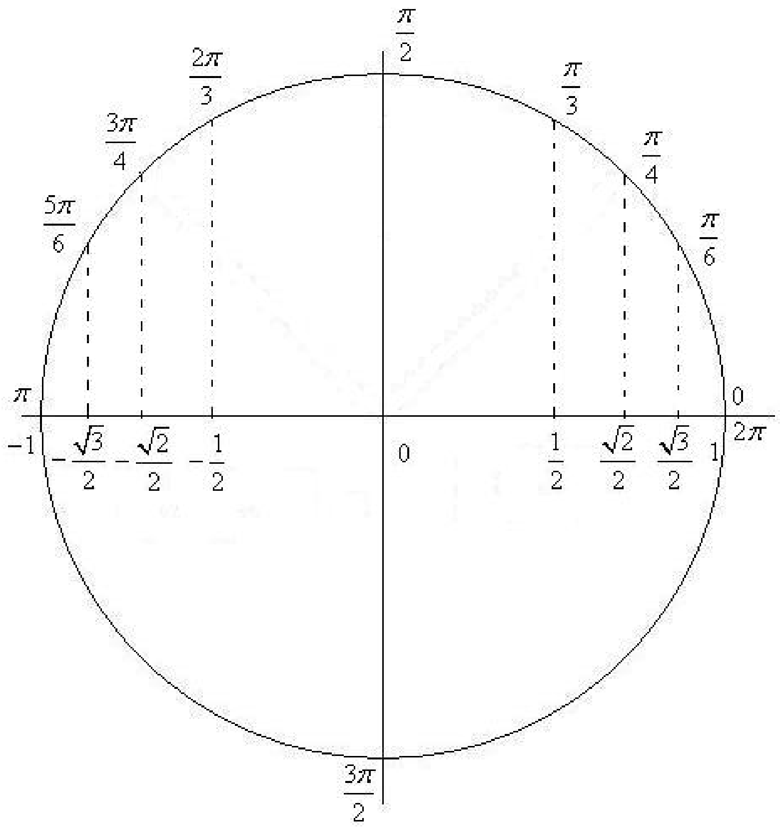
$$\cos(-t)=\cos t, \qquad \sec(-t)=\sec t,$$

а остальные – свойством нечетности; например, $\sin(-t)=-\sin t$.

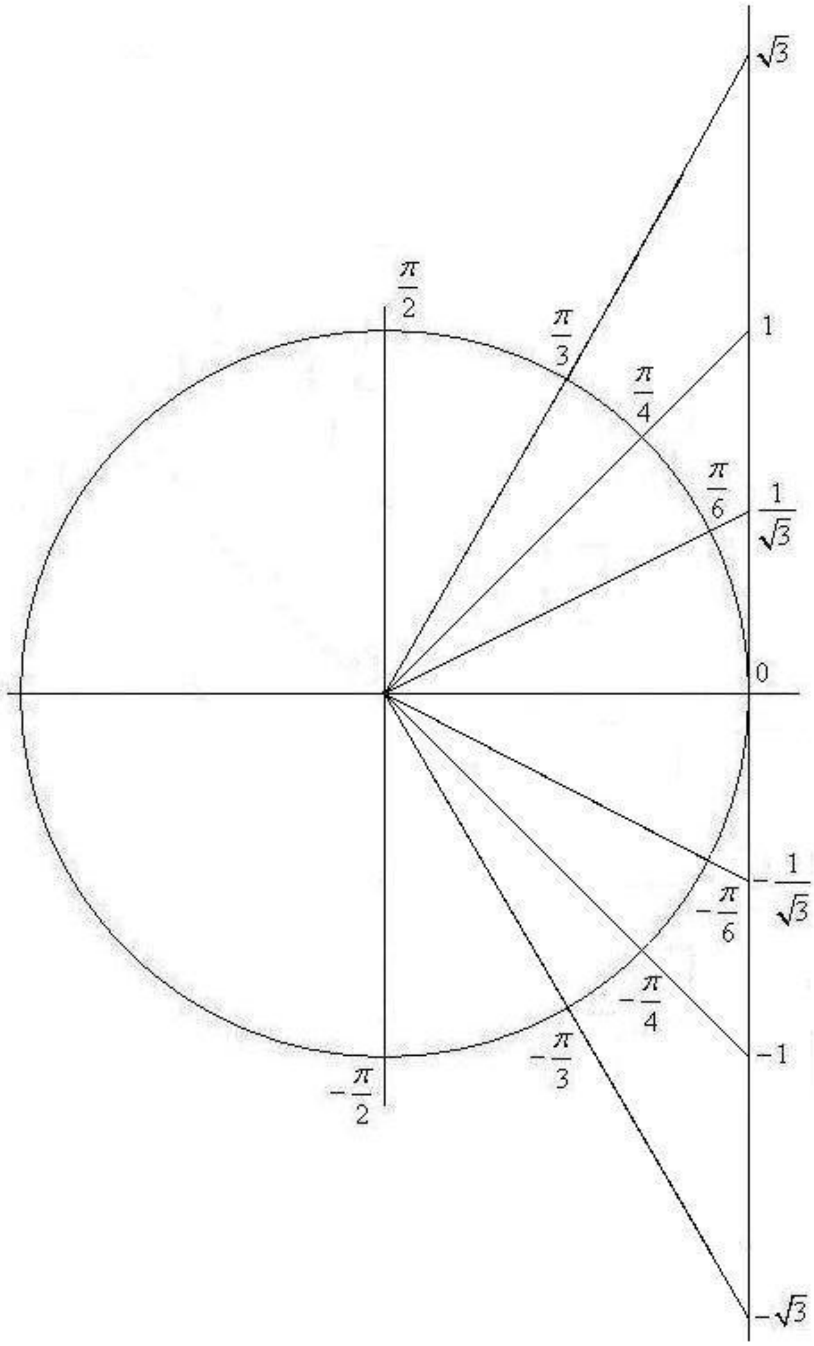
Запоминанию значений тригонометрических функций стандартных аргументов будут способствовать следующие схемы.



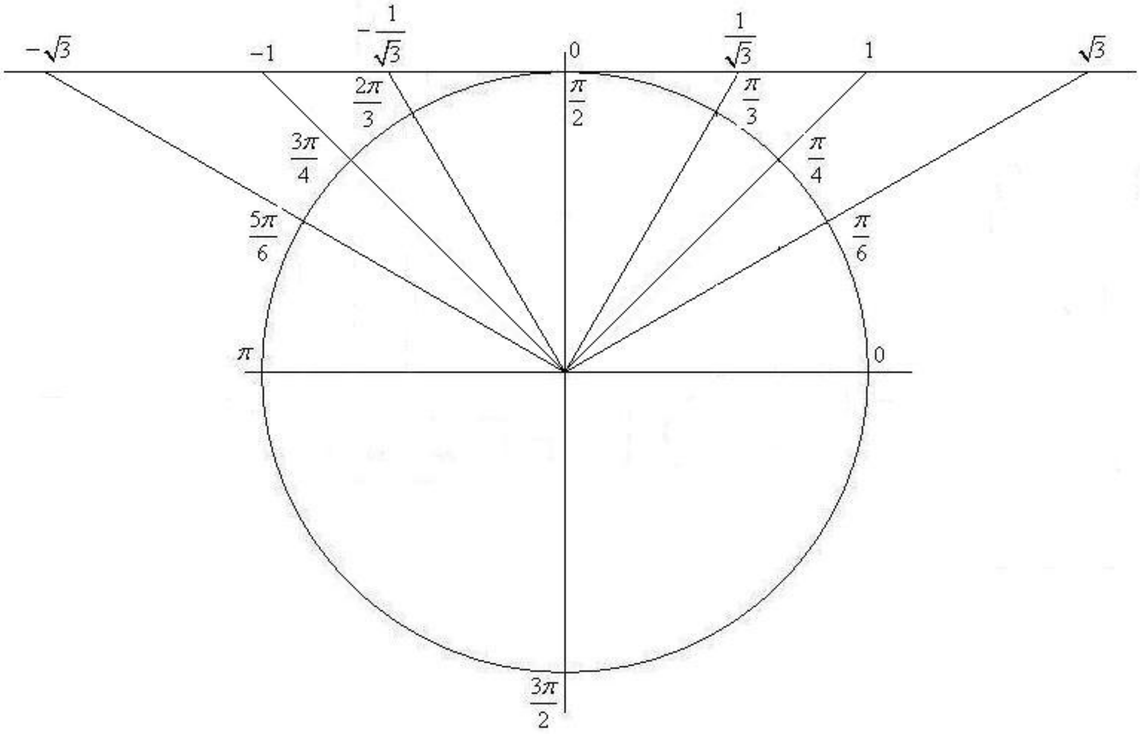
Значения синуса



Значения косинуса



Значения тангенса



Значения котангенса

2.1.3 Периодичность и формулы приведения. Свойство периодичности синуса и косинуса состоит в том, что точка M и полученная из нее путем одного или нескольких *полных обходов* окружности точка M' имеют одинаковые координаты (соответствующие дуги различаются на $2\pi k$, где k – любое целое число). Основным (наименьшим положительным) периодом синуса и косинуса является $T = 2\pi$:

$$\sin(\alpha \pm 2\pi) = \sin\alpha;\ \cos(\alpha \pm 2\pi) = \cos\alpha.$$

Основным периодом тангенса и котангенса является $T = \pi$:

$$tg(\alpha \pm \pi) = tg\alpha;\ ctg(\alpha \pm \pi) = ctg\alpha.$$

Свойство периодичности дополняют так называемые формулы приведения:

$$\sin(\alpha \pm \pi) = -\sin\alpha;\ \cos(\alpha \pm \pi) = -\cos\alpha;$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha;\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha;$$

$$tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=ctg\,\alpha; \qquad ctg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=tg\,\alpha.$$

2.2 ФОРМУЛЫ ТРИГОНОМЕТРИИ

Использование тех или иных формул тригонометрии диктуется целями, поставленными в процессе преобразования (разложить выражение на множители, добиться одинаковости аргументов и т.п.).

2.2.1 Формулы, связывающие тригонометрические функции одного и того же аргумента

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,$$

$$1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha},\ 1+ctg^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

часто применяются для выражения значения одной из тригонометрических функций через значение другой. При этом учащимся следует обратить на правильную постановку знака при использовании формул, связывающих квадраты функций (предотвратить типичную ошибку потери знака); например

$$\sin t=-\sqrt{1-\cos^2 t}, \text{ если } \pi<t<2\pi;\ \cos t=-\sqrt{1-\sin^2 t}, \text{ если } \frac{\pi}{2}<t<\frac{3\pi}{2}.$$

2.2.2 Тригонометрические функции суммы (разности) аргументов

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\sin\alpha\cdot\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\sin\beta\cdot\cos\alpha,$$

$$tg\,(\alpha\pm\beta)=\frac{tg\,\alpha\pm tg\,\beta}{1\mp tg\,\alpha\cdot tg\,\beta}$$

могут быть применены в преобразованиях, когда, например, значение одного из аргументов (α или β) – «стандартно» ($\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}$ и т.п.).

2.2.3 Тригонометрические функции двойного аргумента

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,\ \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,\ tg\,2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$$

обычно используют, если аргументы в преобразуемом тригонометрическом выражении отличаются вдвое, а нам следует привести функции к случаю значений от одного и того же аргумента.

Формулы для тригонометрических функций тройного аргумента имеют вид

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha,$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha,$$

$$tg3\alpha = \frac{3tg\,\alpha - tg^3\alpha}{1-3tg^2\alpha}.$$

2.2.4 Понижение степеней тригонометрических функций с одновременным удвоением аргумента достигается путем использования формул

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2},\ \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2};$$

часто бывает удобным использовать равносильные им формулы сложения с единицей:

$$1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2},\quad 1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

2.2.5 Преобразование суммы (разности) тригонометрических функций в произведение

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

применяют для разложения выражений на множители.

2.2.6 Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму (разность) бывает удобно, если, например, в упрощаемом выражении складываются несколько различных произведений тригонометрических функций; формулы имеют вид

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)),$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)),$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)).$$

2.2.7 Выражение синусов и косинусов через тангенс половинного угла

$$\sin\alpha=\frac{2\,tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}};\ \cos\alpha=\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

дают возможность оперировать в преобразуемом выражении только с одной функцией одного и того же аргумента (в частности, заменять переменные).

Рекомендуется тригонометрические формулы сообщать учащимся приведенными блоками, очерчивая то «поле деятельности», которое может быть реализовано путем использования каждого из блоков.

Замечание. Формулы, содержащие тангенсы, предполагают существование последних. Например, в блоке 2.2.7 должен существовать tg $\frac{\alpha}{2}$, т.е. cos $\frac{\alpha}{2}\neq 0$, $\alpha\neq\pi+2\pi k$, где k – любое целое число.

