Министерство образования и науки Российской Федерации

ФГБОУ ВПО "Тамбовский государственный технический университет"

КАРПУШКИН С.В.

ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ ПРОЕКТНЫХ РЕШЕНИЙ

Утверждено Методическим советом ТГТУ в качестве учебного пособия
для студентов дневного и заочного отделения,
обучающихся по специальности
15.05.01 "Проектирование технологических машин и комплексов"
и направлению
15.03.01 "Машиностроение"

Тамбов
2015

Рецензенты:

Громов М.С. – к.т.н., технический директор
ООО «СпиртПромПроект», г. Тамбов

Подольский В.Е. – д.т.н., профессор, директор Центра новых информационных технологий ТГТУ

Утверждено Методическим советом ТГТУ
(протокол № 4 от 22.05.2015 г.)

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Принятие решения (выбор) – это действие над множеством альтернатив, в результате которого вначале получается подмножество предварительно отобранных альтернатив, а на заключительном этапе – одна альтернатива, наилучшая согласно принятому критерию оценки качества достижения поставленной цели. Выбранная альтернатива и есть принятое решение или обоснованный претендент на решение.

Общего, единого на все случаи алгоритма принятия решения не существует. Эта операция всегда конкретна. В зависимости от объективных условий и организации работы выбор может быть:

а) разовый или повторный (адаптивный);

б) индивидуальный или многосторонний, во втором случае возможны коалиция, кооперация, конфликтная ситуация;

Выбор может проводиться в условиях:

- определенности – возможны случаи поиска оптимального решения, упорядочения альтернатив, произвольного выбора;

- неопределенности – информация может быть стохастической (известны вероятности выбора альтернатив), расплывчатой (вероятности не известны), а может полностью отсутствовать.

Для любого выбора справедливы следующие положения:

1. Предполагается наличие нескольких вариантов выбора, причем в реальных случаях множество вариантов ограничено.

2. Из всего множества вариантов необходимо выбрать один, но для этого необходимо иметь критерии оценки предпочтительности вариантов.

1 ФОРМАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЯ

Введем два понятия: $\{\chi\}$ – множество альтернатив; $\boldsymbol{\Phi}$ – принцип выбора. Тогда задачу принятия решения можно записать в виде $\{\{\chi\},\boldsymbol{\Phi}\}\rightarrow \chi^*$, где χ^* – выбранная альтернатива (одна или несколько равноценных в каком-то смысле).

Принцип выбора, в свою очередь, зависит от внешних условий, например, множества состояний внешней среды, а также от информационной ситуации, т.е. от вида и точности имеющейся в распоряжении информации.

Возможны различные классификации состояния внешней среды и информационных ситуаций, например, можно выделить следующие информационные ситуации:

а) известны априорные вероятности состояния внешней среды;

б) известен вид распределения вероятностей состояний среды, но параметры распределения не известны, необходима их оценка;

в) состояние среды характеризуется нечетким множеством.

Имея в виду введенные понятия, можно записать возможные варианты задачи принятия решения в следующем виде.

Задача 1. Оптимальный выбор

$\{\chi\}$ – множество альтернатив и $\boldsymbol{\Phi}$ – принцип выбора, определены. Приложение $\boldsymbol{\Phi}$ к $\{\chi\}$ не зависит от субъективных обстоятельств.

Задача 2. Выбор

$\{\chi\}$ определено, $\boldsymbol{\Phi}$ не может быть формализован. Результат выбора зависит от того, кто и на основе какой информации принимает решение.

Задача 3. Общая задача принятия решения

Множество альтернатив не имеет определенных границ, принцип выбора не определен и даже не может быть зафиксирован. Разные субъекты могут принимать различные решения при одинаковом наборе альтернатив или даже рассматривать различные альтернативы.

К сожалению, задача 3 встречается достаточно часто и может даже казаться бессмысленной. Выручают естественные ограничения:

1. Существует начальное множество альтернатив $\{\chi^0\}$, которое затем уточняется, но в каждый момент это множество может быть зафиксировано: $\{\chi^0\}\rightarrow\{\chi^1\}\rightarrow\ldots\rightarrow\{\chi^i\}$.

2. Любая альтернатива из множества всех выдвинутых альтернатив может быть оценена с точки зрения полезности ее включения в некоторое более узкое множество $\{\chi^p\}$ для дальнейших оценок. Соответственно существует некоторый вспомогательный принцип $\boldsymbol{\Phi}_p$ такого отбора узкого множества.

3. Предполагается наличие какого-то множества неформализованных принципов выбора, используя которые можно приблизиться к желаемому результату.

Обычно задачи 2 и 3 решают, используя некоторые фиксированные принципы выбора при фиксированном (но допускающем уточнение) наборе альтернатив. При этом применяется ряд приемов, в том числе:

а) строится задача 1, как некоторый упрощенный аналог задач 2 или 3 и организуется итерационный процесс решения последовательности задач 1 таким образом, чтобы решение каждой последующей задачи давало лучшее приближение к решению исходной задачи, и так до получения результата с желаемой точностью;

б) решение ослабленной задачи с помощью экспертов. Каждый **k**-ый эксперт выбирает свой набор альтернатив $\{\chi_k\}$, свой принцип выбора Φ_k и выявляет наилучшую альтернативу – χ_k^*, после чего организуется процедура выбора решения из множества альтернатив, выбранных экспертами в качестве оптимальных – $\{\chi_k^*\}$.

1.1 Подходы к принятию решений

Общепринятый подход в задаче принятия решения – переход от сравнения альтернатив к сравнению их свойств (характеристик, признаков, преимуществ). После сравнения свойств вновь осуществляется переход к сравнению альтернатив, но проблема уже значительно упрощается.

Выделение свойств альтернатив является задачей декомпозиции. Декомпозиция в общем случае имеет иерархический характер. Каждое свойство 1-го уровня делится на набор свойств 2-го уровня и так далее до такого уровня, на котором свойства оказываются легко сравнимыми. Используются два способа сравнения альтернатив по их свойствам:

а) попарное (групповое) сравнение по определенному свойству;

б) на основе естественных (или искусственно введенных) числовых характеристик свойств.

Попарное сравнение

Формально это бинарная операция по признаку **R**. $\chi^i \mathbf{R} \chi^j$ означает, что согласно признаку **R** альтернатива χ^i предпочтительней альтернативы χ^j. На основе бинарных отношений возможно ранжирование альтернатив по каждому свойству.

Сравнение с использованием числовых характеристик (естественных или искусственно введеных)

Свойства, для которых известны числовые характеристики, называются критериями. При идеальной декомпозиции имеет место набор критериев, т.е. имеет место многокритериальная задача. Например, при сравнении проектных решений выделено свойство "компактность", которое, в свою очередь, разбивается на свойства следующего уровня: этажность цехов и расстояния между ними, размер санитарной зоны, уровень загрязнений воздушной и водной среды в санитарной зоне, уровень шума в санитарной зоне и др. Каждое из свойств этого уровня уже может быть оценено численно. Пример искусственных критериев – баллы как оценки экспертов.

Искусственные оценки могут переходить в естественные. Например, на экзамене процент правильных ответов соответствует определенному баллу. В сложных случаях большого набора критериев возможна классификация – деление свойств на классы (группы по важности).

Переход от сравнения отдельных свойств к сравнению альтернатив является задачей композиции. Возможны различные случаи решения этой задачи.

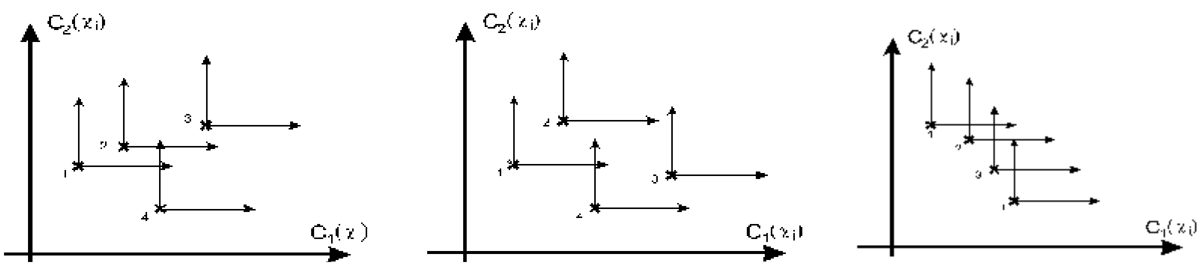
а) Все свойства оценены численно – получен набор критериев.

Пусть $C_k(\chi^i)$ – численная оценка **k**-го свойства **i**-ой альтернативы, $k=1,...,n$. Введем векторное пространство, называемое критериальным, в котором каждой **i**-ой альтернативе будет соответствовать точка: $C(\chi^i) = \{C_1(\chi^i), C_2(\chi^i), ..., C_m(\chi^i)\}$, т.е.

k-ой составляющей вектора $\mathbf{C(\chi^i)}$ является $\mathbf{C_k(\chi^i)}$ – численная оценка **k**-го свойства **i**-ой альтернативы.

При сравнении двух альтернатив χ^1 и χ^2 альтернатива χ^1 будет предпочтительнее альтернативы χ^2, если $\mathbf{C_k(\chi^1) \geq C_k(\chi^2)}$, для всех $\mathbf{k}$=1,...,$\boldsymbol{n}$, причем хотя бы одно неравенство строгое (здесь и далее рассматривается случай, когда лучшему свойству соответствует большее значение численной оценки).

Рассмотрим пример, когда альтернативы оцениваются по двум критериям. Принимая точку, соответствующую **i**-ой альтернативе, за начало координат, перенесем в эту точку все координатные оси критериального пространства. Если в положительном квадранте полученной таким образом системы координат не окажется ни одной точки, соответствующей какой-то другой альтернативе, то **i**-ая альтернатива является неулучшаемой.



а *б* *в*

Рисунок 1.1 – Пример оценки альтернатив по двум критериям

На рис. 1.1*а* только одна неулучшаемая альтернатива – это альтернатива 3, на рис. 1.1*б* таких альтернатив две – 2 и 3, а на рис. 1.1*в* все альтернативы неулучшаемые. Множество неулучшаемых альтернатив – это множество Парето. Получение множества Парето – первый шаг поиска лучшего решения. Для выбора альтернативы на множестве Парето нужно привлекать другие соображения, связанные с особенностями решаемой задачи.

б) Нет численных оценок, а есть результаты попарного сравнения

Пусть каждая альтернатива характеризуется **n** свойствами и по каждому из этих свойств проведена операция попарного сравнения. Если сравнение возможно для каждой пары альтернатив по каждому свойству, то оказывается возможным все альтернативы ранжировать по каждому свойству, при этом будет получен набор перестановок из альтернатив – матрица с **n** столбцами (по числу свойств) и **m** строками (по числу альтернатив).

Пример. Пусть имеют место четыре альтернативы, каждая из которых характеризуется двумя свойствами. Результаты попарного сравнения имеют вид:

- по свойству 1: $\boldsymbol{\chi^1 R_1 \chi^4, \chi^4 R_1 \chi^3, \chi^3 R_1 \chi^2}$;
- по свойству 2: $\boldsymbol{\chi^4 R_2 \chi^3, \chi^3 R_2 \chi^2, \chi^2 R_2 \chi^1}$.

Соответственно матрица результатов сравнения имеет вид:

Альтернативы	Свойство R_1	Свойство R_2
1	1	4
2	4	3
3	3	2
4	2	1

Один из способов дальнейшей работы с матрицей попарного сравнения – ввод условного векторного пространства свойств. Альтернативы располагаются на каждой из **i** осей искусственно введенного критериального пространства в соответствии с их ранжированием по **i**-му свойству. Затем выделяются неулучшаемые альтернативы таким же способом, как в предыдущем случае.

Для приведенного выше примера 2-х альтернатив с 4-мя свойствами условное пространство свойств имеет вид, показанный на рис. 1.2. В рассмотренном примере неулучшаемыми альтернативами являются 1 и 4. После получения множества неулучшаемых альтернатив дальнейший выбор производится, как и в предыдущем случае, с учетом физической сущности процесса по какому-либо правилу свертки множества критериев. В рассмотренном примере в качестве лучшей может быть признана, например, альтернатива 4, у которой сумма рангов свойств наименьшая: (2+1) < (1+4).

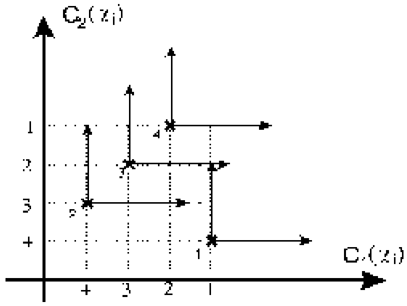


Рисунок 1.2 – Оценка 2-х альтернатив с 4-мя свойствами

1.2 Пример модели принятия решения в условиях неопределенности

Рассмотрим информационную ситуацию, когда распределения вероятностей на элементах состояния среды априори известны. Итак, распределение вероятностей задано в виде ряда $\mathbf{P=(p_1,...,p_j,...,p_n)}$, $\mathbf{p_j=P(\theta=\theta_j)}$, $\mathbf{p_1+...+p_n=1}$, где $\boldsymbol{\theta_j}$ – состояние среды**.** Это одна из возможных простейших ситуаций. На практике расчет априорного распределения вероятностей состояния среды производится либо путем обработки статистического материала, либо аналитическими методами на основании гипотез о поведении среды. Обозначим:

1) $\chi=\{\chi_1,...,\chi_i,...,\chi_m\}$ – множество возможных вариантов принятия решения;

2) $\boldsymbol{\theta=(\theta_1,..., \theta_j,..., \theta_n)}$ – множество возможных состояний среды, причем вероятности этих состояний известны: $\mathbf{p_j=P(\theta=\theta_j)}$;

3) $\boldsymbol{\Phi=\{\varphi_1,..., \varphi_t,..., \varphi_r\}}$ **–** множество методов выбора и оценки принятого решения.

С методом выбора решения связано понятие оценочного функционала – **F**. $\mathbf{F=\{f_{i,j}\}}$, где $\mathbf{f_{i,j}}$ – выигрыш (потеря), если при состоянии среды $\boldsymbol{\theta_j} \in \boldsymbol{\theta}$ было принято решение $\chi_i \in \chi$. Будем считать, что оценочный функционал имеет положительный ингредиент и обозначается $\mathbf{F^+}$, если ставится задача достижения максимума: $\mathbf{max\{f_{i,j}\}}$. При отрицательном ингредиенте функционала $\mathbf{F^-}$ лучшему решению соответствует $\mathbf{min\ \{f_{i,j}\}}$.

Таким образом, ситуация принятия решения характеризуется тройкой $\boldsymbol{\{\theta,\chi,F\}}$. Соответственно может быть получена матрица значений оценочного функционала (ситуационная матрица) $\begin{pmatrix} \mathbf{f_{1,1}} & \mathbf{f_{1,2}} & \cdots & \mathbf{f_{1,n}} \\ \mathbf{f_{2,1}} & \mathbf{f_{2,2}} & \cdots & \mathbf{f_{2,n}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{f_{n,1}} & \mathbf{f_{n,2}} & \cdots & \mathbf{f_{n,n}} \end{pmatrix}$. Различным принципам выбора соответствуют критерии выбора – алгоритмы, которые определяют единственное оптимальное решение или множество таких решений. Для рассматриваемой ситуации могут быть использованы критерий Байесса, критерий минимакса (максимина), критерий минимума дисперсии оценочного функционала и др.

Рассмотрим эти подходы на примере. Пусть оценочный функционал имеет положительный ингредиент, и ситуационная матрица имеет вид

θ	θ_1	θ_2	θ_3
$P(\theta=\theta_j)$	0,2	0,3	0,5
χ_1	5	4	3
χ_2	1	5	5
χ_3	4	2	4

При использовании критерия Байеса максимизируется математическое ожидание результата: $\mathbf{B^*(P,\chi_i) = \max\limits_{\chi_i \in \chi}\{p_1 \cdot f_{i1} + ... + p_n \cdot f_{in}\}}$. В рассматриваемом примере при принятии альтернатив $\chi_1 - B^*(P,\chi_1) = 5{\cdot}0{,}2 + 4{\cdot}0{,}3 + 3{\cdot}0{,}5 = 3{,}7$;

$\chi_2 - B^*(P,\chi_2) = 4{\cdot}0{,}2 + 5{\cdot}0{,}3 + 5{\cdot}0{,}5 = 4{,}2$;

$\chi_3 - B^*(P,\chi_3) = 4{\cdot}0{,}2 + 2{\cdot}0{,}3 + 4{\cdot}0{,}5 = 3{,}4$.

Согласно этому принципу наиболее предпочтительной является альтернатива χ_2.

При максиминном подходе (в задаче на максимум) максимизируется наихудший из возможных результатов: $\mathbf{B^* = \max\limits_{i} \min\limits_{j} f_{i,j}}$. В рассматриваемом примере при принятии χ_1: min(5,4,3) = 3; при принятии χ_2: min(1,5,5) = 1; при принятии χ_3: min(4,2,4) = 2. Наилучшей является альтернатива χ_1, которой соответствует максимум минимального результата. Аналогично может быть решена задача на минимум. В случае смешанных стратегий находится $\mathbf{B^*(\chi_i,p_i)}$, отличающееся от найденного ранее $\mathbf{B^*}$.