2.3 ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

2.3.1 Функции, обратные синусу и косинусу определяются для значений аргумента $x\in[-1,1]$:

$$y=\arcsin x,\ \text{если}\ x=\sin y,\ y\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}];$$

$$y=\arccos x,\ \text{если}\quad x=\cos y,\ y\in[0,\pi].$$

2.3.2 Функции, обратные тангенсу и котангенсу определяются для значений аргумента $x \in (-\infty, \infty)$:

$$y = arctg\, x, \text{ если } x = tg\, y,\ y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2});$$

$$y = arcctg\, x, \text{ если } x = ctg\, y,\ y \in (0, \pi).$$

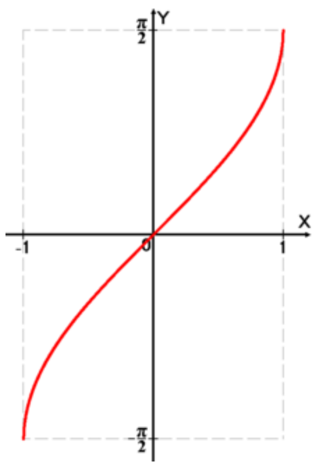
2.3.3 Заметим, что ***для положительных значений аргумента*** x ***получаем значения*** y ***в первой четверти***, а также что

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x, \qquad arctg\,(-x) = -arctg\, x,$$

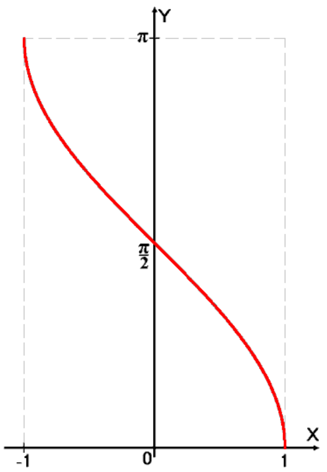
$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x, \quad arcctg\,(-x) = \pi - arctg\, x.$$

Функции $y = \arcsin x$ и y=arctg x являются возрастающими, а y=arccos x и y=arcctg x – убывающими на своих областях определения.

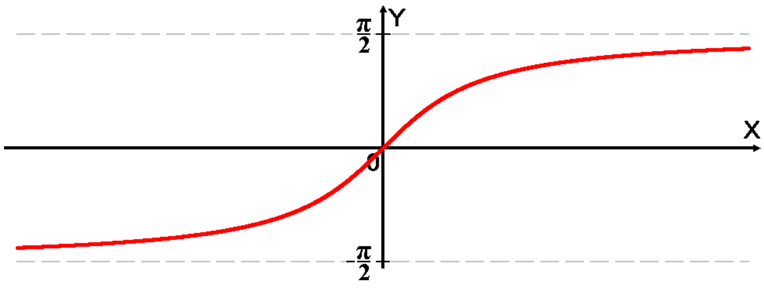
Указанные в п. 2.3.3 свойства рекомендуется проиллюстрировать с помощью графиков соответствующих функций.



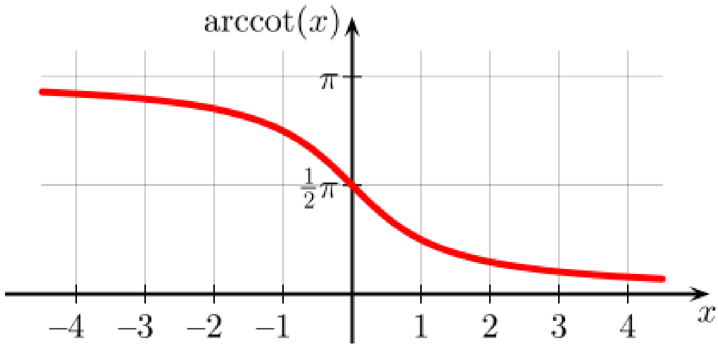
$y = \arcsin x$



y=arccos x



y=arctg x



y=arcctg x

2.3.4 Из определения обратных тригонометрических функций вытекают следующие ***соотношения «взаимного погашения»:***

$$\sin(\arcsin x) = x \ \ (-1 \le x \le 1), \ \ \cos(\arccos x) = x \ \ (-1 \le x \le 1),$$
$$tg(arctg\, x) = x \ \ (-\infty < x < +\infty), \ \ ctg(arcctg\, x) = x \ \ (-\infty < x < +\infty)$$

и

$$\arcsin(\sin\alpha) = \alpha \ \ (-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}), \ \ \arccos(\cos\alpha) = \alpha \ \ (0 \le \alpha \le \pi),$$
$$arc\,tg\,(tg\,\alpha) = \alpha \ \ (-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}), \ \ arc\,ctg(ctg\,\alpha) = \alpha \ \ (0 < \alpha < \pi);$$

следует обратить внимание учащихся, что последние соотношения имеют место не при всех значениях аргумента α, а лишь на областях значений соответствующих обратных функций.

2.3.5 Значения арксинуса и арккосинуса одного и того же аргумента ($x \in [-1,1]$) ***связаны следующим образом:***

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \ ;$$

аналогичная связь имеет место и для арктангенса и арккотангенса одного и того же аргумента:

$$\mathrm{arctg}\, x + \mathrm{arcctg}\, x = \frac{\pi}{2}.$$

2.3.6 Рекомендуется обратить внимание учащихся на то, что ***понятия обратных тригонометрических функций вписываются в общую концепцию обратных функций***:

а) выделяется на графике «прямой» тригонометрической функции «монотонная ветвь»; например, на графике функции $y = \cos x$ выделяется ветвь, соответствующая $x \in [0, \pi]$;

б) каждому значению y (ординате каждой точки выделенной монотонной ветви) сопоставляется его «прообраз» x; так, каждому $y = \cos x$ соответствует «прообраз» x именно из промежутка $x \in [0, \pi]$;

в) полученная зависимость значений x от значений y и есть обратная тригонометрическая функция (в приведенном примере $x = \arccos y$), для которой применяют, однако, традиционные обозначения, меняя ролями y и x.

2.4 ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

2.4.1 Приведем ***список формул, определяющих общие решения простейших тригонометрических уравнений, в случае равенства тригонометрических функций нулю***; здесь ***Z*** означает множество всех целых чисел.

Вид уравнения	Решения уравнения
$\sin t = 0$ или $\operatorname{tg} t = 0$	$t = \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$
$\cos t = 0$ или $\operatorname{ctg} t = 0$	$t = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$
$\sin t = 1$	$t = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$
$\sin t = -1$	$t = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$
$\cos t = 1$	$t = 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$

$\cos t = -1$ $\qquad t = \pi + 2\pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}$

Эти формулы легко установить, с помощью тригонометрической окружности. Например, значению синуса, равному единице, соответствует точка (0,1) в прямоугольной системе координат, в которой на единичной окружности сосредоточены значения $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k$ (точка $t = \frac{\pi}{2}$ и те, что получены из нее в результате k «полных обходов» окружности).

2.4.2 В общем случае ***обращение тригонометрических функций*** достигается с помощью следующих формул (решения простейших тригонометрических уравнений)

Вид уравнения	Решения уравнения
$\sin t = a \;, a \in [-1,1]$	$t = (-1)^k \arcsin a + \pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}$ или две серии решений : $t = \arcsin a + 2\pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}$; $t = \pi - \arcsin a + 2\pi l, \quad l \in \boldsymbol{Z}$
$\cos t = a \;, a \in [-1,1]$	$t = \pm \arccos a + 2\pi k \;, k \in \boldsymbol{Z}$
$\mathrm{tg}\; t = a$	$t = \mathrm{arctg}\, a + \pi k, \; k \in \boldsymbol{Z}$
$\mathrm{ctg}\; t = a$	$t = \mathrm{arcctg}\, a + \pi k \;, k \in \boldsymbol{Z}$

2.4.3 Тригонометрические неравенства: сравнение с нулем основных тригонометрических функций. Список соответствующих формул содержится в следующей таблице

Вид неравенства	Решения неравенства
$\sin\ t > 0$	$2\pi k < t < \pi + 2\pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}$
$\sin\ t < 0$	$-\pi + 2\pi k < t < \pi + 2\pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}$
$\cos t > 0$	$-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k < t < \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}$
$\cos t < 0$	$\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k < t < \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}$
$\mathrm{tg}\, t > 0$ или $\mathrm{ctg}\, t > 0$	$\pi k < t < \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}$
$\mathrm{tg}\, t < 0$ или $\mathrm{ctg}\, t < 0$	$-\dfrac{\pi}{2} + \pi k < t < \pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}$

Если же рассматривать нестрогие неравенства, то их решения также превращаются в соответствующие нестрогие неравенства; например, решения $\mathrm{tg}\, t \le 0$ имеют вид $-\dfrac{\pi}{2} + \pi k < t \le \pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}$.

2.4.4 Тригонометрические неравенства: общий случай. Список соответствующих формул содержится в следующей таблице

Вид неравенства	Решения неравенства
$\sin\ t > a, \ -1 < a < 1$	$\arcsin\ a + 2\pi k < t < \pi - \arcsin\ a + 2\pi k,$ $k \in \boldsymbol{Z}$
$\sin\ t < a, \ -1 < a < 1$	$-\pi - \arcsin a + 2\pi k < t < \arcsin\ a + 2\pi k,$ $k \in \boldsymbol{Z}$
$\cos t > a, \ -1 < a < 1$	$-\arccos\ a + 2\pi k < t < \arccos\ a + 2\pi k,$ $k \in \boldsymbol{Z}$

$\cos t < a,\ -1 < a < 1$	$\arccos a + 2\pi k < t < 2\pi - \arccos a + 2\pi k,$ $k \in \mathbf{Z}$
$\operatorname{tg} t > a$	$\operatorname{arctg} a + \pi k < t < \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$
$\operatorname{tg} t < a$	$-\frac{\pi}{2} + \pi k < t < \operatorname{arctg} a + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$
$\operatorname{ctg} t > a$	$\pi k < t < \operatorname{arcctg} a + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$
$\operatorname{ctg} t < a$	$\operatorname{arcctg} a + \pi k < t < \pi + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$

Если же рассматривать нестрогие неравенства, то их решения также превращаются в соответствующие нестрогие неравенства; например, решения $\operatorname{ctg} t \geq a$ имеют вид $\pi k < t \leq \operatorname{arcctg} a + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$**.**

В учебной литературе вышеуказанные формулы в готовом виде обычно не приводятся . Вместо них используется прием выделения дуги (единичной окружности или графика тригонометрической функции), соответствующей написанному неравенству и описание этой дуги в виде двойного неравенства для аргумента функции. С нашей точки зрения, ознакомление учащихся с этим приемом необходимо, однако обращение к формулам как к справочному материалу способствует (особенно на первых порах) самоконтролю правильности решения.

3. ОПОРНЫЙ МАТЕРИАЛ. СОДЕРЖАНИЕ ВХОДНОГО КОНТРОЛЯ. КОНТРОЛЬ УСВОЕНИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

3.1 ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ

Целесообразны «словесные формулировки» соответствующих понятий для острого угла:

«*Синус острого угла есть отношение противолежащего катета к гипотенузе; косинус - отношение прилежащего катета к гипотенузе. Тангенс острого угла есть отношение противолежащего катета к прилежащему, котангенс - отношение прилежащего катета к противолежащему.*»

Содержание входного контроля может включать:

а) задачи на определение элементов (решение) прямоугольных треугольников;

б)задачи на построение (определение положений) точек в прямоугольной системе координат;

в)получение информации о координатах точек по заданному их изображению в системе координат.

3.2 ЗАДАНИЯ ДЛЯ ВХОДНОГО КОНТРОЛЯ

1. Прямоугольный треугольник имеет катеты $a=12$, $b=9$. Найти синус, косинус и тангенс угла A, противолежащего катету a.

2. Косинус угла B, противолежащего катету b, равен 0,8, площадь треугольника равна 24 . Найти гипотенузу.

Указание: задача сводится к системе уравнений относительно катета а и гипотенузы с, если воспользоваться формулой для площади в виде

$$S=\frac{1}{2}ac\sin B.$$

3. Точка A удалена на расстояние 2 ед. от начала координат, расположена в нижней полуплоскости и имеет абсциссу $x=\sqrt{3}$. Найти ординату этой точки.

4. Найти координаты точек пересечения единичной окружности с осью абсцисс.

5. На единичной окружности отметить те точки, которые расположены а) на расстоянии, равном $\frac{1}{2}$ от оси абсцисс; б) на расстоянии, равном 1 от оси абсцисс.

3.3 ТЕСТЫ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ЗНАНИЯ ОСНОВНЫХ ОПРЕДЕЛЕНИЙ И ФАКТОВ ТРИГОНОМЕТРИИ.

l. *Косинусом произвольного угла α называется*

1)ордината соответствующей точки единичной окружности;

2)величина проекции точки единичной окружности на ось абсцисс;

3)отношение ординаты точки единичной окружности к абсциссе этой же точки;

4)расстояние от точки единичной окружности до начала координат.

2. *Котангенсом произвольного угла α называется*

1)отношение абсциссы точки единичной окружности к ординате этой же точки;

2)отношение ординаты соответствующей точки единичной окружности к абсциссе этой же точки;

3)величина проекции точки единичной окружности на ось абсцисс;

4)величина проекции точки единичной окружности на ось ординат.

3. *Если* $tg\,\alpha < 0,\ \cos\alpha > 0,$ *то*

1) соответствующая точка единичной окружности расположена во второй четверти;

2) точка единичной окружности расположена в третьей четверти;

3) точка единичной окружности расположена в четвертой четверти;

4) четверть, в которой расположена точка, однозначным образом не определяется.

4. *Сумма* $1+tg^2\alpha$ *(при всех допустимых значениях* α *) равна*

1) $\cos^2\alpha$;

2) $ctg^2\alpha$;

3) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$;

4) $\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

5. *Значение* $\cos\alpha$ *для тупого угла* α *совпадает с*

1) $1-\sin\alpha$;

2) $1-\sin^2\alpha$;

3) $\sqrt{1-\sin^2\alpha}$;

4) другим выражением, отличным от 1)-3).

6. *Среди следующих формул укажите неверную:*

1) $\cos(-x)=\cos x$;

2) $\cos(-x)=-\cos x$;

3) $\sin(-x)=-\sin x$;

4) $ctg(-x)=-ctg\,x$.

7. *Значение* $\cos(\dfrac{3\pi}{2}-x)$ *совпадает с*

1) -cos x;

2) - sin x;

3) sin x;

4) другим выражением, отличным от 1)-3).

8. *Среди следующих формул укажите верную (выполненную при всех допустимых значениях аргумента):*

1) $sin2\alpha = \dfrac{2\,tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$;

2) $sin2\alpha = \dfrac{2\,tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$;

3) $sin2\alpha = \dfrac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$;

4) $sin2\alpha = \dfrac{1+tg^2\alpha}{1-tg^2\alpha}$.

9. *Среди следующих формул укажите неверную:*

1) $\cos 2x = 2\cos x$;

2) $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$;

3) $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$;

4) $\sin^2 x = \cos^2 x - \cos 2x$.

10. *Область значений функции* y=arccos x *имеет вид*

1) [-1, 1] ;

2)[0, π];

3) [0, 2π];

4)$[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$.

11. *Среди следующих свойств укажите неверное*:

1)arccos(-x)=arccos x;

2)arcsin x=-arcsin(-x);

3)arctg(- x)=-arctg x;

4)arcctg(-x)= $\pi -$ arcctg x.

12. *Все решения уравнения* cos x= 0 *описываются формулой*

1)x=$2\pi k$, $k \in$ Z;

2)$x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, \quad k\in Z$;

3)$x=\frac{\pi}{2}+\pi k, \quad k\in Z$;

4)$x=1+2\pi k, \quad k\in Z$.

13. *Все решения уравнения* $\sin x = a$ *описываются формулой*

1)$x=\arcsin x+\pi k, \quad k\in Z$;

2)$x=\arcsin x+2\pi k, \quad k\in Z$;

3)$x=\pm\arcsin x+\pi k, \quad k\in Z$;

4)другой формулой, отличной от 1)-3).

14. *Все решения неравенства* $tg\ x\geq 0$ *имеют вид*

1)$x\geq 0$;

2) $\pi k\leq x<\frac{\pi}{2}+\pi k, \ k\in Z$;

3) $\pi k\leq x\leq\frac{\pi}{2}+\pi k, \ k\in Z$;

4) $2\pi k\leq x<\frac{\pi}{2}+2\pi k, \ k\in Z$.

15. *Все решения неравенства* $\sin x\geq 1$ *имеют вид*

1)$x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, \ k\in Z$;

2)$x=\frac{\pi}{2}+\pi k, \ k\in Z$;

3)$x\geq\frac{\pi}{2}+2\pi k, \ k\in Z$;

4)неравенство решений не имеет.

16. *Все решения неравенства* $|ctg\ x|>0$ *имеют вид*

1)$x\in(-\infty,+\infty)$;

2) $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$;

3) $x\in(\pi k,\pi+\pi k), \ k\in Z$;

4) $x \in (\pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k) \cup (\frac{\pi}{2} + \pi k, \pi + \pi k),\ k \in \mathrm{Z}.$

3.4 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ.

1.Доказать тождества (на области определения соответствующих функций):

$$tg^2\alpha - \sin^2\alpha = tg^2\alpha \cdot \sin^2\alpha,$$

$$ctg^2\alpha - \cos^2\alpha = ctg^2\alpha \cdot \cos^2\alpha.$$

2.Доказать следующие формулы "сложения с единицей" :

$$1 + \sin\alpha = 2\cos^2(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}),$$

$$1 - \sin\alpha = 2\sin^2(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}).$$

3. Доказать следующие формулы для тригонометрических функций тройного аргумента:

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha,$$
$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha,$$
$$tg3\alpha = \frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3tg^2\alpha}.$$

4. Доказать, что все корни уравнения

$$\cos^2 t = a,\ \ a \geq 0$$

могут быть записаны в виде

$$t = \pm\arccos\sqrt{a} + \pi n,\ \ n \in \mathbf{Z}.$$

Указание. Изобразить на тригонометрической окружности все точки t, для которых $\cos t = \pm\sqrt{a}$ и записать *значения* t для каждой пары точек, симметричных друг другу относительно начала координат.

5.Доказать, что уравнение

$$\sin t + \cos\alpha = 0$$

имеет общим решением значения

$$t = \alpha - \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z \quad \text{и} \quad t = -\alpha - \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z .$$

Указание. Преобразовать косинус к синусу (формула приведения) и использовать формулу сложения синусов.

4.ВЫЧИСЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ И УПРОЩЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

4.1 ОСНОВНЫЕ ТИПЫ ЗАДАЧ

4.1.1 Преобразование тригонометрических выражений от одного аргумента. В основе этих преобразований лежат «простейшие связи», изложенные в параграфе 2.2.1. Следует обратить внимание учащихся на то, что эти связи «инвариантны» по отношению к виду аргумента. Так, например, если упрощаемое выражение зависит *лишь* от аргумента вида 2α, то обычно не требуется использовать формулы тригонометрических функций двойного аргумента, а выполнять все преобразования, сохраняя исходный аргумент.

Пример. Найти $9\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha$, если $\operatorname{ctg} 2\alpha = -2\sqrt{2}$.

Анализ задачи. Простейшие связи параграфа 2.2.1 позволяют выразить значение $\sin 2\alpha$ через ctg 2α, после чего из соотношения

$$\operatorname{ctg}\ 2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$$

определится и значение $\cos 2\alpha$, а значит, и искомое произведение.

Решение. Имеем

$$\sin^2 2\alpha = \frac{1}{1+ctg^2 2\alpha}, \text{ откуда } \sin 2\alpha = \pm\frac{1}{3}, \text{ а значит } \cos 2\alpha = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Теперь определим знак искомого произведения. По условию $\operatorname{ctg} 2\alpha < 0$, тогда $\cos 2\alpha$ и $\sin 2\alpha$ имеют разные знаки, и, следовательно, значение $\cos 2\alpha\ \cdot\ \sin 2\alpha$ будет отрицательным. Получаем

$$9\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha = 9\ \cdot\ \frac{\sqrt{2}}{2}\ \cdot\ (-\frac{1}{3}\ \cdot\ \frac{2\sqrt{2}}{3}) = -2.$$

4.1.2 Задачи на формулы приведения. Следует вырабатывать у учащихся привычку уже на первом этапе решений избавляться от «балласта» в виде слагаемых, кратных числу π или его половине. Здесь учащийся должен задавать себе последовательно два вопроса: изменится ли при этом наименование функции и какой следует поставить знак перед преобразованным выражением?

Пример 1. Упростить выражение

$$A = \cos(\frac{5\pi}{2} - x) - \cos(\frac{3\pi}{2} + x) + \cos\frac{5\pi}{6}\sqrt{-3ctg(x-\pi)\cdot ctg(x-\frac{\pi}{2})}.$$

Анализ задачи. Имеется возможность исключить под знаком каждой из тригонометрических функций слагаемые, кратные π или $\frac{\pi}{2}$, после чего будет виден путь дальнейших преобразований.

Решение. Выделяя целые части в дробях $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{6}$, а затем используя 2π-периодичность синуса и косинуса, π-периодичность котангенса и формулу приведения при исключении $\frac{\pi}{2}$ (котангенс меняется на «двойственный» тангенс и при этом меняет знак), будем иметь

$$A = \cos(2\pi + \frac{\pi}{2} - x) - \cos(2\pi - \frac{\pi}{2} + x) + \cos(\pi - \frac{\pi}{6})\sqrt{-3ctg\, x\cdot(-tg\, x)} =$$

$$= \sin x - \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3} = -1{,}5.$$

Пример 2. Вычислить

$$B = \frac{\cos 64^o - 1}{\sin 16^o \cos 16^o \cos 58^o}.$$

Анализ задачи. Значение $\alpha = 64^o$ аргумента косинуса в четыре раза больше, чем 16^o; возможность использования формул пп.2.2.3-2.2.4

появится, если в знаменателе дроби произведение $\sin 16^o \cos 16^o$ преобразовать к синусу двойного угла. Далее предстоит связать получаемый аргумент 32^o со значением 58^o, а именно, представить $58^o = 90^o - 32^o$.

Решение. Имеем на основании формул 2.2.4 («сложения с единицей»)

$$B = \frac{-2(1-\cos 64^o)}{(2\sin 16^o \cos 16^o)\cos 58^o} = -\frac{4\sin^2 32^o}{\sin 32^o \cos 58^o} = -\frac{4\sin 32^o}{\cos 58^o}.$$

Теперь

$$B = -\frac{4\sin 32^o}{\cos(90^o - 32^o)} = -\frac{4\sin 32^o}{\sin 32^o} = -4.$$

4.1.3 Тригонометрические функции аргументов, отличающихся вдвое.

Если в упрощаемом выражении аргументы отличаются вдвое, то следует осуществлять переход к одному и тому же аргументу по формулам пп. 2.2.3-2.2.4, 2.2.7; так происходило в решении примера 2 п. 4.1.2.

Пример 1. Найти $A = 34\sin^4 x - 34\cos^4 x$, если $ctg\ x = \frac{1}{4}$.

Анализ задачи. Возможно непосредственное выражение четвертых степеней синуса и косинуса через значение котангенса. Другой способ состоит в преобразовании разности четвертых степеней по формуле разности квадратов, после чего возникнет формула косинуса двойного угла. Останется выразить его через значение тангенса по формуле п. 2.2.7.

Решение. Имеем

$$\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = -\cos 2x \cdot 1,$$

а тогда $A = -34\cos 2x$.

Прежде чем применить соотношения 2.2.7, воспользуемся равенством

$$tg\ x = \frac{1}{ctg\ x} = 4.$$

Теперь

$$\cos 2x = \frac{1-tg^2 x}{1+tg^2 x} = -\frac{15}{17} \text{ и, следовательно, } \quad A = -34\cos 2x = 30.$$

Пример 2. Найти $3\sin 2\alpha \cdot tg^2 \frac{\pi}{3}$, если $\cos(\frac{5\pi}{4} - \alpha) = -\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Анализ задачи. Значение $\sin 2\alpha$, как удвоенное произведение синуса с косинусом , может возникнуть при рассмотрении квадрата суммы или разности $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$. Следовательно, попытаемся на основании данных задачи определить, чему равна эта сумма (разность).

Решение. Преобразуем косинус разности:

$$\cos(\pi + \frac{\pi}{4} - \alpha) = -\frac{\sqrt{2}}{3} \qquad \text{или} \quad \cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{3},$$

откуда

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3} \quad \text{т.е.} \qquad \cos\alpha + \sin\alpha = \frac{2}{3}.$$

Как отмечено в анализе задачи, имеет смысл возвести в квадрат обе части последнего равенства (получаемое при этом равенство остается верным при всех значениях α, при которых было верно последнее из соотношений) :

$$(\cos\alpha)^2 + 2\sin\alpha\cos\alpha + (\sin\alpha)^2 = \frac{4}{9}, \text{ или } \quad 1 + \sin 2\alpha = \frac{4}{9}.$$

Теперь $\sin 2\alpha = -\frac{5}{9}$, и, следовательно, $3\sin 2\alpha \cdot tg^2 \frac{\pi}{3} = -5$.

4.2 ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

4.2.1 Вычисления значений тригонометрических функций.

1)Вычислить $\sqrt{800} \cdot \cos(x - 135^o)$, если $\cos x = \frac{7}{25}, \quad -90^o < x < 0^o$.

2) Вычислить $\sin 212^o \cos 2^o + \cos 212^o \sin 182^o$.

3)Вычислить $\dfrac{\sqrt{2}+\cos 75^\circ-\cos 15^\circ}{\sin 135^\circ}$.

4)Найти tg α, если tg 2α = $\dfrac{4}{3}$ и sin 2α<0 .

5)Найти 100 cos(2α – 3π), если sin α =$\dfrac{3}{5}$.

6)Найти tg (2α+ $\dfrac{3\pi}{4}$), если ctg α =$\dfrac{1}{3}$.

7)Вычислить 10 cos 3α, если 2ctg $\dfrac{3\alpha}{2}$ =1.

8)Найти tg^{2}α, если α – любой корень уравнения 2sin^{2}α – 1 = cos 2α.

9)Найти 12 sin(α + $\dfrac{\pi}{3}$), если 3cos($\dfrac{\pi}{6}$– α) = 1.

10) Вычислить $(1-\cos 630^o-2\sin^2 31^o-2\sin 44^o\cdot\cos 16^o)^2$.

11) Вычислить $\mathrm{tg}\dfrac{11\pi}{12}+\mathrm{ctg}\dfrac{11\pi}{12}$.

12) Вычислить $26\cos x$, если 2,5 $\sin 2x-12\sin^2 x=0,\ \ x\in(-\pi,-\dfrac{\pi}{2})$.

4.2.2 Упростить следующие тригонометрические выражения:

1) $\dfrac{ctg\alpha}{1-ctg^2\alpha}\cdot\dfrac{tg^2\alpha-1}{tg\alpha}$;

2) $\dfrac{1}{(1+tg^2\alpha)\cos 60^o}+\dfrac{1}{(1+ctg^2\alpha)\sin 30^o}$;

3) $\sin^2 2(\alpha-\dfrac{\pi}{4})+4\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

4) $\dfrac{tg\alpha+tg\left(225^0-\alpha\right)}{tg\alpha\ tg\left(405^0-\alpha\right)-1}$;

5) $\left(\left(\frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos 3\alpha}{\cos \alpha}\right) \sec 2\alpha\right.$;

6) $\frac{1+\sin 2x}{\cos 2x} - \frac{1+tg\, x}{1-tg\, x}$;

7) $\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)} \cdot tg\left(x-\frac{2\pi}{3}\right) \cdot tg^2 \frac{2\pi}{3}$;

8) $\frac{(\sin\alpha+\sin\beta)^2+(\cos\alpha+\cos\beta)^2}{2\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}}$.

5. ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

5.1 ОСНОВНЫЕ ТИПЫ ЗАДАЧ

5.1.1 Непосредственные вычисления значений обратных функций. Решения простейших заданий основаны непосредственно на определениях 2.3.1-2.3.2.