2 МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ
(принятия решений в условиях определенности при одном критерии)

Оптимизация в широком смысле слова - это поиск лучшего из возможных вариантов. Применительно к емкостному реактору периодического действия, в котором реализуется эндотермическая химическая реакция (рис. 2.1), это может быть поиск наилучшей конструкции аппарата (диаметр, высота, объем, поверхность теплообмена) или наиболее приемлемых параметров ведения технологического процесса (температура t^{o}, продолжительность τ, начальные концентрации компонентов c_A, c_B). Поиск всегда предполагает наличие цели, например, максимум выхода продукта, минимальное время достижения заданной концентрации продукта, минимальный расход компонента *А* при заданном выходе продукта. *Методы оптимизации* – это численные методы решения задач оптимизации (задач, имеющих множество допустимых решений, из которых необходимо выбрать одно, лучшее в каком-либо смысле).

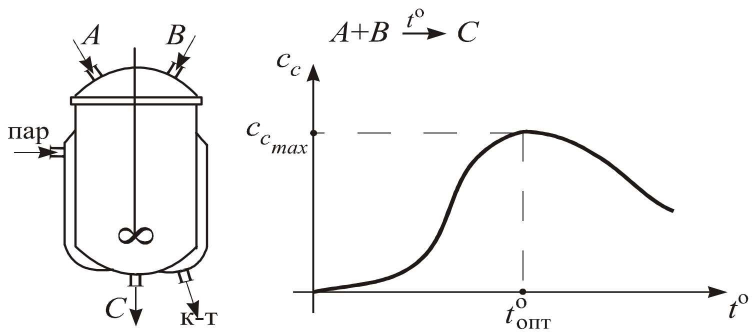


Рисунок 2.1 – Пример объекта оптимизации

2.1 Структура и постановка задач оптимизации

Формулировка задачи оптимизации включает три этапа: 1) словесное представление о параметрах задачи, множестве ее решений и поставленной цели; 2) запись критерия оптимальности (целевой функции) как функции параметров задачи; 3) запись условий, определяющих область допустимых значений параметров.

Параметры задачи x_i, i =1,2,…,n - это переменные, значения которых необходимо определить в результате ее решения (на рисунке 1.1 – температура в реакторе). Критерий оптимальности может быть представлен в виде функции параметров (целевой функции) $f(\overline{X})$, где $\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – одно из допустимых решений задачи, или функционала $I(\overline{X})$, который при фиксированных значениях параметров задачи представляет собой не число, а функцию времени или пространственной координаты, например, $f(\overline{X}) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^{(0)})^2$, $I(\overline{X}) = \int_0^t \varphi(\overline{X}, t)dt$.

Область допустимых значений параметров x_i, $i = 1,2,...,n$ может быть определена с помощью ограничений $g_j(\overline{X}) \geq 0$; $j = 1,2,...,m$ (условия типа неравенств) и связей $h_k(\overline{X}) = 0$; $k = 1,2,..., p$ (условия типа равенств).

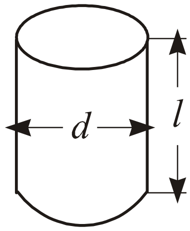
Таким образом, обобщенная постановка оптимизационной задачи имеет вид: найти решение $\overline{X}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, которому соответствует экстремум функции $f(\overline{X})$ (минимум или максимум), при выполнении условий:

$$g_j(\overline{X}) \ge 0;\ \ j = 1,2,...,m \qquad (2.1)$$

$$h_k(\overline{X}) = 0;\ k = 1,2,..., p \qquad (2.2)$$

Пример. Задача проектирования цилиндрической емкости.

Словесная постановка задачи: найти такие значения диаметра и высоты цилиндра, чтобы при фиксированном объеме V общая длина сварных швов была минимальна.



Критерий оптимальности: сварные швы - это две окружности и высота цилиндра, поэтому $f(d,l)=2\pi d+l$.

Множество допустимых решений задачи: диаметр и высота емкости не могут быть отрицательными числами, т.е. $d>0$, $l>0$; объем проектируемой емкости фиксирован и равен V, т.е. $\pi d^2 l/4=V$.

Таким образом, задача состоит в определении таких значений d^* и l^*, что функция $f(d,l)= 2\pi d+l$ достигает минимума и выполняются условия: $\pi d^2 l/4=V$; $d>0$; $l>0$.

Задачи оптимизации классифицируют по следующим признакам:

1) наличие или отсутствие ограничений и связей – задачи *на безусловный экстремум* (условия (2.1), (2.2) отсутствуют) и *на условный экстремум* (имеется условие (2.1), условие (2.2) или оба);

2) вид критерия оптимальности – *вариационные* задачи (критерий - функционал) и задачи *математического программирования* (критерий - функция);

3) характер функций f, g, h – задачи *линейного программирования* (все функции - линейные) и задачи *нелинейного программирования* (хотя бы одна из функций - нелинейная).

4) характер параметров – если параметры задачи могут принимать только строго определенные значения то это задача *дискретного (целочисленного) программирования*, а если число этих значений конечно – *комбинаторная* задача.

2.2 Условия оптимальности и типы вычислительных процедур оптимизации

Теоретической основой методов решения задач оптимизации являются условия оптимальности решения различных типов задач, т.е. условия, при которых критерий оптимальности той или иной задачи достигает минимального или максимального значения. Условия оптимальности подразделяются на необходимые и достаточные.

Примеры необходимых условий оптимальности (условие A необходимо для выполнения B, если при выполнении B всегда выполняется A):

- если в окрестности некоторой точки x^* ($x\in[x^*-\delta, x^*+\delta]$, $\delta>0$) $f(x)>f(x^*)$, то в точке $x=x^*$ функция $f(x)$ имеет локальный минимум (в окрестности другой точки x значения $f(x)$ могут быть еще меньше);
- если дифференцируемая функция $f(x)$ имеет в точке $x=x^*$ экстремум, то $f'(x^*)\equiv 0$ (для функции многих переменных $\dfrac{\partial f(x_1^*, x_2^*,..., x_n^*)}{\partial x_i} = 0,\ i = 1,2,...,n$).

Примеры достаточных условий оптимальности (условие A достаточно для выполнения B если при выполнении A всегда выполняется B):

- если в точке $x=x^*$ функция $f(x)$ имеет минимум, то в некоторой окрестности этой точки $x\in[x^*-\delta, x^*+\delta]$, $\delta>0$ выполняется условие $f(x)>f(x^*)$;

- если $f'(x^*)=0$ и $f''(x^*)\neq 0$, то в т. x^* $f(x)$ имеет экстремум (при $f''(x^*)>0$ – минимум, при $f''(x^*)<0$ – максимум);

- для того, чтобы дифференцируемая функция $f(x_1,x_2,...,x_n)$ имела в точке $(x_1^*, x_2^*,..., x_n^*)$ минимум достаточно, чтобы $\dfrac{\partial f(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)}{\partial x_i}=0,\ i=1,2,...,n$ и все миноры матрицы Гессе $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x_1^*,...,x_n^*)}{\partial x_1^2} \cdots\cdots \dfrac{\partial^2 f(x_1^*,...,x_n^*)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial^2 f(x_1^*,...,x_n^*)}{\partial x_n \partial x_1} \cdots\cdots \dfrac{\partial^2 f(x_1^*,...,x_n^*)}{\partial x_n^{\ 2}} \end{pmatrix}$ были положительны (если миноры нечетного порядка отрицательны, а четного - положительны, то в т. $(x_1^*,...,x_n^*)$ $f(x_1,...,x_n)$ имеет максимум).

После того как сформулированы условия оптимальности критерия конкретной задачи, необходимо организовать вычислительную процедуру поиска оптимального решения. Имеется пять основных типов вычислительных процедур решения задач оптимизации, на основе которых разрабатываются методы оптимизации:

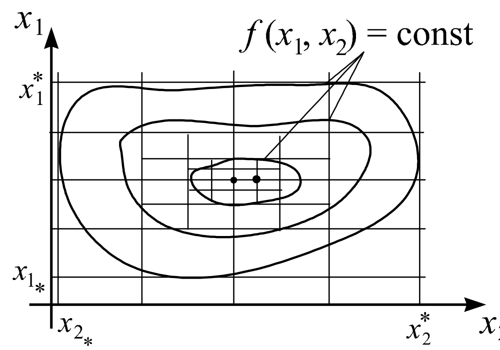


Рисунок 2.2 – Сетка значений аргументов функции $f(x_1,x_2)$

1. *Сравнение значений целевой функции на сетке значений аргументов.* Сетка образуется в результате разбиения областей допустимых значений аргументов на равные интервалы (рис. 2.2). Оптимальному решению соответствует минимальное или максимальное значение целевой функции в “узлах” сетки. Процедура обычно применяется многократно: вначале шаг сетки “крупный”, а затем вокруг лучшей точки строится более “мелкая” сетка. Аналогом этой процедуры для задач дискретного программирования и комбинаторных является поиск лучшего допустимого решения путем полного или локального перебора. Эта процедура применяется всегда, когда это не связано со слишком большим объемом вычислений.

2. *Использование необходимых условий экстремума* целевой функции, т.е. формирование и решение систем уравнений вида $\dfrac{\partial f(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_i}=0,\ i=1,2,...,n$. Применение этой процедуры ограничено, т.к. аналитические выражения производных целевой функции существуют далеко не всегда.

3. *Использование достаточных условий оптимальности*: образуется вспомогательная задача, множество решений которой шире допустимого, а критерий оптимальности на допустимом множестве совпадает с критерием исходной задачи (например задача условной оптимизации заменяется задачей безусловной оптими-

зации, в критерий которой вводится “штраф” за выход из допустимой области, т.е. за невыполнение условий (2.1), (2.2)).

4. *Отсечение множеств заведомо неоптимальных решений* (рис. 2.3) на основе правил, различных для каждой конкретной задачи (метод "золотого сечения", ветвей и границ для экстремальных комбинаторных задач).

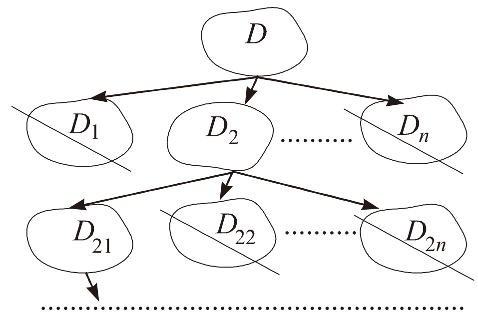


Рисунок 2.3 – Отсечение множеств неоптимальных решений

5. *Построение оптимизирующей последовательности допустимых решений* задачи: выбирается одно из допустимых решений $\overline{X}^{(0)}$, называемое начальным приближением, и на его базе строится последовательность допустимых решений $\overline{X}^{(0)}, \overline{X}^{(1)}, \overline{X}^{(2)}, ..., \overline{X}^{(n)}$, где $\overline{X}^{(k+1)} = \overline{X}^{(k)} + \Delta\overline{X}^{(k)}$, k=0,1,…,n, причем $\Delta\overline{X}^{(k)}$ выбирается так, чтобы при поиске $\min f(\overline{X})$ выполнялось условие $f(\overline{X}^{(k)}) > f(\overline{X}^{(k+1)})$, а при поиске $\max f(\overline{X})$ – условие $f(\overline{X}^{(k)}) < f(\overline{X}^{(k+1)})$. Приращение $\Delta\overline{X}^{(k)}$ чаще всего является функцией одного или нескольких предыдущих членов последовательности: $\Delta\overline{X}^{(k)} = \varphi(\overline{X}^{(k)})$ или $\Delta\overline{X}^{(k)} = \varphi(\overline{X}^{(k)}, \overline{X}^{(k-1)})$. Построение последовательности заканчивается в момент выполнения необходимых условий $\operatorname{ext} f(\overline{X})$. Большинство методов оптимизации основаны именно на этой процедуре.

2.3 Методы одномерной оптимизации

К числу наиболее популярных численных методов поиска экстремума функции одного переменного одномерной оптимизации относятся: метод «золотого сечения» и пошаговый метод. Первый из них ориентирован на поиск $\operatorname{ext} f(x)$ внутри фиксированного интервала (a,b) оси x, последний - на поиск $\operatorname{ext} f(x)$ в окрестности заданной точки x_0.

2.3.1 Метод «золотого сечения»

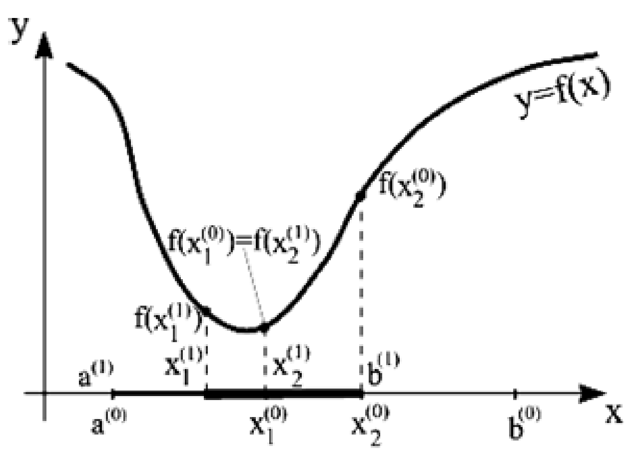


Рисунок 2.4 – Иллюстрация к методу «золотого сечения»

<u>Определение:</u> «золотым сечением» отрезка называется его деление на две части таким образом, что отношение длины отрезка к его большей части равно отношению большей части к меньшей. Следовательно, для отрезка единичной длины: $1/t = t/(1-t) \to t^2 + t - 1 = 0 \to$

$$t = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}+1\right)};\ |t| < 1 \to t = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.618,$$

$$1 - t = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0.382$$

Алгоритм *метода «золотого сечения»* при поиске минимума функции $f(x)$ включает операции, см. рис. 2.4:

1) интервал (a,b) делится точками x_1, x_2 в отношении «золотого сечения»:

$x_1=a+(b-a)\cdot(3-\sqrt{5})/2$, $x_2=b-(b-a)\cdot(3-\sqrt{5})/2$;

2) вычисляются значения $f(x_1)$ и $f(x_2)$;

3) если $f(x_1) < f(x_2)$, то от интервала (a,b) отсекается его правая часть: $b = x_2$, в противном случае – левая: $a = x_1$;

4) в случае $b = x_2$ точка x_1 осуществляет «золотое сечение» нового интервала (a,b) и играет в нем роль точки x_2, а точка x_1 нового интервала определяется аналогично п.1); при $a = x_1$ наоборот – $x_1 = x_2$, а точка x_2 нового интервала (a,b) определяется как в п.1). Для нового интервала (a,b) вновь выполняются действия п.п. 2)-4), причем в п.2) значение функции $f(x)$ вычисляется один раз: только для вновь определяемой точки x_1 или x_2.

Процесс деления интервала продолжается до тех пор, пока его длина не станет меньше заданной точности: $b-a < \varepsilon$. При завершении процесса поиска за точку минимума принимается значение $x^* = (a+b)/2$.

Достаточные условия сходимости алгоритма метода «золотого сечения»:

а) функция $f(x)$ непрерывна внутри интервала (a,b);

б) $f(x)$ унимодальна на интервале (a,b), т.е. имеет внутри него единственный экстремум;

в) в некоторой окрестности искомой точки x^* $f(x)$ является монотонной (с одной стороны возрастает, с другой - убывает).

2.3.2 Пошаговый метод

Этот метод применяется в тех случаях, когда интервал (a,b) оси x, содержащий точку экстремума функции $f(x)$ неизвестен, но известно, что экстремум находится в окрестности экспериментально найденной точки x_0. Этот метод применяется на практике значительно чаще метода «золотого сечения», т.к. условие сходимости его алгоритма намного проще: для этого достаточно, чтобы функция $f(x)$ была непрерывна в окрестности т. x_0.

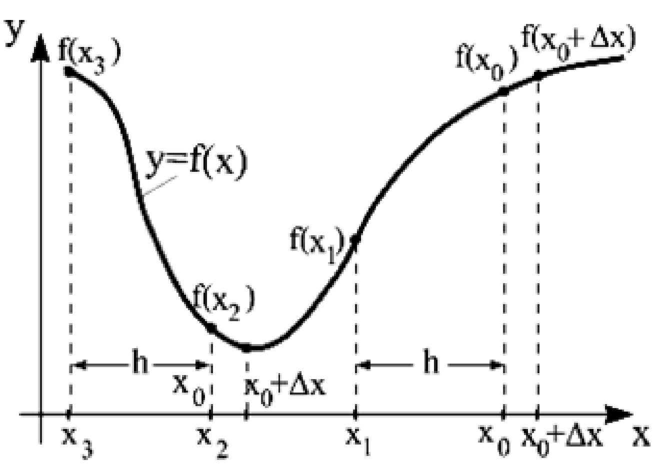


Рисунок 2.5 – Иллюстрация к пошаговому методу

При поиске минимума функции метод заключается в следующем, см. рис. 2.5:

1) выполняется пробный шаг от точки x_0 с целью выбора направления поиска: $x = x_0+\delta x$ ($\delta x \sim 0.5\cdot\varepsilon$) и вычисляются значения $f(x_0)$, $f(x)$; 2) если $f(x) < f(x_0)$, то величина основного шага, с которым осуществляется движение в направлении убывания функции, положительна ($h > 0$), в противном случае – отрицательна ($h < 0$);

3) движение в выбранном направ-

лении с шагом h: $x_{k+1}= x_k+h$, $k = 0,1,2...$ осуществляется до тех пор, пока $f(x_{k+1})< f(x_k)$; 4) если $f(x_{k+1}) \geq f(x_k)$, то при выполнении условия $h < \varepsilon$ процесс поиска заканчивается, а если $h \geq \varepsilon$, то шаг дробится: $h=|h|/p$, $p > 1$ и осуществляется возврат к п. 1) с начальной точкой $x_0 = x_k$.

В качестве коэффициента дробления шага p используют 2, 3, 5, но чаще всего $p = e = 2.71828$. По завершении процесса поиска за точку экстремума принимается значение $x^* = (x_{k+1} + x_k)/2$.

2.4 Методы поиска экстремума функций многих переменных

Методы поиска экстремума функций многих переменных подразделяются на *градиентные* и *безградиентные*.

2.4.1 Градиентные методы

В основу градиентных методов положены вычисление и анализ производных целевой функции. Поскольку в практических задачах найти значения производных аналитически как правило не удается, их вычисляют приближенно:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i} \approx \frac{f(x_1, x_2, ..., x_i + \delta x_i, ..., x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)}{\delta x_i}.$$

Выбор величин приращений по координатам δx_i, $i = 1,2,...,n$ зависит от возможностей используемого ПК и необходимой точности вычислений.

Определение: градиент функции $f(x_1,x_2,...,x_n)$ в точке $(x_1^{(0)},x_2^{(0)},...,x_n^{(0)})$ – это вектор, длина которого

$$\left|grad\, f\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right)\right| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right)}{\partial x_i}\right)^2} \quad (2.3)$$

характеризует скорость возрастания функции в этой точке, а направление соответствует направлению быстрейшего возрастания функции. Антиградиент – это вектор такой же длины, направленный в противоположную сторону, см. рис. 2.6.

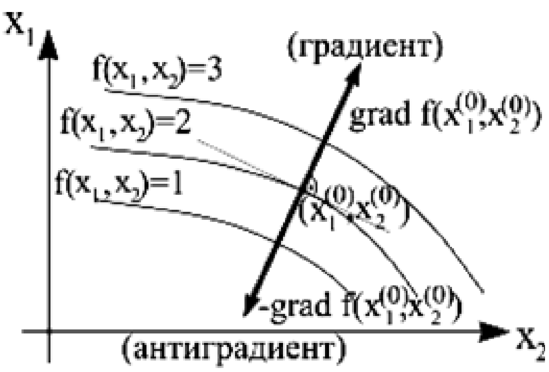


Рисунок 2.6 – Градиент и антиградиент функции $f(x_1,x_2)$

Идея методов: каждая следующая точка поиска min $f(x_1,x_2,...,x_n)$ (каждый новый член минимизирующей последовательности) получается в результате перемещения из предыдущей точки по направлению антиградиента целевой функции. Если в результате этого перемещения наблюдается увеличение значения целевой функции, то значение рабочего шага поиска h уменьшается. Поиск прекращается, когда выполняется необходимое условие ext $f(x_1,x_2,...,x_n)$, например длина градиента становится меньше требуемой точности:

$$\left|grad\, f\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)}\right)\right| < \varepsilon, \quad (2.4)$$

либо меньше требуемой точности становится величина шага поиска:

$$h < \varepsilon . \qquad (2.5)$$

Различают методы градиента с переменным шагом и с постоянным шагом. При использовании *метода градиента с переменным шагом* изменение значений $x_1,x_2,...,x_n$ производится согласно выражению:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - h \cdot \frac{\partial f(x_1^{(k)}, x_2^{(k)},..., x_n^{(k)})}{\partial x_i}, \quad i=1,2,...,n, \; k = 0,1,2\dots, \qquad (2.6)$$

а останов поиска – при выполнении неравенства (2.4). При возникновении ситуации $f\,(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)},..., x_n^{(k+1)}) \geq f\,(x_1^{(k)}, x_2^{(k)},..., x_n^{(k)})$ значение h уменьшается, например делится на число $p > 1$. Характер изменения значений $x_1,x_2,...,x_n$ согласно (2.6) зависит от величины и знака соответствующих частных производных целевой функции. По мере приближения к точке min f $(x_1,x_2,...,x_n)$ абсолютные величины частных производных уменьшаются, следовательно и шаг поиска является переменным – уменьшается по мере приближения к искомой точке, см. рис. 2.7.

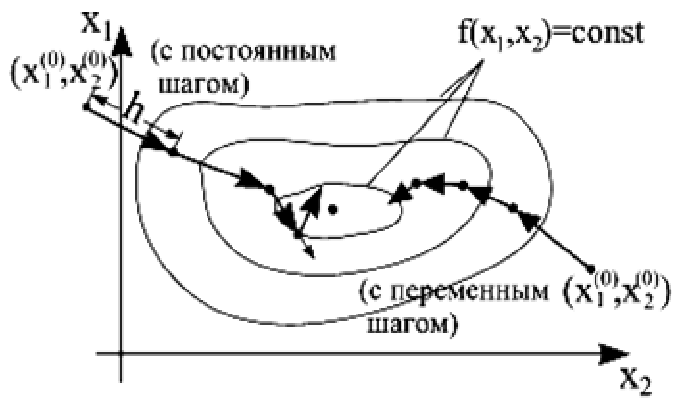


Рисунок 2.7 – Иллюстрация к методам градиента

Такой характер поиска $\min f(x_1, x_2,..., x_n)$ требует иногда значительных затрат времени. Применение *метода градиента с постоянным шагом* позволяет сократить затраты времени, но требует несколько большего объема вычислений при изменении значений аргументов целевой функции. Его основное соотношение:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - h \cdot \frac{\dfrac{\partial f(x_1^{(k)}, x_2^{(k)},..., x_n^{(k)})}{\partial x_i}}{\left|grad\, f\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)},..., x_n^{(k)}\right)\right|}, \; i=1,2,...,n; \; k = 0,1,2,..., \qquad (2.7)$$

т.е. расстояние между точками $(x_1^{(k)},x_2^{(k)},...,x_n^{(k)})$ и $(x_1^{(k+1)},x_2^{(k+1)},...,x_n^{(k+1)})$ равно

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(x_j^{(k+1)} - x_j^{(k)}\right)^2} = \sqrt{h^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)},..., x_n^{(k)}\right)}{\partial x_i}\right)^2 \Bigg/ \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)},..., x_n^{(k)}\right)}{\partial x_i}\right)^2} = h,$$

следовательно величина шага поиска в данном случае постоянна и равна выбранному значению h. Если изменение аргументов целевой функции в соответствии с (2.7) приводит к увеличению ее значения, шаг поиска уменьшается, см. рис. 2.7. Останов поиска min $f\,(x_1,x_2,...,x_n)$ по методу градиента с постоянным шагом осуществляется при выполнении неравенства (2.5).

Популярной модификацией метода градиента с постоянным шагом является *метод наискорейшего спуска*. Он позволяет сократить общий объем вычислений при некотором увеличении числа членов минимизирующей последовательности за счет меньшего количества вычислений частных производных целевой функции. При использовании этого метода аргументы целевой функции изменяются в соответствии с выражением (2.7), но значения ее частных производных и длины градиента не пересчитываются до тех пор, пока не сложится ситуация

$$f(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)},..., x_n^{(k+1)}) \geq f(x_1^{(k)}, x_2^{(k)},..., x_n^{(k)}).$$

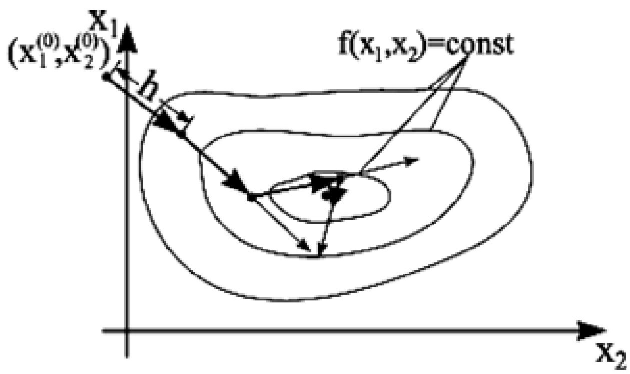


Рисунок 2.8 – Иллюстрация к методу наискорейшего спуска

Дробление шага поиска производится, когда во вновь выбранном направлении (после пересчета значений частных производных) не удается сделать ни одного результативного шага, останов поиска – при выполнении неравенства (2.5), см. рис. 2.8.

Основные этапы поиска min $f(x_1,x_2,...,x_n)$ методом наискорейшего спуска: 1) выбор начального приближения $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)})$;
2) определение значений частных производных $f(x_1,x_2,...,x_n)$ в этой точке;
3) изменение значений x_i, i=1,2,...,n в соответствии с выражением (2.7) без пересчета частных производных до начала возрастания целевой функции;
4) если ситуация $f(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)},..., x_n^{(k+1)}) \geq f(x_1^{(k)}, x_2^{(k)},..., x_n^{(k)})$ возникает при $k > 0$, то начальным приближением становится предыдущая точка: $x_i^{(0)} = x_i^{(k)}$, $i = 1,2,...,n$ и вновь выполняются п.п. 2), 3);
5) если $f(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)},..., x_n^{(k+1)}) \geq f(x_1^{(k)}, x_2^{(k)},..., x_n^{(k)})$ уже при $k = 0$, то осуществляется дробление шага $h=h/p$ ($p > 1$); при $h \geq \varepsilon$ (заданная точность) выполняется п. 3), иначе поиск заканчивается: $x_i^{*}= x_i^{(k)}$, i=1,2,...,n.

Метод координатного спуска. Название метода указывает на возможные направления поиска экстремума функции многих переменных: от начальной точки по направлению одной из осей координат до момента начала возрастания целевой функции, затем переход к направлению другой оси и т.д., пока не будет достигнута точка, движение из которой по любой оси с минимально возможным шагом приводит к увеличению целевой функции.

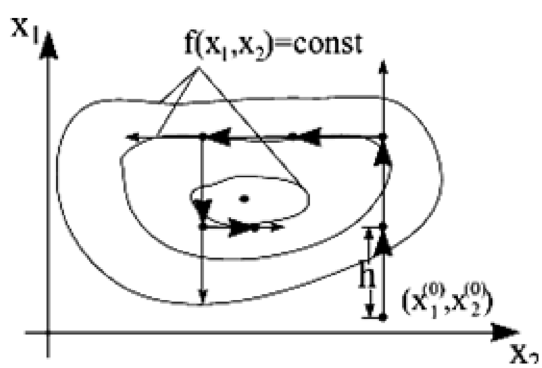


Рисунок 2.9 – Иллюстрация к методу координатного спуска

Основные этапы поиска min $f(x_1,x_2,...,x_n)$ методом координатного спуска:
1) выбор начального приближения $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},..., x_n^{(0)})$;
2) выбор направления поиска, т.е. номера $i\in(1,2,...,n)$ компоненты вектора $(x_1,x_2...,x_n)$, которая подлежит изменению;
3) вычисление значения частной производной целевой функции по выбранному аргументу $f'_i = \dfrac{\partial f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},..., x_n^{(0)})}{\partial x_i}$, если $f'_i > 0$, то с ростом x_i значение функции $f(x_1,x_2,...,x_n)$ увеличивается, а если $f'_i < 0$, то уменьшается;
4) изменение значений $x_1,x_2,...,x_n$ в соответствии с выражением:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - h \cdot \mathrm{sign}\left(\frac{\partial f(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)})}{\partial x_i}\right), \; i \in (1,2,...,n), \; k = 0,1,2,... \qquad (2.8)$$
$$x_j^{(k+1)} = x_j^{(k)}, \; j = 1,2,...,i-1, i+1,...,n$$

до тех пор, пока $f(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, ..., x_n^{(k+1)}) < f(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)})$; в противном случае производится возврат на п. 2) и выбор следующего направления поиска, при этом $x_i^{(0)} = x_i^{(k)}$, $i = 1,2,...n$ (h – шаг поиска, sign(z) – знак выражения z);

5) если движение с шагом h в любом из n возможных направлений приводит к ситуации $f(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, ..., x_n^{(k+1)}) \geq f(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)})$, то осуществляется дробление шага: $h = h/p$ ($p > 1$) и вновь выполняется п. 4);

6) поиск считается законченным, когда значение h становится меньше заданной точности ε.

Рассмотренные методы поиска экстремума функций многих переменных носят общее название: *градиентные методы первого порядка* (порядок метода равен наивысшему порядку производной целевой функции, участвующей в вычислениях). Их общие недостатки:

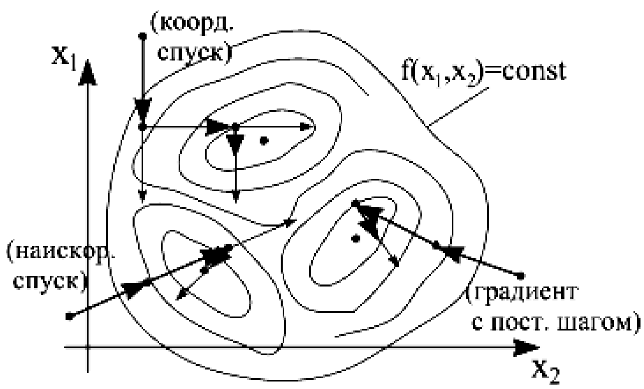


Рисунок 2.10 – Поиск экстремума многоэкстремальной функции

1) Нахождение локального экстремума целевой функции, ближайшего к начальному приближению. Это недостаток всех методов решения оптимизационных задач, основанных на построении оптимизирующей последовательности допустимых решений. Его удается устранить, если можно обосновать выбор начального приближения, находящегося вблизи глобального экстремума, см. рис. 2.10.

2) Использование значений частных производных целевой функции. Это, с одной стороны, увеличивает объем вычислений (количество вычислений значений целевой функции), а с другой – увеличивает погрешность решения, т.к. производные чаще всего вычисляются через разностные соотношения.

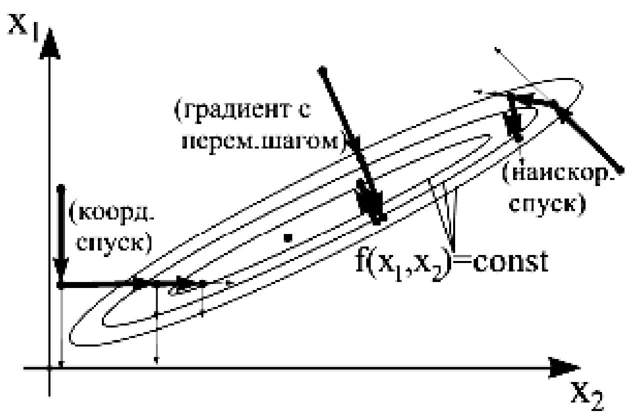


Рисунок 2.11 – Поиск экстремума функции в области "оврага"

3) "Застревание в овраге" целевой функции, т.е. в области значений x_i, $i = 1,2,...,n$, в которой значения $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ почти не меняются, см. рис. 2.11. Градиентные методы с остановкой по условию (2.5) "застревают в овраге", т.е. наблюдается иллюзия достижения минимума. Если же в качестве условия останова используется длина градиента, то поиск в "овраге" будет продолжаться бесконечно долго: значения частных производных целевой функции на "дне оврага" достаточно велики, но продвижения к точке минимума функции почти нет.

Замечания: 1. Если результирующие точки поиска min $f(x_1,x_2,...,x_n)$ с различных, достаточно далеко отстоящих друг от друга начальных точек не совпадают, а значения функции в них близки, значит она имеет "овраг", а если значения функции отличаются существенно, значит она имеет несколько экстремумов.
2. Если в методе координатного спуска определять направление перемещения по выбранной оси координат не по знаку соответствующей частной производной целевой функции, а с помощью пробного шага (аналогично пошаговому методу, см. п. 2.3.2), то метод станет безградиентным.

2.4.2 Безградиентные методы

Безградиентными (или методами нулевого порядка) называют методы поиска экстремума функций многих переменных, не использующие для определения направления поиска значений частных производных целевой функции. Можно выделить две группы этих методов:

1. Предварительное определение множества допустимых значений аргументов и использование стратегии его перебора (метод сравнения значений целевой функции на сетке значений аргументов).

2. Указание начальных значений аргументов и их последовательное изменение таким образом, чтобы каждой следующей совокупности значений $x_1,x_2,...,x_n$ соответствовало меньшее (поиск min) или большее (поиск max) значение целевой функции (методы случайных направлений, многогранника).