Пример 1 . Найти сумму двух последовательных чисел, между которыми находится корень уравнения.

$$2arcctg(2x+4)=arcctg(-\frac{\sqrt{3}}{3}).$$

Анализ задачи. Значение арккотангенса в правой части равенства может быть вычислено, после чего сможем определить значение аргумента 2*x*+4.

Решение. На основании свойств арккотангенса (см. п.2.3.3) имеем

$$2arcctg(2x+4)=\pi-arcctg\frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ откуда } arcctg(2x+4)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}$$

и, по определению арккотангенса, $2x+4=ctg(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6})$. Согласно формуле приведения, получим $2x+4=ctg\frac{\pi}{6}$, и теперь $x=\frac{\sqrt{3}}{2}-2$, $x=\frac{1{,}7...}{6}-2$, т.е. $x=0{,}2...-2$.

Таким образом, корень уравнения находится между числами -2 и -1, сумма которых равна -3.

Пример 2. Указать номер наименьшего из чисел

$$1)\ arctg\frac{1}{\sqrt{3}},\ \ 2)\ arcsin\frac{1}{\sqrt{2}},\ \ 3)\ arctg\frac{1}{7},\ \ 4)\ arcctg7\sqrt{2},\ \ 5)\ arcctg\,9.$$

Анализ задачи. Первое и второе значения могут быть найдены непосредственно (они стандартны); далее следует сравнить значения арккотангенсов, после чего уже выбираем наименьшее из данных чисел. При этом помним, что функции $y=arctg\,x$ и $y=arcctg\,x$ – монотонны (возрастающая и убывающая, соответственно).

Решение. Сравниваем арктангенсы:

$$arctg\frac{1}{7} < arctg\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{4} = \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, среди трех выбранных чисел наименьшим будет $arctg\frac{1}{7}$.

Далее, $arcctg 7\sqrt{2} = arcctg\sqrt{98} < arcctg\sqrt{81} = arcctg\, 9$, т.е. среди арккотангенсов наименьшим будет $arcctg 7\sqrt{2}$.

Остается сравнить $\alpha = arctg\frac{1}{7}$ и $\beta = arcctg 7\sqrt{2}$. Удобно, воспользовавшись определениями соответствующих функций, перейти к рассмотрению тангенсов. Имеем $tg\alpha = \frac{1}{7}$ и $ctg\beta = 7\sqrt{2}$, а тогда $tg\beta = \frac{1}{7\sqrt{2}}$. Теперь $tg\beta < tg\alpha$, и, следовательно, $\beta < \alpha$, поскольку функция $y = tg\, x$ является возрастающей.

Итак, наименьшим из данных чисел будет $\beta = arcctg 7\sqrt{2}$.

Ответ: 4.

Пример 3. Решить уравнение

$$\arccos\frac{x}{4} + 4\arcsin\frac{x}{4} = \pi.$$

Анализ. Левая часть уравнения может быть существенно упрощена с помощью свойства $\arcsin t + \arccos t = \frac{\pi}{2}$ (см. п. 2.3.5), после чего достаточно будет использовать определения п. 2.3.1.

Решение. Запишем уравнение в виде

$$(\arccos\frac{x}{4} + \arcsin\frac{x}{4}) + 3\arcsin\frac{x}{4} = \pi \quad \text{или} \quad \frac{\pi}{2} + 3\arcsin\frac{x}{4} = \pi,$$

откуда $\arcsin\frac{x}{4} = \frac{\pi}{6}$. Теперь по определению арксинуса имеем $\frac{x}{4} = \sin\frac{\pi}{6}$, а значит $x = 2$.

5.1.2 Суперпозиции типа "обратная функция от тригонометрической". Преобразования таких суперпозиций основаны на соотношениях п.2.3.4.

Пример 1. Вычислить (в радианах) значение $A = 36\pi + 9arctg(tg\,\frac{107}{9})$.

Анализ. Аргумент тангенса $\alpha = \frac{107}{9} = 11\frac{8}{9}$ не содержится во множестве значений арктангенса, т.е. в интервале $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Следовательно, применение соотношений п.2.3.4 будет возможно только после использования соответствующей формулы приведения.

Решение. Воспользовавшись периодичностью тангенса, выберем целое число k так, чтобы аргумент тангенса, уменьшенный на $k\pi$, содержался в интервале $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$:

$$-\frac{\pi}{2} \le \frac{107}{9} - k\pi \le \frac{\pi}{2}, \quad \text{или} \qquad \frac{107}{9\pi} - \frac{1}{2} \le k \le \frac{107}{9\pi} + \frac{1}{2}.$$

Левая часть этого двойного неравенства есть число, заключенное между 3 и 4, правая – между 4 и 5. Следовательно, $k = 4$.

Имеем $tg\alpha = tg(\frac{107}{9} - 4\pi)$. Теперь получаем

$$A = 36\pi + 9arctg(tg(\frac{107}{9} - 4\pi)) = 36\pi + 9(\frac{107}{9} - 4\pi) = 107$$

Пример 2. Вычислить (в градусах) $\arccos(\sin 200^o)$.

Анализ задачи. Согласно п. 2.3.4 вычисления следует проводить, преобразовав $\sin 200^o$ к значению косинуса, а также учесть множество значений арккосинуса. Следовательно, начинаем с использования формул приведения.

Решение. Имеем $\sin 200^o = \sin(270^o - 70^o) = -\cos 70^o$, а тогда

$$\arccos(\sin 200^o) = \arccos(-cos70^o) = 180^o - \arccos(cos70^o) =$$
$$= 180^o - 70^o = 110^o.$$

5.1.3 Суперпозиции типа "тригонометрическая функция от обратной".

Преобразования таких суперпозиций основано на соотношениях

$$\sin(\arccos\alpha) = \sqrt{1-x^2},$$

$$\cos arctg\, x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad (5.1)$$

и т.п. Запоминание подобных формул, ввиду их многочисленности, нецелесообразно. Полезнее руководствоваться рассуждениями, которые приводят к их получению. Установим, например, (5.1). Пусть $\alpha = arctgx$, тогда, по определению арктангенса, получаем $tg\alpha = x$, причем $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Теперь $\cos arctgx = \cos\alpha \ge 0$ и, согласно п.2.2.1,

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}, \text{ т.е. } \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \text{ что и есть (5.1).}$$

Характер приведенных рассуждений может быть использован при решении следующих упражнений.

Пример 1. Вычислить $A = ctg(\frac{\pi}{4} - arctg\frac{1}{4})$.

Решение. Положим $\alpha = arctg\frac{1}{4}$, тогда $tg\alpha = \frac{1}{4}$, и теперь следует вычислить $ctg(\frac{\pi}{4} - \alpha)$. Имеем

$$A = \frac{1}{tg(\frac{\pi}{4} - \alpha)} = \frac{1 + tg\frac{\pi}{4} \cdot tg\,\alpha}{tg\frac{\pi}{4} - tg\alpha} = \frac{5}{3}.$$

Пример 2. Вычислить $A = \sin(2\arccos(-0{,}6))$.

Решение. Согласно свойствам арккосинуса имеем $A = \sin(2(\pi - \arccos 0{,}6))$. Положив $\alpha = \arccos 0{,}6$, так что $\cos\alpha = 0{,}6$, вычисляем

$$A=\sin(2\pi-2\alpha)=-\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=2\sqrt{1-\cos^2\alpha}\cdot\cos\alpha;$$

здесь выбрано неотрицательное значение синуса ввиду того, что $\alpha\in[0,\pi]$.

Итак, $A=2\sqrt{1-0{,}6^2}\cdot 0{,}6=0{,}96$.

5.2.ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Вычислить (в радианах) $\arccos(\cos 4\pi/3)$.

2. Вычислить (в градусах) $\arcsin(\cos 585^0)$.

3. Вычислить (в градусах) $arctg(tg160^0)$.

4. Вычислить (в градусах) $arcctg(tg(-70^0))$.

5. Вычислить $\sin(100\arccos(-\frac{1}{2}))$.

6. Вычислить $\cos(260arctg(-1))$.

7. Вычислить $\arccos(-\frac{1}{\sqrt{2}})-3\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$.

8. Найти произведение двух последовательных целых чисел, между которыми находится число $2\,arctg\,\frac{1}{\sqrt{3}}+\arcsin 1$.

9. Найти корень уравнения $\arccos x=2\arcsin x$.

10. Если x_0 - корень уравнения $arctg\,x-arcctg\,x=\frac{\pi}{6}$, то число чему равно число $x_0^2-\frac{5}{3}$?

6.ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

6.1 УСЛОВИЯ РАВЕНСТВА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

6.1.1 Соотношение вида

$$\sin t = \sin z$$

равносильно совокупности равенств

$$t = z + 2\pi m,\ m \in Z,\ t = -z + (2n+1)\pi,\ n \in Z.$$

6.1.2 Уравнение вида

$$\cos t = \cos z$$

имеет своими решениями

$$t = \pm z + 2\pi n,\ n \in Z.$$

6.1.3 Соотношения вида

$$tg\, t = tg\, z,\ ctg\, t = ctg\, z$$

равносильны тому, что

$$t = z + \pi n,\ n \in Z.$$

6.1.4 Пример. Решить уравнение

$$\sin\frac{x}{2} + \cos(2x + \frac{\pi}{4}) = 0.$$

Анализ задачи. Если воспользоваться формулами приведения (вычитание аргумента из $\frac{\pi}{2}$), то задание можно свести к условию равенства синусов или косинусов.

Решение. Запишем уравнение в виде

$$\sin\frac{x}{2} + \sin(\frac{\pi}{2} - (2x + \frac{\pi}{4})) = 0 \text{ или } \sin\frac{x}{2} + \sin(\frac{\pi}{4} - 2x) = 0,$$

откуда

$$\sin\frac{x}{2} = \sin(2x - \frac{\pi}{4}).$$

Согласно условию равенства синусов, получим

$$1)\ \frac{x}{2} = 2x - \frac{\pi}{4} + 2\pi m,\ m \in Z$$

или

$$2)\ \frac{x}{2} = -2x + \frac{\pi}{4} + (2n+1)\pi,\ n \in Z\ .$$

Имеем теперь две серии решений:

$$x = \frac{\pi}{6} - \frac{4}{3}\pi m,\ m \in Z\,, \quad x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}(4n+2),\ n \in Z\,.$$

6.2 ОДНОРОДНОЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

6.2.1 Однородными уравнениями первой, второй, третьей,... степеней называются, соответственно, уравнения вида

$$A\sin x + B\cos x = 0;\ A \neq 0, B \neq 0\,,$$

$$A\sin^2 x + B\sin x\cos x + C\cos^2 x = 0;\ A \neq 0, C \neq 0\,,$$

$$A\sin^3 x + B\sin^2 x\ \cos x + C\sin x\cos^2 x + D\cos^3 x = 0;\ A \neq 0, D \neq 0;\ldots$$

Левая часть каждого из таких уравнений – так называемый однородный многочлен соответствующей степени. Его характерным признаком является одинаковость степеней одночленов (от двух аргументов - синуса и косинуса).

Важнейшим свойство однородных уравнений состоит в следующем: значения аргумента x для которых $\sin x = 0$ или $\cos x = 0$ не могут быть решениями таких уравнений. В самом деле, если, предположить, например, что $\sin x = 0$, то однородное уравнение (в результате подстановки в него значения ноль вместо $\sin x$) преобразуется к виду $\cos x = 0$, тогда как на самом деле для одних и тех же значений аргумента x обращение в ноль и синуса и косинуса - невозможно.

По указанной причине обе части уравнения можно поделить на $\cos x$ ($\sin x$) в степени, соответствующей степени уравнения, после чего получим алгебраическое уравнение относительно $tg\ x$ ($ctg\ x$).

6.2.2 Пример. Решить уравнение

$$2\sqrt{3}\cos^2\frac{x}{2} = \sin x.$$

Анализ задачи. Следует перейти к одинаковым аргументам тригонометрических функций, после чего определить, к какому из изученных стандартных типов относится это уравнение.

Решение. Перейдем к аргументу $\frac{x}{2}$:

$$2\sqrt{3}\cos^2\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0.$$

Уравнение теперь имеет вид 6.2.1 (случай второй степени), однако коэффициент перед квадратом косинуса C=0, так что прием деления пока невозможен.

В результате разложения на множители получаем

$$2\cos\frac{x}{2}(\sqrt{3}\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}) = 0,$$

откуда

$$\cos\frac{x}{2} = 0, \text{ или } \sqrt{3}\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2} = 0.$$

В первом случае $x = (2m+1)\pi,\ m \in Z$; во втором обнаруживаем однородное уравнение первой степени, которое теперь может быть решено приемом деления на $\cos\frac{x}{2}$. Имеем $tg\frac{x}{2} = \sqrt{3}$, а тогда

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi,\ n \in Z\ .$$

Ответ: $x = (2m+1)\pi,\ x = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi,\ m,n \in Z$.

6.3 ЛИНЕЙНОЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

6.3.1 Рассмотрим ***уравнение, линейное относительно синуса и косинуса*** от одного и того же аргумента:

$$A\sin x + B\cos x = C;\ \ A \neq 0, B \neq 0.$$

В случае C=0 имеем однородное уравнение первой степени, прием решения которого изложен в п. 6.2. В общем случае может быть использован один из двух следующих приемов.

6.3.2 Прием перехода к тангенсу половинного аргумента, см. п. 2.2.7. При этом отдельному рассмотрению подлежит серия значений $x = \pi + 2\pi m,\ m \in Z$, для которых не определен $tg\,\frac{x}{2}$, однако определено исходное уравнение п.6.3.1.

Пример. Решить уравнение

$$5\cos 3x + 2\sin 3x = -5.$$

Анализ задачи. Имеем линейное тригонометрическое уравнение, которое может быть решено приемом выражения синуса и косинуса через тангенс половинного аргумента, т.е. через $tg\,\frac{3x}{2}$.