Метод сравнения значений целевой функции на сетке значений аргументов (жаргонное название – *метод сеток*) предусматривает следующие действия, см. рис. 2.12. Отрезки $[a_i,b_i]$, i=1,2, ...,n, определяющие заданную область поиска минимума функции $f(x_1,x_2,...,x_n)$, делятся на равные части длиной $h_i=(b_i-a_i)/m_i$. Значения m_i подбираются так, чтобы обеспечить одинаковый порядок чисел h_i , i=1,2,...,n. Во всех "узлах" полученной сетки, т.е. в точках с координатами $(a_1+i\cdot h_1,a_2+j\cdot h_2,...,a_n+k\cdot h_n)$, $i=0,1,...,m_1$, $j=0,1,...,m_2$, ...,$k=0,1,...,m_n$, определяются значения функции. Выбирается "узел" сетки $(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)$, которому соответствует минимальное значение функции. Если этот "узел" лежит на границе заданной области, то положение границ изменяется и описанная процедура повторяется до тех пор, пока он не станет внутренним. Если $\max\limits_{i=1,2,...,n}\{h_i\} > \varepsilon$ (заданной точности), то вокруг этого "узла" формируется новая область: $a_i=x_i^*-h_i$, $b_i=x_i^*+h_i$, i=1,2,...,n, - вычисляются новые значения h_i и т.д. В противном случае за точку минимума функции принимается $(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)$.

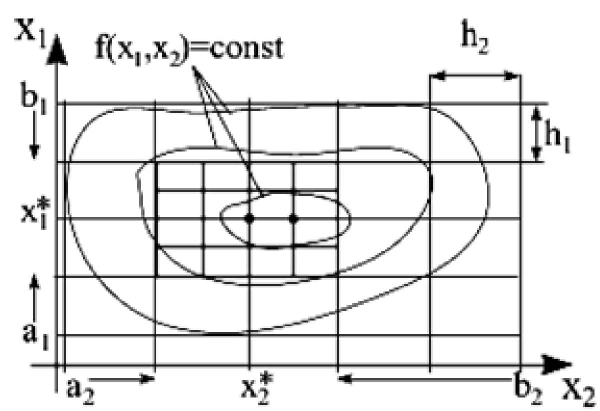


Рисунок 2.12 – Иллюстрация к методу сеток

Сравнение значений целевой функции на сетке значений аргументов требует большого объема вычислений, однако при правильном выборе значений m_i

этот метод гарантирует нахождение глобального экстремума рассматриваемой функции в заданной области. Главной проблемой при его использовании является выбор значений m_i, при которых с одной стороны исключается потеря точки экстремума между “узлами” слишком крупной сетки, а с другой – обеспечивается приемлемый объем вычислений.

Метод случайных направлений. Случайный выбор направления в системе координат x_1,x_2 обеспечивается использованием в качестве приращений значений аргументов (p_1,p_2 на рис. 2.13) случайных чисел. Величина шага в выбранном направлении будет единичной, если разделить p_1 и p_2 на $P = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$.

При поиске min $f(x_1,x_2,...,x_n)$ метод случайных направлений включает определение начальной точки поиска $\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},...,x_n^{(0)}\right)$ и величины рабочего шага h, выбор случайных чисел p_1,p_2,…,p_n и изменение значений аргументов целевой функции по правилу:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - h * p_i \Big/ \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + ... + p_n^2}\ , i=1,2,\ldots n,\ k = 0,1,\ldots \qquad (2.9)$$

Если выполняется неравенство $f(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)},..., x_n^{(k+1)}) < f(x_1^{(k)}, x_2^{(k)},..., x_n^{(k)})$, то движение в выбранном направлении с шагом h продолжается. Если неравенство не выполняется после второго, третьего и т.д. шагов, то определяется новое случайное направление и движение продолжается без изменения величины шага. Если неудачным оказывается первый же шаг в выбранном направлении, то путем изменения знаков чисел p_i, i = 1,2,...,n оно меняется на противоположное, а при повторении ситуации – на новое случайное направление. Величина рабочего шага h уменьшается, если ситуация $f(x_1^{(k+1)},..., x_n^{(k+1)}) \geq f(x_1^{(k)},..., x_n^{(k)})$ складывается после первого же шага в любом из заданного числа случайных направлений. Для функции $f(x_1,x_2)$ обычно достаточно перебрать четыре взаимно перпендикулярных направления:

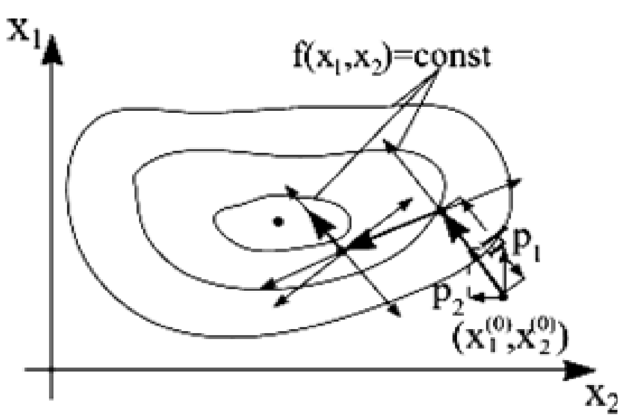
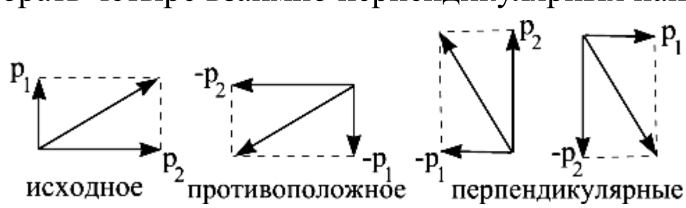


Рисунок 2.13 – Иллюстрация к методу случайных направлений



Поиск заканчивается, когда значение h становится меньше заданной точности.

Характер движения от начальной точки к точке минимума функции при использовании метода случайных направлений не зависит от особенностей функции. Случайный выбор направления как правило не обеспечивает кратчайшего пути к искомой точке, но может привести к уменьшению общего объема расчетов за счет единственного вычисления целевой функции на каждом шаге поиска.

Метод многогранника при поиске минимума функции двух переменных метод предусматривает формирование на плоскости x_1,x_2 правильного треугольника (см. рис. 2.14) и определение значений функции $f(x_1,x_2)$ в точках плоскости, соответствующих его вершинам. Вершина, которой отвечает наибольшее значение функции (вершина 1 на рис. 2.14) исключается, а новая образуется в результате симметричного отражения исключаемой через центр противоположной грани треугольника:

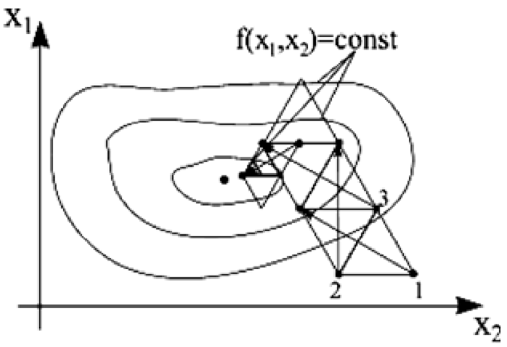


Рисунок 2.14 – Иллюстрация к методу многогранника

$$x_1^{(i)} = x_1^{(1)} + x_1^{(2)} + x_1^{(3)} - 2\cdot x_1^{(i)},$$

$$x_2^{(i)} = x_2^{(1)} + x_2^{(2)} + x_2^{(3)} - 2\cdot x_2^{(i)}\ ,\ i \in (1,2,3).$$

Процесс перемещения треугольника по плоскости x_1,x_2 путем изменения положения одной из его вершин продолжается до момента, когда значение функции во вновь образованной вершине оказывается наибольшим. В этом случае длина ребра треугольника уменьшается, причем неподвижной остается вершина (k), которой соответствует наименьшее значение функции:

$$x_1^{(j)} = \frac{x_1^{(j)} + x_1^{(k)}}{S},\ x_2^{(j)} = \frac{x_2^{(j)} + x_2^{(k)}}{S},\ j \neq k,\ S > 1.$$

Поиск прекращается в момент выполнения неравенства:

$$\max_{i=1,2,3;i\neq k}\left\{\left|x_1^{(k)} - x_1^{(i)}\right|, \left|x_2^{(k)} - x_2^{(i)}\right|\right\} < \varepsilon.$$

За точку $\min f(x_1,x_2)$ принимается лучшая вершина последнего треугольника.

В случае поиска $\min f(x_1,x_2,...,x_n)$ в n-мерном пространстве формируется выпуклый многогранник, имеющий (n+1) вершин и столько же граней. Если $\max_{m=1,2,...,n+1}\left\{f(x_1^{(m)},x_2^{(m)},...,x_n^{(m)})\right\} = f(x_1^{(j)},x_2^{(j)},...,x_n^{(j)})$, то положение новой j-ой вершины определяется по правилу:

$$x_i^{(j)} = \frac{2}{n}\cdot\sum_{m=1}^{n+1} x_i^{(m)} - \left(1 + \frac{2}{n}\right)\cdot x_i^{(j)},\ i = 1,2,...,n. \tag{2.10}$$

В ситуации, когда вновь образованной вершине соответствует максимальное значение целевой функции, многогранник деформируется – положение j-ой вершины может быть определено по формуле:

$$x_i^{(j)} = \frac{3}{2\cdot n}\cdot x_i^{(k)} - \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2\cdot n}\right)\cdot x_i^{(j)},\ i = 1,2,...,n, \tag{2.11}$$

где k - вершина, которой соответствует наименьшее значение функции.

Поиск прекращается при выполнении неравенства:

$$\max_{j=1,...n+1;\,j\neq k}\left\{\left|x_i^{(j)} - x_i^{(k)}\right|\right\} < \varepsilon,\ i=1,2,...,n, \tag{2.12}$$

Применение метода многогранника связано с единственным вычислением значения целевой функции на каждом шаге. Доказано, что при использовании правильного многогранника достаточно малых размеров направление движения совпадает с направлением антиградиента целевой функции.

2.5 Методы условной оптимизации

Условной оптимизацией называется поиск экстремума функций при ограничениях на изменение параметров.

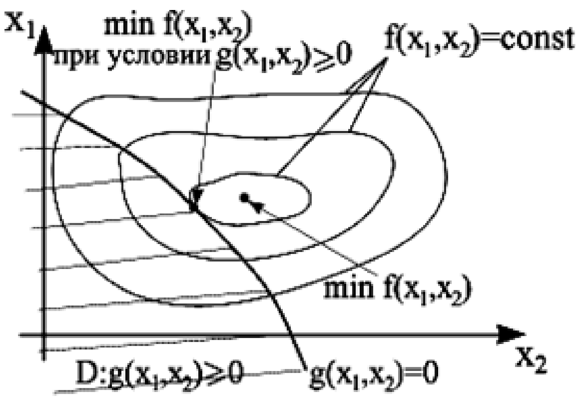


Рисунок 2.15 – Иллюстрация к задаче условной оптимизации

Постановка задачи: найти вектор $\overline{X}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, доставляющий минимум функции $f\,(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ при условиях (2.1), т.е. $g_j(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0$, j=1,2,…,m. Другими словами, требуется найти точку $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, в которой функция $f\,(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ достигает минимума, но эта точка должна принадлежать области D значений $x_1,x_2,\ldots,x_n$, в которой справедливы все ограничения (2.1), см. рис 2.15. Число ограничений m может быть как больше, так и меньше числа переменных n. Наиболее популярными методами поиска $\min f\,(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ при условиях (2.1) являются метод штрафных функций, метод прямого поиска с возвратом, метод возможных направлений, метод сеток.

2.5.1 Метод штрафных функций

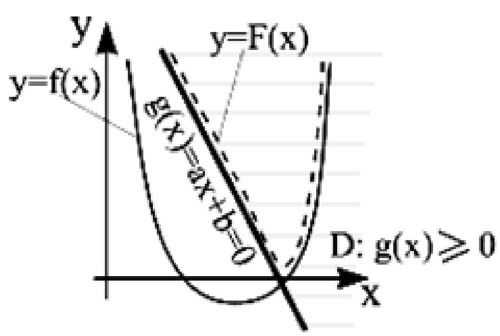


Рисунок 2.16 – Идея метода штрафных функций

Наличие ограничений учитывается путем изменения целевой функции - введения в нее штрафа за нарушение ограничений. Идея метода штрафных функций: применить один из методов безусловной оптимизации для поиска минимума функции:

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n)=f\,(x_1,\ldots,x_n)+ \alpha\cdot Ш(x_1,\ldots,x_n), \quad (2.13)$$

где α – положительное число, выбираемое таким образом, чтобы всюду за пределами области D выполнялось неравенство:

$$\alpha \cdot \left| \frac{\partial Ш(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_j} \right| >> \left| \frac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_j} \right|, \; j = 1,2,\ldots,n,$$

см. рис. 2.16. Функцию штрафа обычно записывают в виде:

$$Ш(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \sum_{j=1}^{m} q_j(x_1, x_2, ..., x_n), \qquad (2.14)$$

где $q_j(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{cases} \left[g_j(x_1, x_2, ..., x_n)\right]^2, \text{ если } g_j(x_1, x_2, ..., x_n) < 0 \\ 0, \textit{ если } g_j(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0 \end{cases}.$

Если ограничение одно (m=1), то необходимо найти минимум функции:

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n) = f\,(x_1,x_2,\ldots,x_n) + k\cdot\alpha\cdot[g(x_1,x_2,\ldots,x_n)]^2,$$

где $k = \begin{cases} 1 \text{ при } g(x_1, x_2, ..., x_n) < 0 \\ 0 \text{ при } g(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0 \end{cases}$, $\alpha >> 0$.

В области D функция $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ совпадает с функцией $f\,(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и процесс поиска ее минимума протекает так же, как и при отсутствии ограничений. В момент выхода за допустимую область функция $Ш(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ изменяет направление градиента функции $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и осуществляется возврат в допустимую область. Заметим, что возврат осуществляется не по нормали к линии ограничения, а под некоторым углом к ней в сторону уменьшения значений исходной целевой функции $f\,(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, см. рис. 2.17.

При использовании метода штрафных функций очень важен правильный выбор значения α . При слишком малом значении α может быть найдена точка за пределами допустимой области, а при слишком большом - функция $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ образует овраг вдоль поверхности $g(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0$.

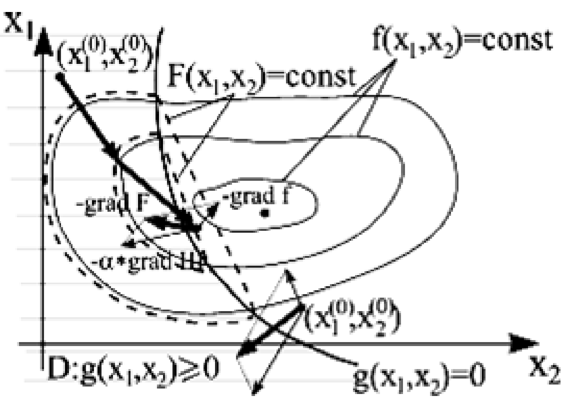


Рисунок 2.17 – Иллюстрация к алгоритму метода штрафных функций

Метод не чувствителен к выбору начальной точки поиска: если она окажется за пределами допустимой области, то штраф будет включен сразу.

Наиболее популярный алгоритм метода штрафных функций предусматривает формирование функции $Ш(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ согласно выражению (2.14) в начальной точке $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},..., x_n^{(0)})$ и использование для поиска min $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ метода градиента с постоянным шагом, где после каждого изменения значений $x_1,x_2,\ldots,x_n$ (см. (2.7)) вновь формируется функция $Ш(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

2.5.2 Метод прямого поиска с возвратом

В области D допустимых значений аргументов поиск min $f\,(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ осуществляется любым методом безусловной оптимизации (чаще всего используют метод градиента с постоянным шагом и наискорейшего спуска). При выходе за область D, когда некоторые из неравенств (2.1) нарушаются, поиск прекращается и осуществляется возврат в область D по направлению векторной суммы градиентов соответствующих функций $g_j(x_1, x_2,..., x_n), j \in (1,2,..., m)$, см. рис. 2.18. Другими словами, возврат в область D выполняется по градиенту функции

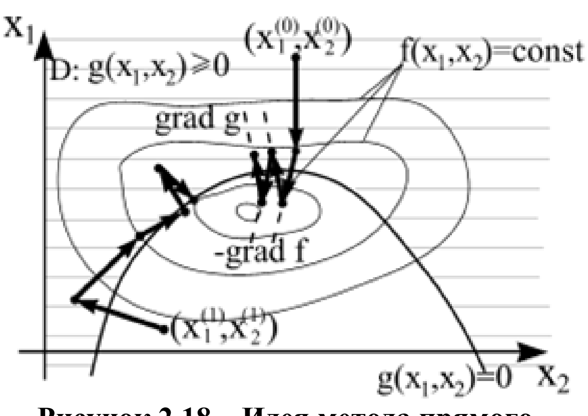


Рисунок 2.18 – Идея метода прямого поиска с возвратом

$$G(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{j=1}^{m} d_j(x_1,x_2,...,x_n)\,, \qquad (2.15)$$

где $d_j(x_1,x_2,...,x_n)=\begin{cases} g_j(x_1,x_2,...,x_n), \text{ если } g_j(x_1,x_2,...,x_n)<0 \\ 0, \textit{ если } g_j(x_1,x_2,...,x_n)\geq 0 \end{cases}$, т.е. значения параметров задачи изменяются следующим образом:

$$x_i^{(k+1)}=x_i^{(k)}+h\cdot\frac{\partial G(x_1^{(k)},x_2^{(k)},...,x_n^{(k)})}{\partial x_j}\Bigg/\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial G(x_1^{(k)},x_2^{(k)},...,x_n^{(k)})}{\partial x_j}\right]^2}\,. \qquad (2.16)$$

Здесь $(x_1^{(k)},x_2^{(k)},...,x_n^{(k)})$ – точка, в которой нарушаются ограничения, h – текущее значение шага поиска в области D. Дробление шага производится в ситуациях, когда значение функции в допустимой области увеличивается. Признак окончания поиска - выполнение неравенства $h<\varepsilon$.