Решение. Случай 1: $3x \neq \pi + 2\pi k,\ k \in Z$.

Имеем

$$5\frac{1 - tg^2\frac{3x}{2}}{1 + tg^2\frac{3x}{2}} + 2\frac{2tg\frac{3x}{2}}{1 + tg^2\frac{3x}{2}} = -5.$$

Если положить $t = tg\,\frac{3x}{2}$, то получим уравнение

$$5\frac{1 - t^2}{1 + t^2} + 2\frac{2t}{1 + t^2} = -5,$$

преобразуемое к виду $4t = -10$, откуда $t = -\frac{5}{2}$. Следовательно, $tg\,\frac{3x}{2} = -\frac{5}{2}$, а значит

$$x = -\frac{2}{3} arctg\,\frac{5}{2} + \frac{2\pi n}{3},\ n \in Z.$$

Случай 2: $3x = \pi + 2\pi k$ или $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3},\ k \in Z.$ Подставляя эти значения в исходное уравнение, получаем $5\cos(\pi + 2\pi k) + 2\sin(\pi + 2\pi k) = -5$, что представляет собою тождество $5(-1) + 2 \cdot 0 = -5$. Значит, указанная в втором случае серия значений аргумента также служит ответом.

Ответ: $x = -\frac{2}{3} arctg\,\frac{5}{2} + \frac{2\pi n}{3},\ n \in Z$, $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3},\ k \in Z$.

6.3.3 Прием решения линейного тригонометрического уравнения методом введения вспомогательного аргумента. В основе этого метода лежит преобразование линейного тригонометрического выражения к так называемой простейшей гармонике:

$$A\sin x + B\cos x = \sqrt{A^2 + B^2}\,\sin(x + \gamma),$$

где вспомогательный аргумент γ выбран так, чтобы

$$\cos\gamma = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}},\ \sin\gamma = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Указанный выбор возможен, поскольку

$$\cos^2\gamma + \sin^2\gamma = \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right)^2 + \left(\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right)^2 = 1.$$

Линейное тригонометрическое уравнение (см. п. 6.3.1) теперь приобретает вид простейшего:

$$\sqrt{A^2 + B^2}\,\sin(x + \gamma) = C.$$

Пример. Решить уравнение

$$\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2\sin 2x.$$

Анализ задачи. Левая часть уравнения есть линейное тригонометрическое выражение; хотя уравнение линейным не является, можно попытаться преобразовать левую часть к простейшей гармонике.

Решение. Согласно п.6.3.3 имеем

$$\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}\,\sin(x+\gamma).$$

Следовательно, уравнение преобразуется к виду

$$2\sin(x+\gamma) = 2\sin 2x, \text{ где } \cos\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\gamma = \frac{1}{2};$$

указанные соотношения выполнены, например, для $\gamma = \frac{\pi}{6}$. Теперь

$$\sin(x+\frac{\pi}{6}) = \sin 2x,$$

т.е. мы пришли к уравнению стандартного вида (п. 6.1.1). Итак, имеем две серии решений:

$$1)\ x+\frac{\pi}{6} = 2x + 2\pi m \text{ или } x = \frac{\pi}{6} - 2\pi m,\ m\in Z;$$

$$2)\ x+\frac{\pi}{6} = -2x + (2n+1)\pi, \text{ откуда } \quad x = -\frac{\pi}{18} + \frac{(2n+1)\pi}{3},\ n\in Z.$$

6.4. СИСТЕМЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

6.4.1 Здесь комбинируют ***методы решения алгебраических систем*** (метод подстановки, алгебраического сложения, замены переменных и т.д.) ***и уравнений с тригонометрическими (или обратными тригонометрическими) функциями.*** Имеющееся своеобразие продемонстрируем на следующих примерах.

6.4.2 Пример 1. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{\sqrt{3}}{4}, \\ \cos x \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{4}. \end{cases}$$

Анализ задачи. Произведения синусов и косинусов – компоненты формул косинуса суммы или разности. Поэтому имеет смысл выполнить сложение и вычитание уравнений.

Решение. В результате сложения и вычитания уравнений приходим к следующей системе :

$$\begin{cases} \cos(x-y)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos(x+y)=0. \end{cases}$$

Каждое уравнение – простейшее; в результате решения получаем:

$$x+y=\frac{\pi}{2}+\pi m,\ \ x-y=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ \ m,n\in Z\,.$$

Имеем два следующих случая.

$$1)\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{2}+\pi m, \\ x-y=\dfrac{\pi}{6}+\pi n, \end{cases} \qquad m,n\in Z\,.$$

Снова выполняя операции сложения и вычитания уравнений, получаем

$$\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{2}(m+n), \\ y=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{2}(m-n), \end{cases} \qquad m,n\in Z.$$

2)Решая систему уравнений

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{2}+\pi m, \\ x-y=-\dfrac{\pi}{6}+\pi n, \end{cases} \qquad m,n\in Z,$$

имеем

$$\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{2}(m-n), \\ y=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{2}(m+n), \end{cases} \qquad m,n\in Z.$$

Полученные в обоих случаях пары серий значений и служат ответом.

Пример 2. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \sin\dfrac{x}{2} = \sin 2y, \\ \cos\dfrac{x}{2} = \sin y, \end{cases}$$

удовлетворяющие условию

$$\sin y > \frac{1}{2}.$$

Анализ задачи. Возможный путь решения состоит в использовании условий равенства синусов. Другой путь – в получении уравнения-следствия путем возведения в квадрат каждого уравнения системы и последующего их сложения; при этом надо будет проследить, чтобы не получилось посторонних решений. Изберем последний путь.

Решение. Возведем в квадрат обе части каждого уравнения и сложим полученные уравнения. Имеем

$$\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} = \sin^2 2y + \sin^2 y \text{ или } 4\sin^2 y\cos^2 y + \sin^2 y = 1.$$

Последнее уравнение приводится к виду

$$4\sin^2 y\cos^2 y - \cos^2 y = 0, \text{ откуда } 4\sin^2 y = 1, \text{ либо } \cos^2 y = 0.$$

Случай $\sin^2 y = \frac{1}{4}$ исключается условием $\sin y > \frac{1}{2}$. Остается рассмотреть случай $\cos^2 y = 0$, означающий, что $y = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$. Тогда в первом уравнении исходной системы оказывается $\sin 2y = 0$ и, одновременно с этим, $\cos\frac{x}{2} = \sin(\frac{\pi}{2} + \pi n)$. Если выбрать значения n четными, т.е. $n = 2k,\ k \in Z$, то окажется $y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ и $\cos\frac{x}{2} = 1$, в то время как $\sin\frac{x}{2} = 0$. Отсюда $x = 4\pi n,\ n \in Z$.

Если же $n = 2k - 1,\ k \in \mathrm{Z}$, то $y = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$ и в заданной системе оказывается $\sin\dfrac{x}{2} = 0,\ \ \cos\dfrac{x}{2} = -1$; следовательно, $x = 2\pi + 4\pi n,\ n \in \mathrm{Z}$.

Итак, оба равенства заданной системы выполнены, если

$$\begin{cases} x = 4\pi n, \\ y = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \end{cases} \quad k, n \in \mathrm{Z},$$

а также если

$$\begin{cases} x = 2\pi + 4\pi n, \\ y = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \end{cases} \quad k, n \in \mathrm{Z}.$$

6.5 ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

6.5.1 Стандартные неравенства.

Пример 1. Найти область определения функции

$$y = \lg(\sin\sqrt{x})$$

Анализ задачи. Поскольку аргумент логарифма должен быть положителен, задание приводится к неравенству стандартного вида $\sin t > 0$ (см. п. 2.4.3).

Решение. Имеем одновременно $x > 0,\ \ \sin\sqrt{x} > 0.$

Последнее тригонометрическое неравенство равносильно следующему: $2k\pi < \sqrt{x} < (2k+1)\pi$; ввиду положительности квадратного корня целые значения параметра k должны удовлетворять условиям $2k+1 > 0$, так что $k = 0, 1, \ldots$.

Теперь полученное двойное неравенство может быть возведено в квадрат:

$$4k^2\pi^2 < x < (2k+1)^2\pi^2,\ k = 0, 1, \ldots.$$

Этими значениями x и определяется область существования данной функции.

Пример 2. Найти длину промежутка всех решений неравенства $2\cos x > -\sqrt{3},$ удовлетворяющих условию $\frac{3\pi}{2} < x < 3\pi$.

Анализ задачи. Неравенство приводится к стандартному виду; найдя серию промежутков его решений, мы сможем определить пересечение полученного множества с интервалом $(\frac{3\pi}{2}, 3\pi)$.

Решение. Записав неравенство в виде $\cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2},$ и применив формулу решения соответствующего стандартного неравенства (см. п. 2.4.4), получим $-\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + 2\pi k < x < \arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + 2\pi k,\ k \in \mathrm{Z}$.

или

$$\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} - \pi + 2\pi k < x < \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi k,$$

так что

$$-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k.$$

Получаем следующую серию интервалов:

...

$$-\frac{5\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6} \quad \text{– при } k = 0;$$

$$\frac{7\pi}{6} < x < \frac{17\pi}{6} \quad \text{– при } k = 1;$$

$$\frac{19\pi}{6} < x < \frac{29\pi}{6} \quad \text{– при } k = 2;$$

...

Поскольку $\frac{7\pi}{6} < \frac{3\pi}{2} < \frac{17\pi}{6} < 3\pi < \frac{19\pi}{6}$, то пересечение множества решений с промежутком $(\frac{3\pi}{2}, 3\pi)$ есть $(\frac{3\pi}{2}, \frac{17\pi}{6})$.

Длина полученного промежутка есть число $\frac{4\pi}{3}$.

6.5.2 Более сложные неравенства. Они могут быть решены комбинацией нескольких приемов. Продемонстрируем это на примере следующего задания.

Пример. Решить неравенство

$$tg\, x \cdot tg\, 3x < -1$$

Анализ задачи. Правая часть отлична от нуля, поэтому «напрямую» метод интервалов неприменим. Можно попытаться преобразовать тангенсы к синусам и косинусам в надежде, что после соответствующих упрощений прояснится путь решения.

Решение. Запишем область определения неравенства:

$$\cos x \cdot \cos 3x \neq 0.$$

Преобразуя тангенсы, имеем

$$\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin 3x}{\cos 3x} + 1 < 0, \text{ или } \frac{\cos(3x - x)}{\cos x \cdot \cos 3x} < 0.$$

Поскольку в числителе возникло выражение $\cos 2x$, то и знаменатель выразим через $\cos 2x$:

$$\cos x \cdot \cos 3x = \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x) = \frac{1}{2}(2\cos^2 2x - 1 + \cos 2x).$$

В силу полученного тождества область определения теперь может быть записана в виде условия

$$2\cos^2 2x + \cos 2x - 1 \neq 0.$$

Итак, решаем неравенство

$$\frac{\cos 2x}{2\cos^2 2x + \cos 2x - 1} < 0;$$

положим теперь $t = \cos 2x$, $t \in [-1, 1]$ и применим метод интервалов.

Нули знаменателя дроби, записанной в левой части неравенства

$$\frac{t}{2t^2+t-1}<0:$$

– это точки числовой оси $t_1=-1,\ t_2=\frac{1}{2}$; исключив эти точки, мы уже учтем область определения исходного неравенства. Числитель же обратится в ноль в точке $t=0$. Дробь оказывается отрицательной при

$$t\in(-\infty,-1),\ t\in(0,\frac{1}{2}).$$

Принимая во внимание, что $t\in[-1,1]$, получим $0<t<\frac{1}{2}$, или $0<\cos 2x<\frac{1}{2}$. Последнему условию удовлетворяют все точки τ $(\tau=2x)$ тригонометрической окружности между $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{2}$ или между $-\frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{3}$. С учетом периодичности косинуса получим, что

$$2\pi m-\frac{\pi}{2}<2x<2\pi m-\frac{\pi}{3},\ 2\pi n+\frac{\pi}{3}<2x<\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ m,n\in \mathrm{Z}.$$

Итак,

$$x\in(\pi m-\frac{\pi}{4},\ \pi m-\frac{\pi}{6})\cup(\pi n+\frac{\pi}{6},\ \pi n+\frac{\pi}{4}),\ m,n\in \mathrm{Z}.$$

6.6 ЗАДАЧИ ЕГЭ (группы В и С).

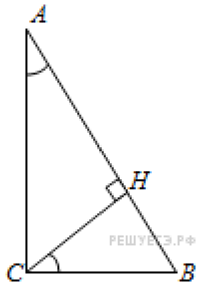
Настоящие задачи заимствованы из открытого банка заданий ЕГЭ (сайты http://mathege.ru/ и http://reshuege.ru/ .

Приводимые здесь их решения могут послужить «генератором» наводящих соображений для решения аналогичных задач.

Тип В8. Тригонометрические соотношения в прямоугольном треугольнике.

Пример 1. В треугольнике *ABC* угол *C* равен 90°, *CH* — высота, *AB*=18,

$\cos A = \frac{1}{3}$. Найти BH.



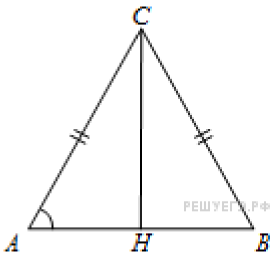
Решение. Углы A и $\gamma = HCB$ равны как углы со взаимно перпендикулярными сторонами. Следовательно, $HB = CB\sin\gamma$.

Теперь предстоит найти CB и $\sin\gamma$. Поскольку угол γ –острый, то

$$\sin^2\gamma = 1 - \cos^2\gamma = \frac{8}{9}.$$

Далее, $CB = AB\sin\gamma$, а значит $HB = CB\sin\gamma = AB\sin^2\gamma = 18\cdot\frac{8}{9} = 16.$

Пример 2. В треугольнике ABC $AC=BC=2{,}6$, $\operatorname{tg} A = \frac{12}{5}$. Найти AB.