Так же, как и метод штрафных функций, метод прямого поиска с возвратом не чувствителен к выбору начальной точки поиска: движение из точки $(x_1^{(1)},x_2^{(1)})$ на рис. 2.18 начнется сразу с применения формулы (2.16).

На практике ограничения часто задаются в виде:

$$x_i^{\min}\leq x_i\leq x_i^{\max},\ i\in(1,2,...,n)\,.$$

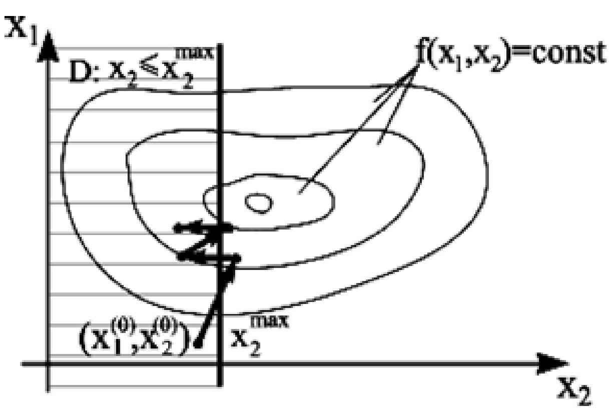


Рисунок 2.19 – Прямой поиск с возвратом при ограничении $x_2 \leq x_2^{max}$

При нарушении некоторых из них для возврата в область D по нормали к линии ограничения нет необходимости использовать соотношение (2.16) – достаточно уменьшить или увеличить соответствующие параметры на величину шага поиска (см. рис. 2.19).

Поскольку возврат в область D производится по нормали к линии ограничения, метод прямого поиска с возвратом проигрывает в скорости методу штрафных функций, но не связан с образованием "оврагов" целевой функции.

Алгоритм метода прямого поиска с возвратом предусматривает проверку выполнения ограничений (2.1) в начальной точке и после каждого изменения значений $x_1,x_2,\ldots,x_n$. В случае невыполнения некоторых из них согласно (2.15) формируется функция $G(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и значения $x_1,x_2,\ldots,x_n$ изменяются в соответствии с соотношением (2.16) до тех пор, пока не будет обеспечено выполнение всех ограничений (2.1).

2.5.3 Метод возможных направлений

Определения: а) Ω_0- *конус допустимых направлений* поиска $\min f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ при условиях $g_j(x_1,x_2,...,x_n)\geq 0$, j=1,2,…,m - все направления, которые не приводят к выходу за область D в окрестности текущей точки; б) Ω_1 - *конус подходящих* *направлений* - все направления, вдоль которых функция $f(x_1,x_2,...,x_n)$ убывает в окрестности текущей точки; в) $\Omega_0 \cap \Omega_1$ - *конус возможных направлений* - пересечение конусов допустимых и подходящих направлений, т.е. все направления в окрестности текущей точки, вдоль которых функция $f(x_1,x_2,...,x_n)$ убывает при выполнении ограничений.

Для любой точки $(x_1,x_2,\dots,x_n)$, лежащей на поверхности ограничений, в центре конуса Ω_1 находится вектор [-grad $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$], в центре конуса Ω_0 - вектор grad $G(x_1,x_2,\dots,x_n)$, см. рис 2.20. Функция $G(x_1,x_2,\dots,x_n)$ формируется согласно (2.15). Центру конуса возможных направлений будет соответствовать векторная сумма [-grad $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$] и grad $G(x_1,x_2,\dots,x_n)$, т.е. направление:

$$P_i(x_1,x_2,...,x_n) = -\frac{\dfrac{\partial f(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_i}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left[\dfrac{\partial f(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_j}\right]^2}} + \frac{\dfrac{\partial G(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_i}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left[\dfrac{\partial G(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_j}\right]^2}}, \quad i=1,2,\dots,n \quad (2.17)$$

В точке условного минимума функции $f(x_1,...,x_n)$ (на рис. 2.20 - т. (x_1^*, x_2^*)) конусы допустимых и подходящих направлений не пересекаются, т.е. конус возможных на-направлений пуст: векторы [-grad $f(x_1,\dots,x_n)$] и grad $G(x_1,\dots,x_n)$ лежат на одной прямой и направлены в разные стороны.

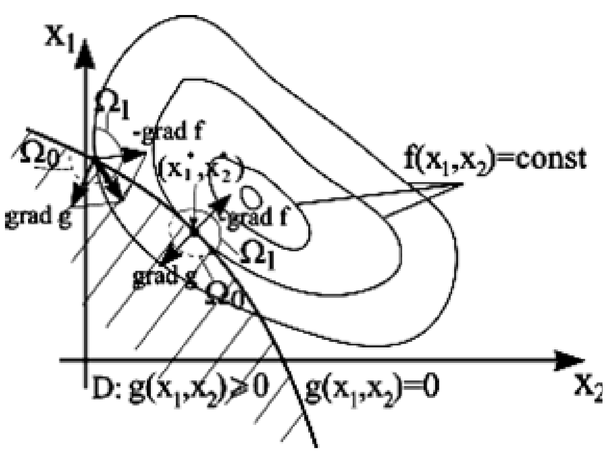


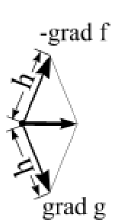
Рисунок 2.20 – Иллюстрация к методу возможных направлений

Алгоритм поиска условного минимума функции $f(x_1,x_2,...,x_n)$ методом возможных направлений:

- из начальной <u>точки внутри области *D*</u> осуществляется поиск $\min f(x_1,x_2,...,x_n)$ любым методом безусловной оптимизации (более предпочтителен метод градиента с постоянным шагом);
- при выходе за пределы области *D* поиск с предыдущей точки ведется в направлении, определяемом формулой (2.17);
- дробление шага поиска осуществляется, когда движение в центре конуса возможных направлений приводит к возрастанию целевой функции, либо когда первый же шаг в этом направлении приводит к нарушению ограничений;
- признак окончания поиска - выполнение неравенства $h < \varepsilon$.

<u>Замечание 1</u>: шаги в направлении, определяемом (2.17), следует нормировать:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + h\cdot \partial P_i(x_1^{(k)},x_2^{(k)},...,x_n^{(k)}) \Bigg/ \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left[\partial P_i(x_1^{(k)},x_2^{(k)},...,x_n^{(k)})\right]^2}, i=1,\dots,n;\ k=0,1,\dots, \quad (2.18)$$



иначе возможны ситуации (см. рисунок), когда величина шага поиска h значительна, а движение в конусе возможных направлений почти отсутствует.

<u>Замечание 2:</u> метод возможных направлений чувствителен к выбору начальной точки поиска - за пределами области допустимых зна-

чений параметров $x_1,x_2,\ldots,x_n$ возможные направления отсутствуют и алгоритм метода неработоспособен.

Для решения задач условной оптимизации можно также использовать метод сравнения значений целевой функции на сетке значений аргументов и метод случайных направлений. Алгоритм метода сеток предусматривает вычисление значений целевой функции только в тех точках $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, для которых выполняются все ограничения, а алгоритм метода случайных направлений относит к неперспективным и направления, движение вдоль которых приводит к нарушению хотя бы одного ограничения.

2.5.4 Поиск экстремума функций многих переменных при наличии связей

Постановка задачи: найти вектор $\overline{X}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, доставляющий минимум функции $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ при условиях (2.2), т.е. $h_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, $k = 1,2,\ldots,p$.

Популярным методом решения этой задачи **в ситуации *k* < *n*** является ***метод множителей Лагранжа***.

Этот метод предусматривает формирование функции Лагранжа по правилу:

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n) = f(x_1,x_2,\ldots,x_n) + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \cdot h_k(x_1,\ldots,x_n),$$

где $\lambda_k = \text{const}$, $k = 1,\ldots,p$ – множители Лагранжа. Необходимые условия экстремума функции Лагранжа задаются системой уравнений:

$$\frac{\partial F(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_i} = 0,\ i = 1,\ldots,n;$$

$$h_k(x_1,\ldots,x_n) = 0,\ k = 1,\ldots,p.$$

Тип условного экстремума функции $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, который соответствует решению $(x_1^*,\ldots,x_n^*)$ этой системы, определяется знаком полного дифференциала второй степени функции Лагранжа в этой точке:

$$d^2F = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} F''_{x_i x_j} dx_i dx_j\ .$$

Если $d^2F < 0$, то в точке $(x_1^*,\ldots,x_n^*)$ функция $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ имеет условный максимум, если $d^2F > 0$ – условный минимум, а если $d^2F = 0$, то $(x_1^*,\ldots,x_n^*)$ – седловая точка.

Пример. Найти условный экстремум функции $f(x_1,x_2) = x_1 + 3x_2$ при условии $x_1^2 + x_2^2 = 10$.

Функция Лагранжа: $F(x_1,x_2) = x_1 + 3x_2 + \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 10)$, ее частные производные: $\frac{\partial F}{\partial x_1} = 1 + 2\lambda x_1$, $\frac{\partial F}{\partial x_2} = 3 + 2\lambda x_2$. Необходимые условия экстремума функции Лагранжа: $\begin{cases} 1 + 2\lambda x_1 = 0, \\ 3 + 2\lambda x_2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 - 10 = 0. \end{cases}$ Эта система уравнений имеет два решения: ($x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $\lambda = -0.5$) и ($x_1 = -1$, $x_2 = -3$, $\lambda = 0.5$). Полный дифференциал второй степени функции $F(x_1,x_2)$: $d^2F = F''_{x_1x_1}dx_1^2 + 2F''_{x_1x_2}dx_1dx_2 + F''_{x_2x_2}dx_2^2 = 2\lambda\left(dx_1^2 + dx_2^2\right)$. Очевидно, что $\left(dx_1^2 + dx_2^2\right) > 0$, поэтому решению ($x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $\lambda = -0.5$) соответствует условный максимум функции $f(x_1,x_2)$ ($f(1,3) = 10$), а решению ($x_1 = -1$, $x_2 = -3$, $\lambda = 0.5$) – условный минимум ($f(-1,-3) = -10$).

Очевидно, что метод множителей Лагранжа применим только в случае, когда частные производные функции $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ можно записать аналитически и определить их точные значения в любой точке. В п. 2.4.1 отмечено, что в практических задачах, связанных с поиском оптимальных значений параметров конструкции и режима функционирования технических объектов, найти значения производных аналитически, как правило, не удается, поэтому в современной инженерной практике метод множителей Лагранжа применяется редко.

Чаще всего для решения задач условной оптимизации при условиях вида (2.2) используется следующий прием: связи $h_k(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0$, $k = 1,2,\ldots,p$ заменяются ограничениями, см. рис. 2.21:

$$\begin{matrix} h_k\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right) + \delta_k \ge 0 \\ h_k\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right) - \delta_k \le 0 \end{matrix}, \quad k = 1,\ldots,p \qquad (2.19)$$

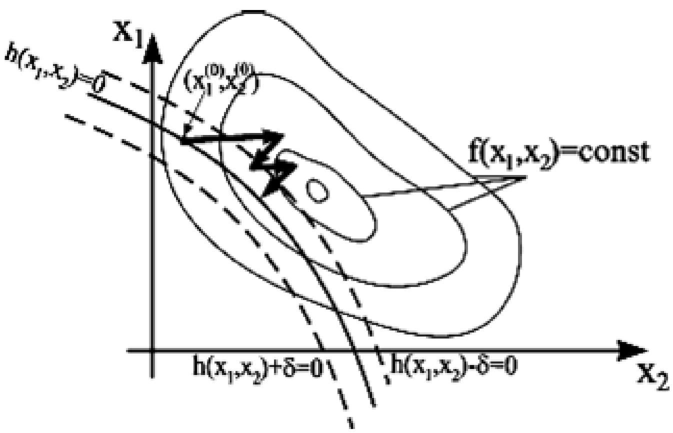


Рисунок 2.21 – Поиск min $f(x_1,x_2)$ при условии $h(x_1,x_2) = 0$

и задача решается методом штрафных функций, прямого поиска с возвратом или возможных направлений. Чем меньше значения δ_k, тем ближе решение новой задачи к исходной, но сложнее поиск. Обычно задают начальные значения δ_k, $k = 1,2,\ldots,p$ (не слишком маленькие), находят решение новой задачи, а затем постепенно уменьшают δ_k, пока они не станут меньше заданной точности. Таким же образом поступают со связями в случае решения задачи условной оптимизации при наличии и ограничений и связей.

Замечание. Для нахождения начальной точки поиска, удовлетворяющей неравенствам (2.19), рекомендуется найти значения $x_1,x_2,\ldots,x_n$, доставляющие минимум функции $\sum_{k=1}^{p}\left[h_k\left(x_1,\ldots,x_n\right)\right]$.

2.6 Задачи линейного программирования

Это задачи оптимизации, критерий оптимальности которых представляет собой линейную функцию, а ограничения – линейные равенства и неравенства. Значительное число планово-производственных задач являются задачами линейного программирования (задача планирования выпуска продукции, транспортная задача, задачи раскроя, задача о назначениях и т.д.).

Пример (*задача планирования выпуска продукции*). С учетом имеющихся запасов сырья и парка оборудования составить план выпуска продукции, при котором предприятие получит максимальную прибыль.

Пусть предприятие (цех) выпускает четыре вида продукции A_1,A_2,A_3,A_4, максимальный объем средств на закупку сырья составляет b_1 руб., средств на оплату персонала – b_2 руб., средств на закупку тары для упаковки продукции (мешки, бочки) – b_3 руб. Затраты каждого производственного фактора (сырье, рабочие, тара) на единицу каждого вида продукции составляют a_{ij} ,i=1,2,3; j=1,2,3,4 руб./тонну, прибыль с единицы продукта A_j составляет C_j руб/т, j=1,2,3,4. Необходимо определить объемы выпуска продуктов x_1,x_2,x_3,x_4, при которых предприятие получит наибольшую прибыль.

Затраты составляют:

- на сырье: $a_{11}\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+a_{13}\cdot x_3+a_{14}\cdot x_4$ руб. (не должны превосходить b_1);
- на персонал: $a_{21}\cdot x_1+a_{22}\cdot x_2+a_{23}\cdot x_3+a_{24}\cdot x_4$ руб. (не должны превосходить b_2) ;
- на тару: $a_{31}\cdot x_1+a_{32}\cdot x_2+a_{33}\cdot x_3+a_{34}\cdot x_4$ руб. (не должны превосходить b_3).

Прибыль составит $C_1\cdot x_1+C_2\cdot x_2+C_3\cdot x_3+C_4\cdot x_4$ руб., следовательно, математическая формулировка задачи имеет вид:

найти значения x_1^*,x_2^*,x_3^*,x_4^*, при которых функция

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4)=C_1\cdot x_1+C_2\cdot x_2+C_3\cdot x_3+C_4\cdot x_4$$

достигает максимума и выполняются условия:

$$a_{11}\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+a_{13}\cdot x_3+a_{14}\cdot x_4 \le b_1$$
$$a_{21}\cdot x_1+a_{22}\cdot x_2+a_{23}\cdot x_3+a_{24}\cdot x_4 \le b_2$$
$$a_{31}\cdot x_1+a_{32}\cdot x_2+a_{33}\cdot x_3+a_{34}\cdot x_4 \le b_3$$

2.6.1 Формулировка основной задачи линейного программирования

Критерий оптимальности решения задачи $F(x_1,x_2,...,x_n)$ имеет вид :

$$F = \sum_{j=1}^{n}\left(c_j \cdot x_j\right), \tag{2.20}$$

где c_j – заданные постоянные коэффициенты. Функцию (2.20) называют “линейной формой ” или “экономической функцией”. Значения переменных x_j, j=1,2,...,n должны удовлетворять ограничениям:

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1$$
$$a_{21}x_2+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2$$

$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=b_m \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{n}\left(a_{ik} \cdot x_k\right)=b_i\ ,\ i=1,2,...,m \tag{2.21}$$

$$x_j \ge 0,\ j=1,2,...,n. \tag{2.22}$$

Необходимо найти такое неотрицательное решение системы ограничений (2.21), при котором функция (2.20) достигает наименьшего (наибольшего) значения.