Решение. Треугольник ABC равнобедренный, значит, высота CH делит основание AB пополам. Тогда

$$AB = 2AH = 2AC\cos A = 5{,}2\cos A.$$

Поскольку угол A – острый, то из тригонометрического тождества

$$1 + tg^2 A = \frac{1}{\cos^2 A}$$

найдем $\cos A$ в виде

$$\cos A = \sqrt{\frac{1}{1 + tg^2 A}} = \frac{12}{13}.$$

Значит, $AB = 5{,}2\cdot\frac{12}{13} = 4{,}8$.

Тип В7. Решения простейших тригонометрических уравнений. Отбор корней

Пример 1. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4} = -1.$$

В ответе записать наибольший отрицательный корень.

Решение. По формуле решения простейшего уравнения с тангенсом (п. 2.4.2) имеем

$$\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4} = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi x}{4} = -\frac{\pi}{4} + \pi k \Leftrightarrow x = -1 + 4k, k \in Z.$$

Отрицательными значения x будут при $-1+4k<0$ или $k<\frac{1}{4}$. При наибольшем таком целом k , а именно, $k=0$ имеем наибольший отрицательный корень $x=-1$.

Пример 2. Найти корни уравнения

$$\cos\frac{\pi(x-7)}{3} = \frac{1}{2}.$$

В ответ записать наименьший положительный корень.

Решение. По формуле решения простейшего уравнения с косинусом (п. 2.4.2) последовательно имеем

$$\cos\frac{\pi(x-7)}{3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi(x-7)}{3} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n \Leftrightarrow x-7 = \pm 1 + 6n \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 8+6n; \\ x = 6+6n,\ n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

В первой серии решений $8+6n>0$, то есть $n>-1\frac{1}{3}$ а во второй $6+6n>0$ или $n>-1$. Наименьшим положительным корнем в первой серии будет $x=2$ (случай $n=-1$), а во второй $x=6$ (при $n=0$)

Среди найденных корней наименьшим положительным значением будет число 2.

Тип В11. Преобразования и вычисления значений тригонометрических выражений

Пример 1. Найти -5 cos α, если известно, что

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{51}}{10};\ \alpha \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$$

Решение. Синус и косинус одного и того же аргумента связаны основным тригонометрическим тождеством Поскольку аргумент α содержится в первой координатной четверти, то получаемое значения косинуса будет положительным. Итак,

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{51}{100} + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{49}{100} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{7}{10} = 0{,}7$$

Теперь $-5\cos\alpha = -3{,}5$.

Пример 2. *Вычислить значение* $\dfrac{\cos 54^o \cos 36^o}{5\sin 72^o}$.

Решение. Заметив, что в знаменателе дроби цулксообразно использовать формулу синуса двойного аргумента, получим

$$\frac{\cos 54^o \cos 36^o}{5\sin 72^o} = \frac{\cos 54^o \cos 36^o}{10\sin 36^o \cos 36^o} = \frac{\cos(90^o - 36^o)}{10\sin 36^o} = \frac{\sin 36^o}{10\sin 36^o} = 0{,}1$$

Пример 3. Найти $\operatorname{tg}^2\alpha$, если $5\sin^2\alpha + 13\cos^2\alpha = 6$.

Решение. Левая часть данного нам равенства – однородный многочлен второй степени (см. п. 6.2.1). Если бы правая часть была равна нулю, то был бы применим прием относящийся к однородным тригонометрическим уравнениям – деление обеих частей на квадрат косинуса, т.е. переход к тангенсам. В силу указанных соображений представим число 6 в виде $6\cdot 1$, и запишем множитель 1 как «тригонометрическую единицу». Будем иметь:

$$5\sin^2\alpha + 13\cos^2\alpha = 6 \Leftrightarrow 5\sin^2\alpha + 13\cos^2\alpha = 6(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ -\sin^2\alpha = -7\cos^2\alpha \Leftrightarrow \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 7 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2\alpha = 7$$

Ответ: 7.

ТИП В12. «Реальная» математика

Пример1. Датчик сконструирован таким образом, что его антенна ловит радиосигнал, который затем преобразуется в электрический сигнал, изменяющийся со временем по закону

$$U = U_0 \sin(\omega t + \varphi),$$

где t – время в секундах, амплитуда $U_0 = 2$ В, частота $\omega = 120°$/с, фаза $\varphi = -30°$. Датчик настроен так, что если напряжение в нем не ниже чем 1 В, загорается лампочка. Какую часть времени (в процентах) на протяжении первой секунды после начала работы лампочка будет гореть?

Решение. Задача сводится к решению уравнения $U_0 \sin(\omega t + \varphi) = 1$ при заданных значениях амплитуды сигнала, частоты и фазы:

$$2\sin(120°t - 30°) = 1 \Leftrightarrow \sin(120°t - 30°) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 120°t - 30° = 30° + 360°n \\ 120°t - 30° = 150° + 360°n, n \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 120°t = 60° + 360°n \\ 120°t = 180° + 360°n, n \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2t = 1 + 6n \\ 2t = 3 + 6n, n \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \underset{t<1}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{2}, \\ t = \frac{3}{2}. \end{array}\right.$$

На протяжении первой секунды лампочка будет гореть $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 0,5$ с, то есть 50% времени.

Ответ: 50.

Пример 2. Небольшой мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Максимальная высота полета мячика, выраженная в метрах, определяется формулой

$$H = \frac{v_0^2}{4g}(1 - \cos 2\alpha),$$

где $v_0 = 20$ м/с – начальная скорость мячика, а g – ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с^2). При каком наименьшем значении угла α (в градусах) мячик пролетит над стеной высотой 4 м на расстоянии не менее1 м?

Решение. Согласно условию, максимальная высота полета должна быть не менее 4+1=5 м. Значит, задача сводится к решению неравенства $H \geq 5$ на интервале $(0°;\ 90°)$, поскольку угол α - острый. Начальная скорость $v_0 = 20$ м/с и ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2 - заданы. Имеем:

$$\frac{20^2}{40}(1-\cos 2\alpha) \geq 5 \Leftrightarrow 1-\cos 2\alpha \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2\alpha \leq \frac{1}{2} \underset{0^\circ<2\alpha<180^\circ}{\Leftrightarrow}$$

$$\underset{0^\circ<2\alpha<180^\circ}{\Leftrightarrow} 60^\circ \leq 2\alpha < 180^\circ \underset{0^\circ<\alpha<90^\circ}{\Leftrightarrow} 30^\circ \leq \alpha < 90^\circ.$$

Следовательно, наименьший угол равен 30 градусам.

Тип B15. Элементы исследования функций

Для решения следующих задач учащемуся следует повторить алгоритмы исследования (на экстремумы и на наибольшее и наименьшее значения) функций с помощью производных

Пример 1. Найти наименьшее значение функции $y = 6\cos x + \frac{24}{\pi}x - 2$ на отрезке $[-\frac{2\pi}{3}, 0]$.

Решение. Имеем $y' = -6\sin x + \frac{24}{\pi}$ и $y' = 0$, если $\sin x = \frac{4}{\pi}$. Последнее уравнение не имеет решений; следовательно, производная знакопостоянна на указанном отрезке. Ясно, что $y' > 0$, а поэтому данная функция возрастает на $[-\frac{2\pi}{3}, 0]$ и ее наименьшее значении достигается, следовательно, в точке $-\frac{2\pi}{3}$:

$$y_{наименьшее} = y(-\frac{2\pi}{3}) = 6\cos(-\frac{2\pi}{3}) - \frac{24}{\pi}\cdot\frac{2\pi}{3} - 2 = -3 - 16 - 2 = -21.$$

Пример 2. Найдите точку максимума функции

$$y = (2x-3)\cos x - 2\sin x + 5,$$

принадлежащую промежутку $(0, \frac{\pi}{2})$.

Решение. Найдем производную заданной функции:

$$y' = 2\cos x + (3-2x)\sin x - 2\cos x = (3-2x)\sin x.$$

Стационарные точки определяются нулями производной. Но на заданном промежутке (первая четверть без граничных точек) синус принимает только положительные значения. Поэтому возможно только $3-2x=0$, и следовательно, $x=1{,}5$.

Определим теперь знаки производной в каждом из двух интервалов, разделяемых полученной стационарной точкой. Имеем: $y'>0$ при $x<1{,}5$ и $y'<0$ при $x>1{,}5$. Следовательно, искомая точка максимума $x=1{,}5$.

Ответ: 1,5.

Тип С1. *Отбор решений тригонометрических уравнений и их систем (повышенный уровень сложности)*

Пример 1. Решите уравнение $1/\cos^2 x + 3\operatorname{tg} x - 5 = 0$. Найти корни, принадлежащие отрезку $[-\pi; \pi/2]$.

Решение. Используя простейшие связи 2.2.1 между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента, запишем уравнение в тангенсах:

$$(\operatorname{tg}^2 x+1)+3\operatorname{tg} x-5=0 \text{ или } \operatorname{tg}^2 x+3\operatorname{tg} x-4=0.$$

Получили квадратное уравнение относительно tg x, решая которое, получим tg x=1 или tg x= –4. Следовательно, $x=\pi/4+\pi k$ или $x=-\operatorname{arctg}4+\pi k$. При этом значение arctg4 принадлежит первой координатной четверти. Следовательно, во второй серии корней при k=0 получим $x=-\operatorname{arctg}4$, который содержится в отрезке $[-\pi; \pi/2]$, а при все остальных целых значениях k значения корней выходят за границы этого отрезка. Аналогично получаем из первой серии содержащимися в $[-\pi; \pi/2]$ значения $x=-3\pi/4$ и $x=\pi/4$.

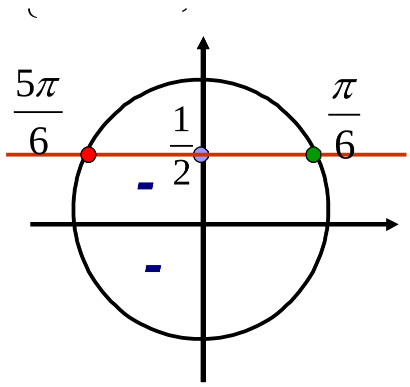
Ответ: $-3\pi/4$, $-\operatorname{arctg}4$, $\pi/4$.

Пример 2. Найти все корни уравнения $\dfrac{2\sin x-1}{\sqrt{-\cos x}}=0$

Решение. Учитывая область определения уравнения, получаем:

$$\begin{cases} \sin x = \dfrac{1}{2} \\ \cos x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = (-1)^k \cdot \dfrac{\pi}{6} + \pi k, \\ \cos x < 0. \end{cases}$$



На рисунке изображены точки, в которых значения синуса равны $\frac{1}{2}$. В силу условия $\cos x < 0$ получаем

$$\textit{Ответ}: \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z.$$

Пример 3. Решить уравнение:

$$\frac{2\sin^2 x - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 1}{\sqrt{\sin x}} = 0.$$

Решение. Аналогично предыдущему заданию, с учетом области определения уравнения, получаем цепочку следующих равносильных систем:

$$\begin{cases} 2\sin^2 x - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 1 = 0, \\ \sin x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0, \\ \sin x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos x = 1, \\ \cos x = -\frac{1}{2}, \end{array} \right. \\ \sin x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2\pi k, \\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \end{array} \right. \\ \sin x > 0 \end{cases}$$

Тригонометрическая функция «синус» положительна в первой и второй координатной четвертях, поэтому из полученных серий выбираем только эту: $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k.$

Пример 4. Решить уравнение

$$\sqrt{1 - 2\sin 3x \sin 7x} = \sqrt{\cos 10x}.$$

Решение. Данное уравнение эквивалентно следующей системе:

$$\begin{cases} 1-2\sin 3x \sin 7x = \cos 10x, \\ \cos 10x \geqslant 0. \end{cases}$$

Условие $1-2\sin 3x\sin 7x \geqslant 0,$ возникающее при рассмотрении левой части уравнения, здесь будет излишним, поскольку соответствующее (равное левой части неравенства) выражение $\cos 10x$ уже сделано неотрицательным

Решаем уравнение, содержащееся в системе:

$$1-2\sin 3x\sin 7x = \cos(7x+10x) \Leftrightarrow$$

$$1-2\sin 3x\sin 7x = \cos 3x\cos 7x - \sin 3x \sin 7x \Leftrightarrow$$

$$1 = \cos 3x \cos 7x + \sin 3x \sin 7x \Leftrightarrow \cos 4x = 1.$$

Теперь $4x = 2\pi k$, откуда $x = \dfrac{\pi k}{2}, k \in Z$.

Значения $\cos 10x \geq 0$, если $10x$ или $5\pi k$ содержится в первой или четвертой координатных четвертях (включая граничные точки). В свою очередь при целых k это возможно лишь если k четно, а значит $k = 2n,\ n \in Z$. Теперь $x = \pi n,\ n \in Z.$

Ответ: $x = \pi n,\ n \in Z.$

Пример 5. Решить систему уравнений

–

Решение. Первое уравнение преобразуется к цепочке равенств следующего вида

$$16^{\cos x} - 10\cdot 4^{\cos x} + 16 = 0 \Leftrightarrow \left(4^{\cos x} - 8\right) = 0 \Leftrightarrow 4^{\cos x} = 2$$

$$(\text{так как } 4^{\cos x} \leq 4) \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z\ .$$

Рассмотрим теперь два возможных случая:

а) $x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n \Rightarrow \sin x > 0$, а тогда уравнение $\sqrt{y} + 2\sin x = 0$ не может иметь решений;

б) во втором случае система преобразуется к виду

$$x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n \Rightarrow \sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\sqrt{y}-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=0 \Leftrightarrow \sqrt{y}=\sqrt{3} \Leftrightarrow y=3.$$

Итак, $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n$ $(n\in Z)$, y=3 .