Замечания: 1. Число линейно-независимых ограничений (2.21) должно быть меньше числа неизвестных n. В противном случае задача имеет не более одного решения и не является задачей оптимизации.

2. Функция (2.20) не имеет экстремумов, поэтому задача линейного программирования без ограничений не имеет смысла. Точка экстремума функции (2.20) всегда принадлежит одному или нескольким ограничениям.

3. Если среди ограничений (2.21) есть неравенства $\sum_{k=1}^{n}\left(a_{ik}\cdot x_k\right)\geq b_i$, то они превращаются в равенства путем введения дополнительных неизвестных: $\sum_{k=1}^{n}\left(a_{ik}\cdot x_k\right)-x_{n+i}=b_i$, которые не включаются в целевую функцию.

Определение: Степенью неопределенности системы ограничений (2.21) называется разность между числом неизвестных и числом ограничений $p = n–m$.

Пример. Решить систему двух уравнений с тремя неизвестными.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases} \rightarrow m=2,\ n=3\ ,\ p=3\text{-}2=1$$. Преобразуем систему:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 - x_3 \\ -x_1 + x_2 = 2 + 2x_3 \end{cases}$$. Если присвоить x_3 произвольное значение, то получим систему двух уравнений с двумя неизвестными. Определитель этой системы: $\Delta= 2–1=1\neq0$, следовательно, она имеет единственное решение. Сложив уравнения системы получим: $x_1=3+x_3$; умножив 2-е уравнение на 2 и сложив с 1-м получим: $x_2=5+3x_3$.Таким образом, общее решение рассматриваемой системы:

$$\begin{cases} x_1 = 3 + x_3 \\ x_2 = 5 + 3x_3 \end{cases}$$, где x_3 может принимать любое значение. Переменные x_1 и x_2 называются базисными неизвестными, а x_3 – свободной неизвестной . В общем случае число базисных неизвестных равно m, а свободных: $n–m = p$.

Алгоритм поиска общего решения задачи (2.20)-(2.22):

1. Выбираются r базисных неизвестных задачи (те, коэффициенты при которых в системе (2.21) образуют отличный от нуля определитель). Остальные $n–r$ неизвестных считаются свободными, слагаемые с этими неизвестными переносятся в правые части уравнений.

2. Полученная система r уравнений с r неизвестными решается относительно базисных переменных (ее решение единственно). Результат – выражение r базисных переменных через $n–r$ свободных.

3. Присваивая свободным неизвестным произвольные неотрицательные значения, будем получать различные допустимые решения задачи $(x_1,x_2,...,x_n)$. Искомое оптимальное решение соответствует минимальному или максимальному значению функции (2.20).

Оптимальное решение существует, если существует хотя бы одно допустимое решение и если функция (2.20) ограничена сверху (при поиске max F) или снизу (при поиске min F).

2.6.2 Геометрическое представление задачи линейного программирования

При p=2 решение задачи линейного программирования (ЛП) можно найти с помощью ее *геометрического представления*. В качестве примера рассмотрим задачу: найти значения x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, при которых функция

$$F = -4\cdot x_1+6\cdot x_2+2\cdot x_3-4\cdot x_4+7\cdot x_5+3\cdot x_6$$

достигает минимума и выполняются ограничения:

$$\begin{cases} 2\cdot x_1+x_2-x_3=4 \\ x_1-x_2+x_4=6 \\ x_1+x_2+x_5=12 \\ x_2+x_6=7 \end{cases},\ x_i\geq 0,\ i=1,2,...,6\rightarrow n=6,\ m=4,\ p=6–4=2.$$

Будем считать x_3, x_4, x_5, x_6 - базисными переменными, а x_1, x_2 - свободными:

$$\begin{cases} x_3=-4+2\cdot x_1+x_2; \\ x_4=6-x_1+x_2; \\ x_5=12-x_1-x_2; \\ x_6=7-x_2; \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x_1\geq 0; \\ x_2\geq 0; \\ 2x_1+x_2-4\geq 0; \\ 6-x_1+x_2\geq 0; \\ 12-x_1-x_2\geq 0; \\ 7-x_2\geq 0; \end{cases}$$

$$x_i\geq 0, i=1,...,6$$

Последняя система неравенств относительно свободных неизвестных определяет множество пар неотрицательных значений (x_1,x_2), каждой из которых соответствует четверка неотрицательных значений базисных переменных (x_3,x_4,x_5,x_6). Выявим геометрический смысл этой системы неравенств, характеризующей множество допустимых решений задачи. Построим на плоскости x_1x_2 прямые, соответствующие случаю равенств, см. рис. 2.22. Каждая из этих прямых делит плоскость на две полуплоскости: в одной из них соответствующее ограничение выполняется (по направлению стрелок), в другой - нет. Область допустимых решений задачи (D) - это пересечение полуплоскостей, где ограничения выполняются, в данном случае - выпуклый замкнутый многоугольник. Каждая его вершина - это пересечение двух прямых из системы ограничений, в ней две переменные обращаются в нуль. Выразим целевую функцию через свободные переменные: $F = 4\cdot x_1+6\cdot x_2+$ $+2\cdot(2\cdot x_1+x_2-4) – 4\cdot(6–x_1+x_2)+$ $+7\cdot(12–x_1–x_2)+3\cdot(7–x_2) =73–3\cdot x_1–6\cdot x_2$ и построим линии ее равных значений. Поскольку функция F линейна,

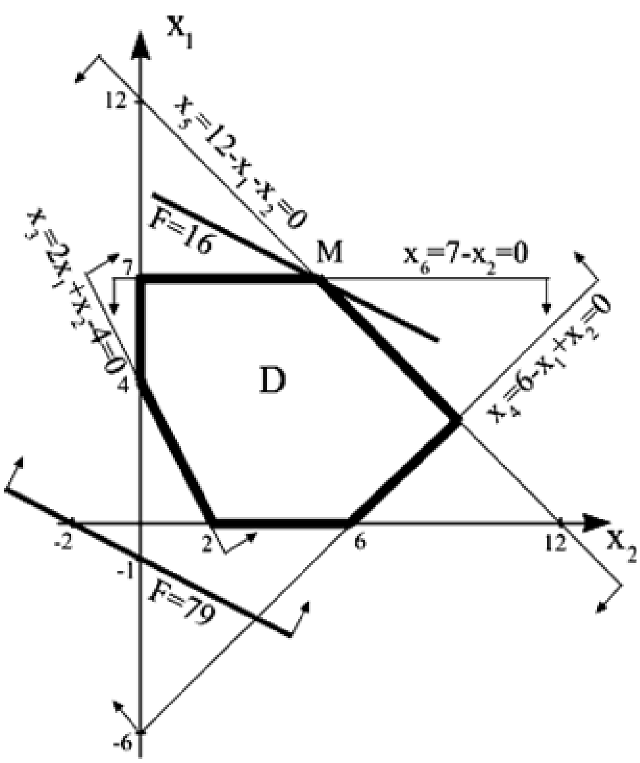


Рисунок 2.22 – Решение задачи линейного программирования при p = 2

эти линии представляют собой параллельные прямые, например при F=79 уравнение линии имеет вид: $3\cdot x_1+6\cdot x_2=–6$. Построим эту линию и учтем, что значение F уменьшается в направлении, показанном стрелками.

Из рисунка видно, что наименьшего значения функция F достигает в точке M(x_1=5; x_2=7): F(5,7)=73–3·5–6·7=73–15–42=16. Найдем оптимальные значения базисных переменных: $x_3= -4+2\cdot5+7=13$; $x_4=6-5+7=8$; $x_5=12-5-7=0$; $x_6=7-7=0$ (т.M - пересечение прямых $x_5=0$ и $x_6=0$).

Из анализа геометрического представления основной задачи линейного программирования можно сделать следующие выводы:

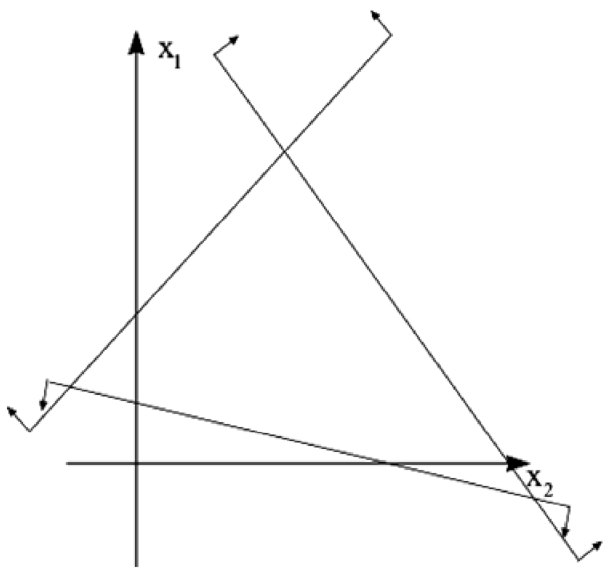
1) если задача имеет решение, то область D ее допустимых решений представляет собой выпуклый многогранник;

2) задача не имеет решения, если область D пуста, т.е. ни одна комбинация значений x_j, $j=1, 2,...,n$ не удовлетворяет всем ограничениям, см. рис. 2.23*а*;

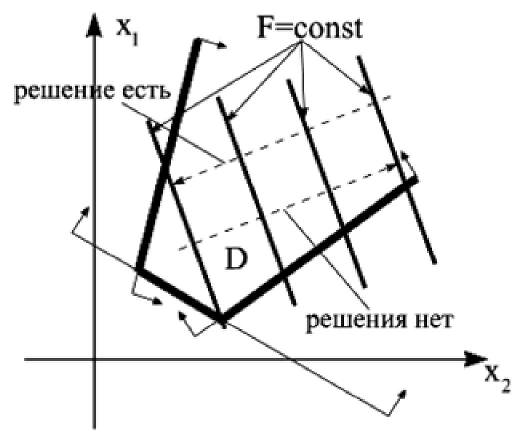
3) если область D не замкнута, то наличие или отсутствие решения задачи зависит от направления желательного изменения функции F, см. рис. 2.23*б*;

4) возможна ситуация, когда линии равных значений функции F параллельны одной из линий ограничений, в этом случае задача имеет множество решений, каждому из которых соответствует одно и то же значение F;

5) функция F имеет единственный экстремум (глобальный), т.к. выпуклая функция на выпуклом множестве не может иметь более одного экстремума.



а – область D пуста



б – область D не замкнута

Рисунок 2.23 – Варианты области допустимых решений задачи ЛП

2.6.3 Симплекс-метод решения задач линейного программирования

Определение: решение основной задачи линейного программирования, соответствующее одной из вершин многогранника допустимых решений, называется *опорным*. В каждом из них не менее p неизвестных равны нулю.

Оптимальное решение задачи, если оно существует, совпадает по крайней мере с одним из опорных. Если линии равных значений функции F параллельны линии одного из ограничений, то оптимальное решение совпадает с несколькими опорными. На этом свойстве основной задачи линейного программирования основан общий алгоритм ее решения: найти все опорные решения и выбрать лучшее с точки зрения целевой функции. Применение этого алгоритма для решения практических задач встречает затруднения, связанные с большим числом неизвестных и ограничений.

Симплекс-метод предусматривает организацию упорядоченного перебора опорных решений, начиная с некоторого начального: от рассматриваемого в данный момент опорного решения производится переход к такому соседнему, где значение функции F более предпочтительно, а если среди соседних опорных решений такого нет, то рассматриваемое решение является оптимальным. Рассмотрим симплекс-метод более детально на примере предыдущей задачи:

$$F = -4\cdot x_1+6\cdot x_2+2\cdot x_3-4\cdot x_4+7\cdot x_5+3\cdot x_6 \to min \text{ при условиях:}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 12 \\ x_2 + x_6 = 7 \\ x_i \geq 0,\ i = 1,\ldots,6 \end{cases}$$

Примем в качестве начального опорного решение $x_1=0$, $x_2=0$, т.е. x_1,x_2 являются свободными неизвестными, x_3,x_4,x_5,x_6 - базисными:

$$\begin{cases} x_3 = 2x_1 + x_2 - 4 \geq 0; \\ x_4 = 6 - x_1 + x_2 \geq 0; \\ x_5 = 12 - x_1 - x_2 \geq 0; \\ x_6 = 7 - x_2 \geq 0; \end{cases}$$

Выбранное опорное решение не допустимо, т.к. при $x_1=0$, $x_2=0$ первое ограничение не выполняется. Будем считать свободными неизвестными x_2 и x_4, базисными - x_1,x_3,x_5,x_6:

$$\begin{cases} x_1 = 6 - x_4 + x_2 \geq 0; \\ x_3 = 2x_1 + x_2 - 4 = 8 + 3x_2 - 2x_4 \geq 0; \\ x_5 = 12 - x_1 - x_2 = 6 - 2x_2 + x_4 \geq 0; \\ x_6 = 7 - x_2 \geq 0; \end{cases}$$

При $x_2=0$, $x_4=0$ все ограничения выполняются, т.е. выбранное опорное решение допустимо. Выразим функцию F через свободные неизвестные: $F=55-9\cdot x_2+3\cdot x_4$. Опорному решению соответствует $F=55$ и оно не является оптимальным, т.к. коэффициент при x_2 в выражении для целевой функции отрицателен и ее значение можно уменьшить, увеличивая x_2. При $x_4=0$ и увеличении x_2 раньше других неизвестных обращается в 0 x_5 (при $x_2=3$), т.е. ближайшим к рассмотренному опорным решением является: $x_4=0$, $x_5=0$. Считая x_4 и x_5 свободными неизвестными, а x_1,x_2,x_3,x_6 - базисными, получим:

$$\begin{cases} x_1 = 9 - 0.5x_4 - 0.5x_5 \geq 0; \\ x_2 = 3 + 0.5x_4 - 0.5x_5 \geq 0; \\ x_3 = 17 - 0.5x_4 - 1.5x_5 \geq 0; \\ x_6 = 4 - 0.5x_4 + 0.5x_5 \geq 0; \end{cases}$$

Выразив функцию F через свободные неизвестные, в данном случае имеем: $F=28-1.5\cdot x_4+4.5\cdot x_5$. Значение $F=28$ можно уменьшить путем увеличения x_4, следовательно и опорное решение $x_4=0$, $x_5=0$ не является оптимальным.

Ближайшим к нему опорным решением является $x_5=0$, $x_6=0$, т.к. при увеличении x_4 и $x_5=0$ раньше других неизвестных обращается в 0 x_6 (при $x_4=8$). Примем за свободные неизвестные x_5,x_6, за базисные - x_1,x_2,x_3,x_4. Тогда:

$$\begin{cases} x_1 = 5 - x_5 + x_6 \geq 0; \\ x_2 = 7 - x_6 \geq 0; \\ x_3 = 13 - 2x_5 + x_6 \geq 0; \\ x_4 = 8 + x_5 - 2x_6 \geq 0; \end{cases}$$

$F=16+3\cdot x_5+3\cdot x_6$. При $x_5=0$, $x_6=0$ $F=16$ и не может быть уменьшено путем увеличения x_5 или x_6, следовательно, решение: $x_1=5$, $x_2=7$, $x_3=13$, $x_4=8$, $x_5=0$, $x_6=0$ является оптимальным .

Алгоритм симплекс

1. Найти произвольное опорное решение задачи, выразить целевую функцию через свободные неизвестные. Если решается задача поиска минимума целевой функции и все коэффициенты в этом выражении положительны (при поиске

максимума – отрицательны), то найденное решение оптимально, иначе – не оптимально.

2. Если решение не оптимально, перейти к более предпочтительному соседнему опорному решению. Для этого:

а) свободная неизвестная, имеющая в выражении для функции цели отрицательный (положительный) коэффициент, переводится в число базисных;

б)в число свободных переводится базисная неизвестная, которая раньше других обращается в нуль при увеличении (уменьшении) свободной неизвестной, переведенной в базисные.

Пункт 2 выполняется до тех пор, пока не будет получено оптимальное решение.

Недостатком этого алгоритма является неочевидный способ получения исходного опорного решения, т.к. реальные производственные задачи обычно содержат много ограничений. Иногда допустимое опорное решение получают из произвольного с помощью симплекс-метода.

2.6.4 Особенности постановки транспортной задачи

Пусть имеется m поставщиков товаров, причем объемы поставок равны $a_1,a_2,\ldots,a_m$, и n потребителей этих товаров в объемах $b_1,b_2,\ldots,b_n$. Стоимость перевозки единицы товара от i-го поставщика к j-му потребителю равна c_{ij}, $i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2,\ldots,n$. Задача состоит в том, чтобы определить объемы поставок товара x_{ij} от i-го поставщика j-му потребителю $i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2,\ldots,n$, при которых суммарные транспортные расходы будут минимальными, т.е. необходимо найти такие значения $x_{ij} \geq 0$, при которых функция

$$F=c_{11}\cdot x_{11}+c_{12}\cdot x_{12}+\ldots+c_{mn}\cdot x_{mn}$$

достигает минимума и выполняются ограничения на поставку продукции

$x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1n}=a_1$ и на ее потребление $x_{11}+x_{21}+\ldots+x_{m1}=b_1$

$x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2n}=a_2$ $\qquad$ $x_{12}+x_{22}+\ldots+x_{m2}=b_2$

…………………… $\qquad$ ……………………

$x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mn}=a_m$ $\qquad$ $x_{1n}+x_{2n}+\ldots+x_{mn}=b_n$.