6.7 ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Чему равна сумма корней уравнения $3\sin^2 x+\cos^2 x=1$ в промежутке $(-3\pi,0)$?

2. Каково количество корней уравнения $\sin 4(x-\pi)=3\sin(9\pi-2x)$ в промежутке $(-\pi,\ \pi)$?

3. Каково количество уравнения $\sin x+\sin 5x-\sqrt{3}\cos 2(\pi-x)=0$ в промежутке $[-100^0,0^0]$?

4. Найти все корни уравнения $\sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}-1}+ctg^2 x=2$ в промежутке $[-180^0,270^0]$.

5. Решить уравнение $\sin x+\cos 3x=0$.

6. Найти количество корней уравнения $\frac{1}{\pi x-x^2}(tg\ x-tg\ 2x)=0$ в промежутке $[0,2\pi)$.

7. Чему равна сумма (вычисленная в градусах) наибольшего и наименьшего корней уравнения $\cos\frac{7\pi}{6}\cdot\sin 2x=\sin^2 x$, удовлетворяющих условию $x\in[0^0,200^0]$?

8. Решить уравнение $\sin^3\frac{x}{3}=3\sqrt{3}\cos^3\frac{x}{3}$.

9. Решить неравенство $0{,}24^{2\cos x}\le 0{,}0576$.

10. Найти множество всех решений неравенства $0,7^{\sin x} \leq 0,7^{\cos x}$, заключенных в промежутке $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$.

7. ЗАДАНИЯ ПОВЫШЕННОГО И ВЫСОКОГО УРОВНЯ СЛОЖНОСТИ

7.1.ЗАДАНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Найдите значение функции $f(2)$, если $f(\text{tg } x) = \text{tg } x + 2\cos^2 x$.

Анализ задачи. Если взять значение $tg\ x = 2$, то достаточно будет выразить правую часть заданного равенства через это значение тангенса.

Решение. Поскольку

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x}, \text{ то } f(tg\ x) = tg\ x + \frac{2}{1+tg^2 x}.$$

Теперь выбрав любое из значений x, для которого $tg\ x = 2$, получаем

$$f(2) = 2 + \frac{2}{1+2^2} \text{ или } f(2) = 2{,}4.$$

Пример 2. Найти наибольшее целое значение функции

$$y = 24\sin 2x \cdot (\sin 2x - \sin 2x) - 24\cos^2 2x.$$

Анализ задачи. Стандартного пути не просматривается; выражение содержит две различные тригонометрические функции в составе произведения и квадратов, присутствующие аргументы различны: x и $2x$. Имеет смысл начать с упрощения и в зависимости от результата выбрать путь решения.

Решение. Имеем

$$y = 24\sin 2x \sin x - 24(\sin^2 2x + \cos^2 2x)$$

или

$$y = 24(\sin 2x \sin x - 1),\ y = 24(2\sin^2 x \cos x - 1),$$

$$y = 24(2(1-\cos^2 x)\cos x - 1),$$

$$y = 24(-2\cos^3 x + 2\cos x - 1).$$

Положим $t = \cos x$, тогда $y = 24(-2t^3 + 2t - 1),\ t \in [-1,1]$. Получили задачу о нахождении наибольшего значения многочлена третьей степени на отрезке. Теперь действует стандартный алгоритм. Ищем производную $y' = 48(-3t^2 + 1)$ и ее критические точки $t_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, t_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, среди которых t_2 есть точка максимума. Наибольшее значение многочлена возможно в точках $t = \pm 1$, в которых, очевидно, $y = -24$ и точке максимума $t = t_2$ (расположенной на отрезке $[-1,1]$), в которой $y = -24 + \frac{32}{\sqrt{3}}$. Ясно, что последнее значение больше, чем –24. Итак, наибольшее значение данной функции есть

$$y = -24 + \frac{32\sqrt{3}}{3} = -24 + 18{,}17\ldots = -5{,}83\ldots,$$

а наибольшее целое значение функции равно – 6.

Пример 3. При каждом значении параметра a решить уравнение

$$\cos^4 x - (a+2)\cos^2 x = a + 3.$$

Анализ задачи. Заметим, что степени косинусов отличаются вдвое, следовательно, речь идет о нахождении корней квадратного уравнения, причем корней неотрицательных и не превосходящих единицы.

Решение. Положим $t = \cos^2 x$, ясно, что $t \in [0,1]$; теперь решаем уравнение

$$t^2 - (a+2)t - (a+3) = 0.$$

Вычисляем дискриминант D уравнения и его корни:

$$D = (a+2)^2 + 4(a+3) = a^2 + 8a + 16 = (a+4)^2,$$

$$\sqrt{D} = |a+4|,$$

$$t = \frac{a + 2 \pm (a+4)}{2}.$$

Имеем $t_1 = a+3,\ t_2 = -1$, и при этом $t \in [0,1]$, так что случай $t_2 < 0$ здесь невозможен. В первом же случае надо учесть , что $0 \le a+3 \le 1$.

Итак, при каждом $a \in [-3,-2]$ получаем $\cos^2 x = a+3$, откуда

$$\cos x = \pm\sqrt{a+3}\ ,$$

а значит (см. теоретическое упражнение № 4 п.3.4)

$$x = \pm\arccos\sqrt{a+3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}\ .$$

Ответ: $x = \pm\arccos\sqrt{a+3} + \pi n\ ,\ n \in \boldsymbol{Z}$, при каждом $a \in [-3,-2]$.

Пример 4. Решить неравенство

$$\log_2(1+\cos 4x) \le 1 + \log_{\sqrt{2}} \sin x\,.$$

Анализ задачи. Решение следует проводить на области определения неравенства. Имеется возможность привести логарифмы к одному основанию *a*=2. После этого переходим к простейшему логарифмическому неравенству и рассмотрение сведется к тригонометрическому неравенству. При этом возникнет надобность перехода к одному аргументу тригонометрических функций.

Решение. 1. Логарифмы определены, если одновременно выполнены условия

$$1+\cos 4x > 0,\ \ \sin x > 0.$$

В первом случае получаем:

$$\cos 4x \ne -1,\ 4x \ne \pi + 2\pi n,\ x \ne \frac{\pi}{4}(1+2n),\ n \in \mathrm{Z}.$$

Далее, значения синуса положительны, если

$$2\pi k < x < \pi + 2\pi k,\ k \in \mathrm{Z}.$$

Дальнейшее решение проводим с учетом введенных ограничений на значения *x*.

2. Преобразуем логарифмы к основанию *a*=2:

$$\log_2(1+\cos 4x) \le \log_2 2 + \log_2 \sin^2 x$$

или

$$\log_2(1+\cos 4x) \le \log_2 2\sin^2 x .$$

Ввиду возрастания логарифмической функции с основанием $a>1$ имеем

$$1+\cos 4x \le 2\sin^2 x .$$

3. Теперь в полученном тригонометрическом неравенстве переходим к аргументу $2x$ (формулы «сложения с единицей» и понижения степени):

$$2\cos^2 2x \le 1-\cos 2x$$

или

$$2\cos^2 2x+\cos 2x-1 \le 0 .$$

Полагая $t=\cos 2x,$ находим корни квадратного трехчлена $2t^2+t-1$:

$$t_1=-1,\ t_2=\frac{1}{2}.$$

Теперь

$$2(t+1)(t-\frac{1}{2}) \le 0;\ \text{следовательно,}\ t\in[-1,\ \frac{1}{2}],$$

т.е.

$$-1 \le \cos 2x \le \frac{1}{2}.$$

Достаточно, очевидно, рассмотреть $\cos 2x \le \frac{1}{2}$, откуда

$$\arccos\frac{1}{2}+2\pi n \le 2x \le 2\pi-\arccos\frac{1}{2}+2\pi n ,$$

или

$$\frac{\pi}{6}+\pi n \le x \le \frac{5\pi}{6}+\pi n , \quad n\in\mathbf{Z}.$$

С учетом условия $2\pi k < x < \pi+2\pi k,\ k\in$Z, следует рассматривать лишь точки верхней полуплоскости, так что

$$\frac{\pi}{6}+2\pi m \le x \le \frac{5\pi}{6}+2\pi m,\ m\in\mathbf{Z}.$$

Остается исключить значения $x=\frac{\pi}{4}(1+2n),\ n\in \mathbf{Z}$, также расположенные в верхней полуплоскости, т.е. рассматривать лишь

$$x\neq \frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in \mathrm{Z}\ \text{ и }\ x\neq \frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in \mathbf{Z}.$$

Окончательно, приходим к следующему ответу:

$$x\in[\frac{\pi}{6}+2\pi m,\frac{\pi}{4}+2\pi m)\cup(\frac{\pi}{4}+2\pi m,\frac{3\pi}{4}+2\pi m)\cup(\frac{3\pi}{4}+2\pi m,\frac{5\pi}{6}+2\pi m],$$

$$m\in \mathbf{Z}.$$

Пример 5. Решить уравнение

$$4x^2+31x+38=8\sin\frac{\pi}{x}+\sqrt{\lg\cos^2\pi x}.$$

Решение. ОДЗ уравнения определяется условиями $x\neq 0,\ \lg\cos^2\pi x\geq 0$, т.е. $x\neq 0,\ \cos^2\pi x\geq 1$; с учетом множества значений косинуса имеем тогда $\cos^2\pi x=1$, а значит $\pi x=\pi n$, или $x=n, n\in \mathrm{Z}$. Теперь уравнение принимает вид $4n^2+31n+38=8\sin\frac{\pi}{n}+\sqrt{\lg 1}$, т.е. $4n^2+31n+38=8\sin\frac{\pi}{n}, n\neq 0.$ Учитывая множество значений синуса, имеем возможными только те значения n, для которых $-8\leq 4n^2+31n+38\leq 8$, т.е. $-46\leq 4n^2+31n\leq -30$. Изображая на координатной плоскости параболу $y=4x^2+31x$ в полосе $-46\leq y\leq -30$, находим всего два соответствующих целых числа: $n=-2, n=-6$ (другой способ состоит в решении системы неравенств $4n^2+31n+30\leq 0, 4n^2+31n+46\geq 0$, откуда получаем те же значения n). Подставляя в полученное уравнение $4n^2+31n+38=8\sin\frac{\pi}{n}$, значения $n=-2$ и $n=-6$, убеждаемся, что они оба являются его корнями.

Ответ: $x=-2,\ x=-6$.

Пример 6. Решить уравнение

$$\sqrt{1-tg\,x+\sin^2 x}-\sqrt{\sin^2 x-0{,}8}=\sqrt{1{,}8-tg\,x}.$$

Анализ. Имеем иррациональное уравнение с "тригонометрическими" аргументами. Возведение обеих частей уравнения в квадрат должно сопровождаться отслеживанием равносильности преобразований (в том числе, анализом области определения уравнения).

Решение. Обе части уравнения определены, если выполнены неравенства

$$\cos x\neq 0,\ 1-tg\,x+\sin^2 x\geq 0,\ \sin^2 x-0{,}8\geq 0,\ 1{,}8-tg\,x\geq 0. \qquad (7.1)$$

"Уединив" первую из иррациональностей, имеем неотрицательными обе части уравнения; возводя в квадрат, получаем равносильное уравнение

$$1-tg\,x+\sin^2 x=(\sqrt{\sin^2 x-0{,}8}+\sqrt{1{,}8-tg\,x})^2. \qquad (7.2)$$

Теперь оказывается выполненным второе из условий (7.1); далее,

$$1-tg\,x+\sin^2 x=\sin^2 x-0{,}8+2\sqrt{(\sin^2 x-0{,}8)(1{,}8-tg\,x)}+1{,}8-tg\,x$$

или

$$\sqrt{(\sin^2 x-0{,}8)(1{,}8-tg\,x)}=0.$$

Потребовав $\cos x\neq 0$ преобразуем полученное уравнение и неравенство $\sin^2 x-0{,}8\geq 0$ в (7.1) к соотношениям в терминах тангенсов. Поскольку

$$\sin^2 x=tg^2x\cos^2 x=\frac{tg^2x}{1+tg^2x},$$

то

$$(\frac{tg^2x}{1+tg^2x}-\frac{4}{5})(1{,}8-tg\,x)=0$$

если (см. (7.1))

$$\frac{tg^2x}{1+tg^2x}\geq\frac{4}{5},\ tg\,x\leq 1{,}8. \qquad (7.3)$$

Имеем два следующих случая.

1) $\dfrac{tg^2 x}{1+tg^2 x}=\dfrac{4}{5}$, откуда $tg\ x=\pm 2$, но значение $tg\ x=2$ не согласуется с областью определения.

Остается решить уравнение $tg\ x=-2$; имеем $x=-arctg\ 2+\pi\ n,\ n\in \boldsymbol{Z}.$

2)Рассмотрим случай $tg\ x=1{,}8$. Корни этого уравнения – посторонние, т.к. не выполнено первое из соотношений (7.3):

$$\frac{tg^2 x}{1+tg^2 x}=\frac{81}{106}<\frac{4}{5}.$$

Ответ: $x=-arctg\ 2+\pi\ n,\ n\in \boldsymbol{Z}.$

Пример 7. Найти все корни уравнения

$$x^3-6{,}3x^2+4{,}8x=0{,}5+0{,}4\sin\frac{25\pi x}{3},$$

при подстановке каждого из которых в уравнение

$$(7x-1{,}1)\sin y+\frac{3}{x}-9=(x+3{,}7)y^2+\sqrt{\frac{6x^2-10x^3-0{,}9x}{1+x}}\cos 2y$$

получится уравнение относительно *y*, имеющее не менее двух решений.