Если $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$, то задача называется сбалансированной. В производственной практике значительно чаще встречаются задачи с дебалансом, когда $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$. Если $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ (спрос превышает предложение), то вводится дополнительный фиктивный поставщик с номером m+1 и объемом поставок $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$, причем коэффициенты $c_{m+1,j}$ при неизвестных $x_{m+1,j}$, $j=1,2,\ldots,n$ в выражении для функции F принимаются равными 0, а полученные в результате решения задачи значения этих неизвестных игнорируются. В ситуации $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$ (спрос превышает предложение) наоборот – вводится фиктивный потребитель с объемом потребления $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$. В этой ситуации $c_{i,n+1}$=0, $i=1,2,\ldots,m$, а полученные значения $x_{i,n+1}$ i=1,2,…,m игнорируются.

Пример. Минимизировать расходы на перевозку товара с двух складов в три магазина (сбалансированная задача):

$$F=20x_{11}+20x_{12}+30x_{13}+30x_{21}+40x_{22}+20x_{23}\to min$$

№ склада	Цена перевозки 1 шт 1-й м-н	2-й м-н	3-й м-н	Объем поставок
1	20	20	30	1800
2	30	40	20	2600
Потребности(шт.)	1000	1200	2200	

при ограничениях на поставку

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}=1800$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}=2600$$

и на потребление

$$x_{11}+x_{21}=1000$$
$$x_{12}+x_{22}=1200$$
$$x_{13}+x_{23}=2200$$

$x_{ij}\geq 0$, i=1,2; j=1,2,3.

2.7 Вариационные задачи и методы их решения

Основные определения:

1. Если каждой *функции* $x(t)$ из класса функций M (непрерывных, кусочно-линейных, кусочно-постоянных и др.) по некоторому правилу поставлено в соответствие *число*, то в классе функций M определен функционал $I = I\,[x(t)]$. Например, если M – совокупность всех непрерывных функций $x(t), t\in[0;1]$, то

$I[x(t)]=\int\limits_0^1 x(t)dt$ есть функционал от $x(t)$.

2. Вариацией Δx аргумента $x(t)$ функционала $I\,[x(t)]$ называется разность между двумя функциями $x(t)$ и $x_0(t)$, принадлежащими выбранному классу M. Если значение $|\,x(t) - x_0(t)|$ мало $\forall t\in[t_н,t_к]$ то функции $x(t)$ и $x_0(t)$ близки на отрезке $[t_н,t_к]$ (кривые близки по ординатам).

3. Приращением функционала $I\,[x(t)]$, соответствующим вариации Δx его аргумента $x(t)$, называется величина $\Delta I = I\,[x(t) + \Delta x] - I\,[x(t)]$. Функционал достигает на функции $x_0(t)$ минимума, если значение $I\,[x(t)]$ для любой функции, близкой к $x_0(t)$, не меньше, чем $I\,[x_0(t)]$, т.е. $\Delta I_0 = I\,[x(t)] - I\,[x_0(t)] \geq 0$.

4. Вариационными задачами (ВЗ) называют задачи оптимизации, решениями которых являются функции некоторого заранее выбранного класса. Критерием оптимальности решения вариационной задачи является функционал, определенный в выбранном классе функций (в общем виде – $I = I\,[x_1(t),\ldots, x_n(t)]$). Такие задачи возникают при выборе оптимальной конструкции и режима работы объектов химической технологии с распределенными параметрами.

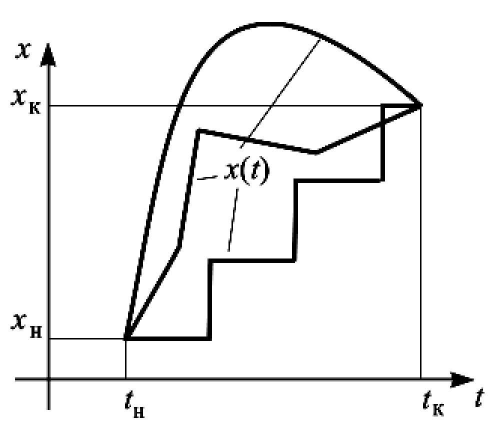


Рисунок 2.24 – Решения ВЗ с закрепленными концами

Для случая одной искомой функции $x(t)$ значения функционала $I\,[x(t)]$ можно рассматривать как оценку качества линий, соединяющих точки с координатами $(t_н,x_н)$ и $(t_к,x_к)$, т.е. качества способа перехода какого-либо объекта из начального состояния в конечное. Условия $x(t_н)=x_н$, $x(t_к)=x_к$, характеризующие начальное и конечное состояния, называются граничными условиями. В данном случае граничные условия определяют точки на плоскости xt. Вариационные задачи, решаемые при подобных граничных условиях ($x_i(t_н)=x_i^{(н)}$, $x_i(t_к)=x_i^{(к)}$, $i=1,2,...,n$), называются задачами с закрепленными концами, см. рис. 2.24.

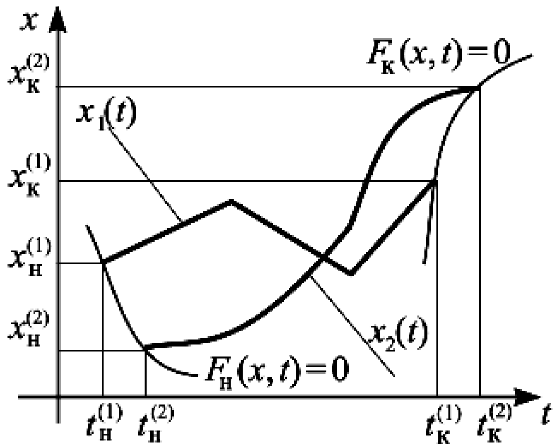


Рисунок 2.25 – Решения ВЗ со свободными концами

Начальное и конечное состояния объекта исследования может характеризоваться не точками фазовой плоскости, а областями, заданными в виде функций $F_н(x,t)=0$, $F_к(x,t)=0$ или в общем случае: $F_н(x_1,x_2,...,x_n,t)=0$, $F_к(x_1,x_2,...,x_n,t)=0$. При таких граничных условиях в число определяемых параметров входят и значения $t_н$, $t_к$, а если они зафиксированы жестко, то параметр t исключается из числа аргументов функций $F_н$, $F_к$. Вариационные задачи с такими граничными условиями называются задачами со свободными концами, см. рис. 2.25.

Обычно функционал записывается в виде: $I[x(t)]=\int_{t_н}^{t_к}\varphi(x,t)\,dt$, где $\varphi(x,t)$ – заданная функция переменных x и t, а x, в свою очередь, является функцией независимой переменной t. На изменение функции $x(t)$, определяемой при решении задачи поиска экстремума $I[x(t)]$, могут быть наложены различные ограничения. Чаще всего при решении практических задач встречаются ограничения в форме дифференциальных уравнений, например $dx/dt=x_t$. С учетом наличия подобных ограничений функционал записывается в виде : $I[x(t)]=\int_{t_н}^{t_к}\varphi(x,x',t)\,dt$, где $x'=dx/dt$, или в общем случае:

$$I[x_1(t),...,x_n(t)]=\int_{t_н}^{t_к}\varphi(x_1,...,x_n,x_1',...,x_n',t)\,dt .$$

Таким образом, наиболее часто встречающаяся постановка вариационной задачи предусматривает поиск таких функций $x_i(t)$, $i=1,2,...,n$ из выбранного класса, что функционал $I[x_1(t),...,x_n(t)]=\int_{t_н}^{t_к}\varphi(x_1,...,x_n,x_1',...,x_n',t)\,dt$ достигает экстремума при выполнении ограничений на искомые функции: $F_н(x_1,...,x_n,t)=0$, $F_к(x_1,...,x_n,t)=0$.

Замечание. Подобные задачи решаются и для объектов с сосредоточенными параметрами – при поиске оптимальных изменений характеристик режима их функционирования во времени (температуры, давления, расходов сырья и теплоносителей).

Методы решения вариационных задач рассмотрим на примере задачи поиска минимума функционала $I[x(t)]=\int_{t_н}^{t_к}\varphi(x,x',t)\,dt$ при граничных условиях $x(t_н)=x_н$, $x(t_к)=x_к$. *Необходимое условие* достижения функционалом $I[x(t)]$ экстремума на функции $x(t)$: функция $\varphi(x,x',t)$ должна иметь непрерывные частные производные до второго порядка по всем аргументам и удовлетворять уравнению Эйлера $x''(t)\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'^2}+x'(t)\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'\partial x}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial x'}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}$. Например, для функционала $I[x(t)]=\int_1^2(x'^2-2\cdot x\cdot t)\,dt$ уравнение Эйлера имеет вид $x''-t=0$, решением которого при граничных условиях $x(1)=0$, $x(2)=1$ является функция $x(t)=\frac{t}{6}\cdot\left(1-t^2\right)$. К сожалению, это условие не является достаточным и не характеризует вид экстремума, поэтому на практике применяется сравнительно редко.

Чаще всего вариационные задачи решаются численными методами, которые предусматривают сведение вариационной задачи к последовательности задач нелинейного программирования. Наиболее популярными являются представление искомой функции в виде кусочно-линейной зависимости и метод Рица.

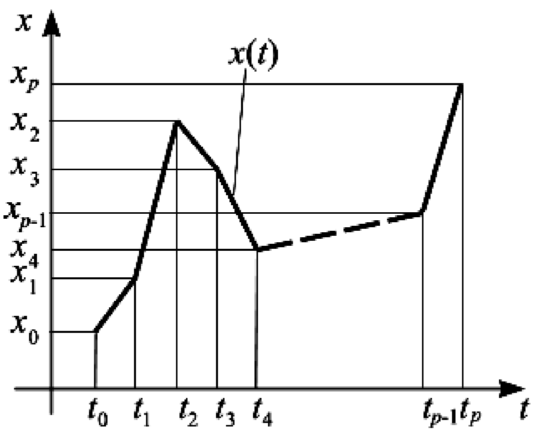


Рисунок 2.26 – Кусочно-линейное представление $x(t)$

Представление искомой функции в виде кусочно-линейной зависимости предусматривает разбиение отрезка $[t_н,t_к]$ оси t точками $t_1,t_2,\ldots,t_{p\text{-}2}$, $t_{p\text{-}1}$ на p микроотрезков и поиск значений $x_1,x_2,\ldots,x_{p\text{-}2},x_{p\text{-}1}$, при которых функция

$$F_к\left(x_1,x_2,\ldots,x_{p-1}\right)=\frac{t_p-t_0}{p}\cdot\sum_{i=1}^{p}\varphi\left(x_i,\frac{x_i-x_{i-1}}{t_i-t_{i-1}},t_i\right)$$

достигает минимума. Здесь $t_0=t_н$, $x_0=x_н$, $t_p=t_к$, $x_p=x_к$, см. рис. 2.26. Найдя минимум функции F при фиксированном значении p, увеличивают число микроотрезков и вновь решают задачу поиска ее минимума. Функция $x(t)$ считается найденной, если значения $\min F_к$, найденные при p и $(p+1)$ микроотрезках, отличаются не более чем на заданную величину.

Пример. Найти $min\ I[x(t)]=\int_0^2[x^2+(1-x')^2]dt$ при условиях $x(0)=0$, $x(2)=1$.

Зафиксируем $p=2\rightarrow t_0=0,\ x_0=0;\ t_1=1,\ x_1=?;\ t_2=2,\ x_2=1$.

$$F_к(x_1)=\sum_{i=1}^{2}\left[x_i^2+\left(1-\frac{x_i-x_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}\right)^2\right]=x_1^2+\left(1-\frac{x_1-x_0}{t_1-t_0}\right)^2+x_2^2+\left(1-\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}\right)^2=3x_1^2-2x_1+2,$$

$dF_к/dx_1=6x_1-2=0$, $x_1=1/3$; $d^2F_к/dx_1^2=6>0\ \rightarrow\ x_1=1/3$ – точка $\min F_к(x_1)$; $F_к(1/3)=1.67$. При $p=3$ пришлось бы искать x_1 и x_2, при $p=4$ – x_1,x_2 и x_3 и т.д.

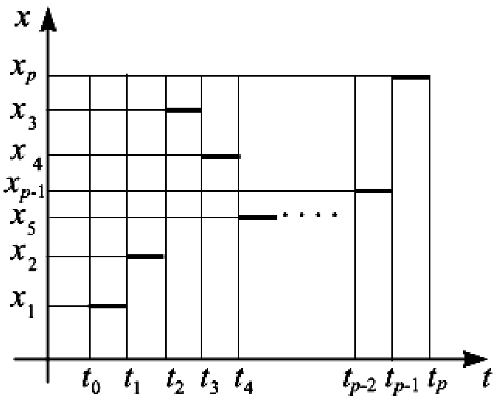


Рисунок 2.27 – Кусочно-постоянное представление $x(t)$

Популярной разновидностью этого метода является представление функции $x(t)$ в виде кусочно-постоянной зависимости, см. рис. 2.27. В данном случае осуществляется поиск координат ,"точек переключения" t_j, j=1,2,...,p-1 и соответствующих фиксированных значений x_j, j=1,2,...,p-1 функции $x(t)$. В "точках переключения" $x(t)$ скачком изменяет одно фиксированное значение на другое, т.е. $x(t) = x_j = \text{const}$, $t_{j-1} \le t < t_j$, j=1,2,..., p-1, $t_0=t_н$, $t_p=t_к$. Поскольку на каждом из микроотрезков $x(t)$ = const, функция $\varphi(x,x',t)$ вырождается в функцию $\varphi(x_j)$ и задача сводится к поиску таких значений $t_1,...,t_{p-1}$, $x_1,...,x_{p-1}$, при которых функция $F_п(t_1,...,t_{p-1},x_1,...,x_{p-1}) = \sum_{j=1}^{p}[\varphi(x_j)\cdot(t_j - t_{j-1})]$ достигает минимума. Часто значения p, $x_1,...,x_p$ фиксированы и задача (задача поиска координат "точек переключения" t_j, j=1,2,...,p-1) решается один раз. Если значение p не задано заранее, применяется прием его последовательного увеличения до получения достаточно близких значений min $F_п$ при p и (p+1) "точках переключения".

Пример. Решить задачу предыдущего примера.

$p=2 \to t_0=0$; t_1=?, x_1=?; $t_2=2$, $x_2=1$. $F_п(t_1,x_1) = (x_1^2+1)\cdot(t_1 - t_0) + (x_2^2+1)\cdot(t_2 - t_1) =$
$= t_1\cdot(x_1^2-1)+4$, причем $F'_{пt_1} = x_1^2 - 1 = 0$, $F'_{пx_1} = 2 \cdot x_1 \cdot t_1 = 0$, $\to$ $t_1=0$, $x_1=1$. Определим характер найденной точки: $F''_{пt_1}=0$, $F''_{пt_1x_1} = F''_{пx_1t_1} = 2 \cdot x_1$, $F''_{пx_1} = 2 \cdot t_1$, т.е. 1-й минор матрицы Гессе $\begin{pmatrix} F''_{пt_1} & F''_{пt_1x_1} \\ F''_{пx_1t_1} & F''_{пx_1} \end{pmatrix}$ для функции $F_п(t_1,x_1)$ равен нулю и точка $t_1=0$, $x_1=1$ не является точкой экстремума функции $F_п(t_1,x_1)$. Найдем значения этой функции в граничных точках: при $t_1=0$ и любом значении x_1 $F_п = 4$, при $t_1=2$ и $x_1=0$ $F_п = 2$, т.е. минимального значения функция $F_п(t_1,x_1)$ достигает при $t_1=2$, $x_1=0$.

Метод Рица. Искомая функция $x(t)$ представляется в виде многочлена: $x(t)=a_0\cdot \psi_0(t)+a_1\cdot\psi_1(t)+a_2\cdot\psi_2(t)+...+a_m\cdot\psi_m(t)$, где $\psi_j(t)$, j=0,1,...,m – элементарные непрерывно-дифференцируемые функции (t^j, Sin($j\cdot t$), exp($\beta_j\cdot t$)), a_j, j=0,1,...,m – постоянные коэффициенты. Тогда $I[x(t)]=I(a_0,a_1,...,a_m)$ и задача сводится к поиску таких значений коэффициентов многочлена, при которых $I(a_0,a_1,...,a_m)$ достигает минимума. Выбор вида функций $\psi_j(t)$ и начального значения порядка многочлена m осуществляет исследователь на основе имеющихся представлений о характере функции $x(t)$. Задача решается несколько раз с последовательно увеличиваемым значением m до тех пор, пока значения min I, соответствующие порядку многочлена m и (m+1), будут различаться меньше, чем требуется по условию.