Решение. 1) Найдем область определения второго уравнения. Имеем

$$\frac{6x^2-10x^3-0{,}9x}{1+x}\geq 0 \quad \text{или} \quad -\frac{10x(x-0{,}3)^2}{1+x}\geq 0,$$

откуда $x\in(-1{,}0]\cup\{0{,}3\}$.

Выясним теперь, каковы корни первого уравнения, принадлежащие области определения. Обозначим

$$f(x)=x^3-6{,}3x^2+4{,}8x,\ \ g(x)=0{,}5+0{,}4\sin\frac{25\pi x}{3}.$$

Случай 1. $x\in(-1{,}0]$. Стандартные приемы решения, очевидно, не применимы к нашему уравнению. Исследуем множества значений функций $f(x)$ и $g(x)$; возможно, это поможет сделать вывод о наличии корней.

Для функции $f(x)$, непрерывной на $(-1{,}0]$ определим $f(0)=0,\ f(-1)=-12{,}1,$ и найдем ее производную: $f'(x)=3(x^2-4{,}2x+1{,}6)$

. Производная обращается в ноль при двух различных значениях аргумента (дискриминант трехчлена больше нуля), причем $x_1 + x_2 = 4{,}2 > 0$, $x_1 \cdot x_2 > 0$, так что нули производной не лежат на $(-1{,}0]$. Значит, $f(x)$ монотонна на (–1,0]; тогда все значения функции лежат между $f(0)$ и $f(-1)$; следовательно, $-12{,}1 < f(x) \le 0$ на (–1,0].

В то же время $-0{,}4 \le 0{,}4\sin\frac{25\pi x}{3} \le 0{,}4$, а значит $g(x) \ge 0{,}5 - 0{,}4 = 0{,}1$.

Итак, на $(-1{,}0]$ равенство $f(x) = g(x)$ невозможно.

Случай 2. Остается проверить, является ли корнем уравнения число $x = 0{,}3$. Имеем

$$f(0{,}3) = 0{,}9,\ g(0{,}3) = 0{,}5 + 0{,}4\sin\frac{5\pi}{2} = 0{,}9,$$

так что получен единственный корень первого из данных уравнений $x = 0{,}3$. Подставим теперь его во второе данное уравнение. Имеем его тогда в виде $\sin y + 1 = 4y^2 + 0 \cdot \cos 2y$ или $\sin y = 4y^2 - 1$. Если изобразить графики функций $t = \sin y$ и $t = 4y^2 - 1$, то видим, что они пересекаются, по меньшей мере, дважды: при $x \in (-1{,}0)$ и при $x \in (0{,}1)$). Более точное доказательство существования корней на указанных промежутках может быть следующим.

Положим $\phi(y) = \sin y - 4y^2 + 1$. Имеем $\phi(-1) = -\sin 1 - 4 + 1 < 0$, $\phi(0) = 1 > 0$, $\phi(1) = \sin 1 - 3{,}4 + 1 < 0$. Поскольку непрерывная функция $\phi(y)$ имеет разные знаки на концах отрезка $[-1{,}0]$ а также и на концах $[0{,}1]$, то уравнение $\sin y = 4y^2 - 1$ внутри каждого из этих отрезков имеет не менее, чем по одному корню. Значит, это уравнение имеет всего не менее двух различных корней.

Ответ: $x = 0{,}3$.

Пример 8. При каких значениях параметра *a* уравнение

$$\cos x - \frac{1}{2} = \sqrt{\cos 4x - \cos x + a}$$

имеет хотя бы одно решение?

Анализ задачи. Решения x существуют при ограничении

$$\cos x - \frac{1}{2} \geq 0, \quad \text{то есть} \quad \cos x \geq \frac{1}{2}.$$

Указанное ограничение предстоит использовать, если в решении будет введена соответствующая замена переменных. Параметр a следует, далее, выразить из преобразованного уравнения, в результате чего станет возможным определить условия, при которых уравнение имеет решения.

Решение. В результате возведения в квадрат имеем:

$$(\cos x - \frac{1}{2})^2 = \cos 4x - \cos x + a.$$

В частности, те решения, которые будут найдены, удовлетворяют области определения уравнения

$$\cos 4x - \cos x + a \geq 0.$$

Теперь имеем

$$\cos^2 x - \cos x + \frac{1}{4} = \cos 4x - \cos x + a,$$

откуда, понижая степень, получим

$$\frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1}{4} = \cos 2 \cdot 2x + a.$$

Далее, по формуле косинуса двойного угла, будем иметь

$$\frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1}{4} = 2\cos^2 2x - 1 + a$$

или

$$\frac{7 + 2\cos 2x}{4} = 2\cos^2 2x + a \; ; \; a = \frac{-8\cos^2 2x + 2\cos 2x + 7}{4}.$$

Значит, значения параметра a должны принадлежать множеству значений $E(f)$ функции

$$f(x) = \frac{-8\cos^2 2x + 2\cos 2x + 7}{4} \text{ при условии } \cos x \geq \frac{1}{2}.$$

Неравенство $\cos x \geq \frac{1}{2}$ имеет решения $-\frac{\pi}{3}+2\pi\kappa \leq x \leq \frac{\pi}{3}+2\pi\kappa,\ \kappa \in Z$,

откуда

$$-\frac{2\pi}{3}+4\pi\kappa \leq x \leq \frac{2\pi}{3}+4\pi\kappa, \kappa \in Z, \text{ или } -\frac{1}{2} \leq \cos 2x \leq 1.$$

Теперь

$$a \in E(g(t)), \text{ где } g(t)=\frac{-8t^2+2t+7}{4} \text{ при } \quad t=\cos 2x.$$

Осталось решить стандартную задачу на поиск наибольшего и наименьшего значений функции $g(t)$ на отрезке $\left[-\frac{1}{2};1\right]$, которая решается с использованием производной. Имеем $g'(t)=\frac{1}{2}-4t$; критическая точка

$$t_0=\frac{1}{8} \in \left[-\frac{1}{2};1\right]; \text{ при этом } g\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{57}{32}; g(1)=\frac{1}{4}; g\left(-\frac{1}{2}\right)=1.$$

Значит,

$$g_{наименьшее}=\frac{1}{4};\ g_{наибольшее}=\frac{57}{32};\quad E(g)=\left[\frac{1}{4};\frac{57}{32}\right], \text{ и, наконец, } a \in \left[\frac{1}{4};\frac{57}{32}\right].$$

Ответ: $\left[\frac{1}{4};\frac{57}{32}\right]$.

7.2 ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. При каждом действительном значении α решить уравнение

$$2\,ctg^2 x+2(\sin\alpha+\cos\alpha)ctg\, x=-1.$$

2. Найти множество значений функции

$$y = 1 - 4\cos x + 4\sin^2 x.$$

3. Найти наименьшее целое значение функции

$$y = 4 - 2\sin 2x - 6\cos^2 x.$$

4. Найти все пары действительных чисел, удовлетворяющих равенству

$$\sqrt{1-|x|}+\sqrt{1-|y|}=2+|tg\ y|.$$

5. Решить уравнение

$$\sin x+\sqrt{3}\cos 12x\cdot\cos x=2.$$

6. Решить уравнение

$$\cos x+\cos \pi x=2.$$

7. Решить уравнение

$$\sin(\sin x)=\sin(\cos x).$$

8. Решить уравнение

$$|\sin x|=|\sin(\frac{135\pi}{2}-x)|.$$

9. Решить уравнение

$$|tg\ x|^{\sin x}=|ctg\ x|^{\cos x}.$$

10.Решить неравенство

$$tg^2 x+tg\ x<\sqrt{3}(tg\ x+1).$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обобщающее повторение (и, в частности, подготовка к Единому государственному экзамену) – заключительный этап освоения учебных дисциплин на старшей ступени общего образования. Она призвана выполнить интегрирующую функцию, которая заключается в формировании системности знаний, в понимании взаимосвязи между изучаемыми понятиями, фактами, методами, способами деятельности и т.п.

Выделение и разработку ведущих содержательно-методических линий процесса подготовки выпускников мы рассматриваем в качестве одного из основных механизмов обеспечения качества математической подготовки. Речь идет о:

1)функциональной линии;

2)линии математических моделей;

3)геометрической линии.

В свою очередь, в составе всех трех линий мы выделяем тригонометрический блок. В составе функциональной линии он представлен свойствами и графиками тригонометрических функций, их нулями (тригонометрические уравнения) и интервалами знакопостоянства (тригонометрические неравенства). Гармоника $y = A\sin(\omega x + \gamma)$ (линейное тригонометрическое выражение и связанное с ним линейное тригонометрическое уравнение) служит математической моделью простейшего периодического (колебательного) процесса. Геометрический материал в значительной степени построен на тригонометрических соотношениях в треугольниках.

Следовательно, можно говорить также и о тригонометрической линии, в значительной степени выполняющей интегрирующую функций по отношению к трем вышеуказаннным.

В каждой учебной дисциплине области присутствуют фундаментальные понятия, вокруг которых группируется некоторое содержание (другие понятия, связанные с базовым, суждения и действия, необходимые для их усвоения и т.д.); при этом с каждым новым обращением учащихся к этим понятиям происходит обогащение представлений о них. Соответствующий блок содержания представляет собою, таким образом, некое целостное образование с многочисленными внутренними связями, с использованием специальных методов и определяет специфику методики изучения материала.

В подобных случаях о нем (об указанном целостном образовании) говорят как об определенной содержательно - методической линии в программе изучения данной дисциплины.

Обсуждаемая в настоящей работе тригонометрическая линия в курсе математики ведет свое начало из основной школы: ее «истоками» являются тригонометрические соотношения в прямоугольном треугольнике. «Качественным скачком» в ее развитии служит выход в координатную плоскость: введение своеобразной системы координат на единичной окружности и совмещение ее с прямоугольной системой координат порождает пару «синус-косинус». Ключевыми моментами в изучении тригонометрических функций представляются периодичность и формулы приведения, формулы обращения тригонометрических функций (решения тригонометрических уравнений), свойства и графики этих функций. С возвращением комплексных чисел в школьный курс тригонометрическая линия получает развитие в тригонометрической форме комплексного числа, умножении, делении комплексных чисел, возведении в степень и извлечении корня.

С переходом к этапу высшего профессионального образования тригонометрический материал становится в значительной степени востребованным в курсе математики и ее приложений.

В курсе аналитической геометрии и математического анализа (функции действительного переменного) тригонометрия является в значительной степени опорным материалом.

Существенное развитие тригонометрическая линия получает с введением в рассмотрение комплексной экспоненты, тригонометрических и гиперболических функций комплексного аргумента, обратных им функций, а также в процессе выявления связей между элементарными функциями. Так, неожиданное представление тригонометрических функций в виде бесконечных многочленов возникает при рассмотрении рядов Тейлора (Маклорена).

Задача о разложении периодической функции достаточно произвольного вида (разложении периодического движения) в сумму простейших гармоник порождает рассмотрение тригонометрического ряда. Происходит переход от «конечной» к «бесконечной» тригонометрии. В теории уравнений математической физики студент получает представление о разложениях по ортогональным тригонометрическим системам как средстве решения соответствующих краевых и граничных задач (моделировании процессов колебаний, теплопереноса, диффузии).

Систематизируем сказанное в в виде следующей таблицы соответствия некоторых умений, приобретаемых учащимися в процессе изучения тригонометрии и тех разделов курса высшей математики, при изучении которых соответствующие умения востребованы.

Востребованные умения	***Разделы (темы) курса***
Использовать тригонометрические соотношения в прямоугольном треугольнике	Векторная алгебра (проекции вектора на оси координат); системы координат (формулы связи прямоугольных и полярных координат, преобразование поворота прямоугольной системы координат)
Преобразовывать тригонометрические выражения (напр., разности тригонометрических функций в произведения)	Введение в анализ (вычисление пределов, непрерывность и дифференцируемость тригонометрических функций)
Использовать формулы связи тригонометрических функций, преобразовать их произведения в	Задачи интегрирования (интегрирование тригонометрических функций и тригонометрические

сумму, выражать синусы и косинусы через тангенс половинного угла	подстановки)
Определять знаки тригонометрических функций и применять формулы приведения	Комплексные числа (тригонометрическая форма комплексного числа, умножение, деление, возведение в степень в тригонометрической форме)
Оценивать значения тригонометрических функций	Ряды и несобственные интегралы (вопросы сходимости, теоремы сравнения)
Определять значения тригонометрических функций в точках $n\pi$ и $(2n-1)\frac{\pi}{2}$ (находить нули синуса и косинуса, решать другие простейшие уравнения)	Ряды Фурье (вычисление коэффициентов Фурье). Краевые и граничные задачи

Обобщающее повторение тригонометрии в значительной степени должно быть направлено на отработку указанных умений. В этом мы видим один из механизмов обеспечения качества математической подготовки, которое:

- в узком смысле выражается в высоком тестовом балле по результатам сдачи учащимися ЕГЭ;

- в широком смысле – в успешной адаптации студентов к обучению в учреждениях профессионального образования, в частности, в успешном освоения учебного материала первых курсов вуза (как математики, так и ее приложений).

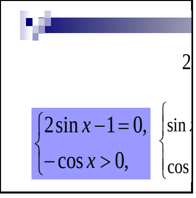
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ткачук, В.В. Математика абитуриенту/В.В.Ткачук – М: МЦНМО , 2000. –892 С.

2. Нахман, А.Д. Тригонометрия: метод. пособие/ А.Д.Нахман А.Д. – Тамбов: ТОИПКРО, 2008. – 46 С.

3. Нахман А.Д. Функции и их свойства. Задачи для подготовки к ЕГЭ: метод. пособие/ А.Д.Нахман А.Д. – Тамбов: ТОИПКРО, 2006. – 61 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ


2
2sin x − 1 = 0,
− cos x > 0,
sin
cos