Пример. Решить задачу предыдущих примеров. $x(t)=a_0+a_1\cdot t+a_2\cdot t^2$;
из граничных условий: $x(0)=a_0=0$; $x(2)=2\cdot a_1+4\cdot a_2=1 \to a_1=(1-4\cdot a_2)/2$,
$x(t)=(0.5-2\cdot a_2)\cdot t+a_2\cdot t^2=t/2-2\cdot a_2\cdot t+a_2\cdot t^2$;

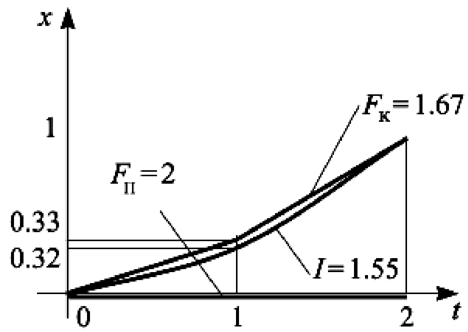


Рисунок 2.28 – Пример решения ВЗ разными методами

$$I[x(t)] = \int_0^2 [t^2 \cdot (0.5 - 2\cdot a_2 + a_2 \cdot t)^2 +$$

$$+ (1 - 0.5 + 2\cdot a_2 - 2\cdot a_2 \cdot t)^2]dt =$$

$$= 3.73 \cdot a_2^2 - 1.33 \cdot a_2 + 1.67$$

$dI/da_2 = 3.73 \cdot 2 \cdot a_2 - 1.33 = 0 \rightarrow\ a_2 = 0.18$; $a_1 = 0.14$;

$\rightarrow x(t) = 0.14 \cdot t + 0.18 \cdot t^2$;

$I\,[x(t)] \approx 1.55$.

На рис. 2.28 показаны решения этой задачи всеми рассмотренными методами. Как видно, лучшее решение найдено методом Рица.

3 МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЙ ВЫБОР

Многокритериальная задача – задача, где имеется не один, а несколько критериев оценки качества решения. Например, задача распределения инвестиций по этапам выполнения проекта: критерий (1) «минимальные расходы на выполнение проекта» обычно дополняется критериями (2) «минимальный срок выполнения проекта» и (3) «максимум качества проектных решений».

Главная проблема постановки и решения многокритериальных задач – согласование критериев, т.е. выбор наилучшего соотношения между оценками по разным критериям. Ответ на этот вопрос обычно не определяется условиями задачи. Нужна дополнительная информация, которая может быть получена только от руководства проектом.

3.1 Перевод критериев в ограничения

Одним из первых подходов к принятию решений при двух критериях является метод «стоимость-эффективность». Он был разработан в конце 50-х годов в США, когда в годы ракетно-ядерной гонки США-СССР возникла задача о достаточности системы нападения для преодоления защиты потенциального противника. Метод «стоимость-эффективность» состоит из трех основных этапов:

1) построения модели эффективности ($z_E(x_1,...,x_n) \to \max$);

2) построения модели стоимости ($z_C(x_1,...,x_n) \to \min$);

3) синтеза оценок стоимости и эффективности.

Модель стоимости представляет зависимость общей стоимости от количества ракет, а модель эффективности – зависимость вероятности поражения целей от количества ракет. Обе модели в данном случае объективны: они строятся на базе фактических данных, надежного статистического материала. Однако выходные параметры этих моделей нельзя просто механически объединить. Для синтеза оценки стоимости и эффективности используется субъективное суждение руководителя, формализовать которое трудно или даже невозможно.

В общем случае на этапе синтеза стоимости и эффективности рекомендуется использовать два основных подхода:

1) фиксированной эффективности при минимально возможной стоимости, т. е. выбирается самая «дешевая» альтернатива, обладающая заданной эффективностью ($z_E(x_1,...,x_n) = \text{const}_E$, $z_C(x_1,...,x_n) \to \min$);

2) фиксированной стоимости и максимально возможной эффективности (случай бюджетных ограничений: $z_E(x_1,...,x_n) \to \max$, $z_C(x_1,...,x_n) \to \text{const}_C$).

Смысл этих подходов – перевод одного из критериев оценки в ограничение. Как только это сделано, мы получаем обычную однокритериальную задачу.

Главный вопрос – как, на каком уровне установить ограничение одного из критериев. Ответ на этот вопрос в общем случае не вытекает из условий задачи. Ни требуемая эффективность, ни бюджетные ограничения не устанавливаются обычно достаточно жестко.

Итак, одним из способов решения многокритериальных задач, сводящим их к однокритериальным, является перевод всех критериев, кроме одного, в ограничения. Однако, выбор граничных значений, в общем, произволен, причем, чем больше критериев переводится, тем больше произвола.

Пример: выбор секретаря из пяти девушек: (1) Ольга, (2) Елена, (3) Светлана, (4) Галина, (5) Жанна, – по критериям: (1) "знание делопроизводства", (2) "внешность", (3) "знание английского языка", (4) "работа на компьютере", (5) "общение по телефону". Характеристика альтернатив с точки зрения критериев:

Альт.\Крит.	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
(1)	хор. – 4	хор. – 4	отл. – 5	плохо – 1	удов. – 3
(2)	неуд. – 2	отл. – 5	плохо – 1	плохо – 1	хор. – 4
(3)	отл. – 5	удов. – 3	удов. – 3	хор. – 4	хор. – 4
(4)	хор. – 4	неуд. – 2	неуд. – 2	удов. – 3	отл. – 5
(5)	плохо – 1	хор. – 4	удов. – 3	хор. – 4	неуд. – 2

Числовые значения характеристик формируют матрицу рейтингов альтернатив по критериям.

В качестве главного критерия выбора секретаря выберем "знание делопроизводства" (1). Очевидно, что минимально допустимый уровень всех остальных критериев – "удовлетворительно", т.е. **≥ 3**. Как видно, при такой замене критериев ограничениями единственная приемлемая альтернатива (3) – Светлана. Если понизить требования до **≥ 2**, то приемлемой станет также альтернатива (4) – Галина, и по критерию (1) будет выбрана альтернатива (3) – Светлана.

Заметим, что если в качестве главного критерия выбрать "общение по телефону" (5), то при ограничениях **≥ 2** приемлемыми будут те же две альтернативы, но выбрана будет альтернатива (4) – Галина.

3.2 Взвешивание и объединение критериев

Одним из подходов к поиску компромиссного решения задачи векторной оптимизации является сведение её к скалярной (однокритериальной) оптимизации: частные критерии $z_i(X)$, $X = (x_1,\dots,x_n)$ объединяются в обобщенный критерий $Z(X)=\Phi[z_1(X), z_2(X),...,z_m(X)]$, который затем оптимизируется. Наиболее распространённым обобщённым критерием является аддитивный – взвешенная сумма частных критериев.

3.2.1 Метод взвешенной суммы частных критериев

Обобщённый критерий записывается в виде:

$$Z(X)=\sum_{i=1}^{m} w_i z_i(X),$$

где w_i – весовые коэффициенты, удовлетворяющие условиям

$$0 \le w_i \le 1, \sum_{i=1}^{m} w_i = 1.$$

Величина w_i определяет важность i-го частного критерия, при этом более важному критерию приписывается больший вес.

Замечание. Как правило, частные критерии имеют различную размерность, поэтому обобщённый критерий формируется из их нормированных значений: отношений "натуральных" частных критериев к некоторой нормирующей величине. Варианты выбора нормирующего делителя:

1) директивные значения параметров, заданные заказчиком (указанные в ТЗ);

2) максимальные значения критериев, достигаемых в области допустимых решений (области D);

3) лучшие мировые достижения в данной области;

4) разность между максимальным и минимальным значениями критерия в области D: $\overline{z_i}(X)=\dfrac{z_i^{\max}-z_i(X)}{z_i^{\max}-z_i^{\min}}$ или $\overline{z_i}(X)=\dfrac{z_i(X)-z_i^{\min}}{z_i^{\max}-z_i^{\min}}$.

Нормированные критерии будем обозначать через $\overline{z_i}(X)$, т.е. аддитивный критерий примет вид $Z(X)=\sum\limits_{i=1}^{m} w_i\overline{z_i}(X)$.

<u>Замечание</u>: Если некоторые критерии требуется максимизировать, а другие – минимизировать, следует изменить знак всех критериев одной из групп и решать задачу поиска минимума или максимума критерия $Z(X)$.

Пусть имеется два решения X_1 и X_2. Для обоснования перехода от X_1 к X_2 необходимо вычислить сумму абсолютных изменений всех частных критериев: $\Delta Z=\sum\limits_{i=1}^{m} w_i\left[\overline{z_i}(X_2)-\overline{z_i}(X_1)\right]=\sum\limits_{i=1}^{m} w_i\overline{z_i}(X_2)-\sum\limits_{i=1}^{m} w_i\overline{z_i}(X_1)$. В случае $\Delta Z<0$ решение X_2 признаётся лучшим, чем X_1, если критерий $Z(X)$ минимизируется, а если максимизируется, то X_1 признаётся лучшим, чем X_2. Тогда при поиске минимума $Z(X)$ оптимальному решению X_{opt} соответствует $\Delta Z\ge 0$ при переходе к любому другому решению X: $\sum\limits_{i=1}^{m} w_i\overline{z_i}(X)\ge\sum\limits_{i=1}^{m} w_i\overline{z_i}(X_{opt})$, а при поиске максимума $Z(X)$: $\sum\limits_{i=1}^{m} w_i\overline{z_i}(X)\le\sum\limits_{i=1}^{m} w_i\overline{z_i}(X_{opt})$. Таким образом, оптимальному решению соответствует минимум либо максимум суммы нормированных частных критериев.

<u>Пример</u>. Переносной автомат для забивания стальных дюбелей в бетонные стены состоит из корпуса, магазина с дюбелями, подающего спускового механизма с зарядами и ствола. Требуется определить длину ствола L и число дюбелей N при следующих *исходных данных*: масса m одного дюбеля с зарядом равна 50 г, масса ствола 1.6 кг/м, масса корпуса 2 кг, – и *ограничениях*: число дюбелей $N\ge 12$, скорость выброса дюбеля $V\ge 100$ м/с, масса автомата $M\le 6$ кг.

При фиксированной величине заряда и заданной массе дюбеля скорость выброса связана с длиной ствола соотношением $V=k\cdot L^{0.5}$; где $k=150$ м$^{0.5}$/с. В качестве частных критериев, которые необходимо максимизировать, выберем V (чем выше скорость выброса, тем надёжнее дюбеля проникают в бетонные стены) и N (чем больше число дюбелей в магазине, тем удобнее работать). По мнению экспертов, оба критерия имеют одинаковую важность.

Введём обозначения: $z_1(N,L)=k\cdot L^{0.5}$ - первый критерий (скорость); $z_2(N,L)=N$ – второй критерий (число дюбелей). Задача многокритериальной оптимизации формулируется следующим образом:

$$\max Z = \max(z_1, z_2)$$

при ограничениях $N \geq 12;$

$$V \geq 100;$$

$$1.6L + 0.05N + 2 \leq 6.$$

Так как критерии имеют одинаковую важность, то $w_1 = w_2 = 0.5$ и можно их не учитывать. В качестве нормирующих делителей возьмём максимальные значения критериев, достигаемых в области допустимых решений: при $V_{min} = 100$ м/с ограничение на массу автомата примет вид: $1.6(V_{min}/k)^2 + 0.05N + 2 \leq 6$, откуда $N_{max} = 66$. Из того же ограничения при $N = 12$ получим $V_{max} = 219$ м/с.

Таким образом, мы получили следующий обобщенный критерий:

$$Z(L, N) = k\sqrt{L}/V_{max} + N/N_{max},$$

причем функция $Z(L,N)$ монотонно возрастает, т.е. достигает максимума на границе, и ограничение можно записать в виде равенства:

$$1.6L + 0.05N + 2 = 6.$$

Для определения максимального значения $Z(L,N)$ с учётом ограничения применим метод множителей Лагранжа и получим следующую задачу безусловной оптимизации:

$$Z(N, L, \lambda) = k\sqrt{L}/219 + N/66 + \lambda(1.6L + 0.05N - 4) \rightarrow \max$$

Взяв частные производные $Z(L,N, \lambda)$ по L, N, λ и приравняв их нулю, получим уравнения: $\dfrac{\partial Z}{\partial L} = \dfrac{k}{219} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{L}} + 1.6\lambda = 0$, $\dfrac{\partial Z}{\partial N} = \dfrac{1}{66} + 0.05\lambda = 0$, $\dfrac{\partial Z}{\partial \lambda} = 1.6L + 0.05N - 4 = 0$.

Решив эту систему уравнений, получим: $\lambda = -\dfrac{1}{0.05N_{max}} = 0.308$,

$V_{opt} = -\dfrac{k^2}{2 \cdot 219 \cdot 1.6\lambda} = 106$ м/с, $L_{opt} = \left(\dfrac{0.05 \cdot 66 \cdot k}{2 \cdot 1.6 \cdot 219}\right)^2 = 0.499$ м.

Аддитивный критерий – это формальный математический приём, придающий задаче удобный для решения вид, однако в нем может происходить взаимная компенсация частных критериев: значительное уменьшение одного из них вплоть до нуля может быть покрыто возрастанием другого. Для ослабления этого недостатка вводятся ограничения на минимальные значения частных критериев и их весовые коэффициенты.

Замечание. Постулат "низкая оценка по одному критерию может быть компенсирована высокой оценкой по другому" верен далеко не всегда. Например, если качество оператора ввода текстов оценивать критериями: 1) *скорость ввода (символов в минуту)* и 2) *среднее количество ошибок на страницу текста*, – то увеличение количества ошибок не может быть компенсировано увеличением скорости ввода.

3.2.2 Мультипликативный критерий

Теоретической основой использования мультипликативного обобщенного критерия задачи многокритериальной оптимизации является ***принцип справедли-***

вой относительной компенсации: справедливым следует считать такой компромисс, когда суммарный уровень относительного снижения значений одного или нескольких критерий не превышает суммарного уровня относительного увеличения других критериев. Математическая формулировка условия оптимальности на основе этого принципа имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\Delta z_i(X)}{z_i(X)} = 0$$

где $\Delta z_i(X)$, $z_i(X)$ – приращение величины i-го критерия и его первоначальное значение соответственно. Полагая $\Delta z_i(X) << z_i(X)$, можно записать:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\Delta z_i(X)}{z_i(X)} = \sum_{i=1}^{m} d(ln\, z_i(X)) = d\, ln \prod_{i=1}^{m} z_i(X) = 0,$$

откуда следует, что принцип справедливой относительной компенсации приводит к мультипликативному обобщённому критерию оптимальности $Z(X) = \prod_{i=1}^{m} z_i(X)$, в который в случае неравноценности частных критериев вводятся весовые коэффициенты w_i: $Z(X) = \prod_{i=1}^{m} z_i^{w_i}(X)$.

Замечание. Мультипликативный критерий иногда представляется в виде отношения $Z(X) = \prod_{i=1}^{m_1} z_i^{+}(X) \Big/ \prod_{j=1}^{m_2} z_j^{-}(X)$, где в числителе перемножаются частные критерии, требующие максимизации и имеющие ограничения $z_i^{+}(X) \geq TT_i$, а в знаменателе – частные критерии, требующие минимизации и имеющие ограничения $z_i^{-}(X) \leq TT_i$; TT_i – значение технического требования, предъявленного к i-му критерию; $m_1 + m_2 = m$. Такая целевая функция в дальнейшем подвергается максимизации.

Достоинство мультипликативного критерия – при его использовании не требуется нормирование частных критериев. *Недостаток*: недостаточная величина одного частного критерия компенсируется избыточной величиной другого.

Пример. Применим мультипликативный обобщенный критерий для решения задачи определения оптимальных параметров автомата для забивания стальных дюбелей в бетонные стены, см. п. 3.2.1.

Задача оптимизации в данном случае формулируется следующим образом:

найти максимум функции $Z(L, N) = k\sqrt{L} \cdot N$

при ограничении $1.6L + 0.05N + 2 \leq 6$.

Применение метода неопределённых множителей Лагранжа приводит к следующей задаче безусловной оптимизации: $Z(L, N, \lambda) = k\sqrt{L} \cdot N + \lambda(1.6L + 0.05N - 4)$.

Взяв частные производные $Z(L,N, \lambda)$ по L, N, λ и приравняв их нулю, получим уравнения: $\frac{\partial Z}{\partial L} = \frac{k \cdot N}{2\sqrt{L}} + 1.6\lambda = 0, \frac{\partial Z}{\partial N} = k\sqrt{L} + 0.05\lambda = 0, \frac{\partial Z}{\partial \lambda} = 1.6L + 0.05N - 4 = 0.$

Решив эту систему уравнений, получим: $N_{opt} = 53$, $L_{opt} = 0.83$ м, $V_{opt} = 137$ м/с.

Как видно, использование мультипликативного критерия привело другим значениям оптимальных параметров автомата по сравнению с решением задачи при аддитивном критерии оптимальности. Причина различий – неодинаковые диапазоны взаимной компенсации абсолютных и относительных изменений частных критериев. Поэтому при решении конкретных задач необходимо тщательно анализировать и обосновывать целесообразность учёта абсолютных или относительных изменений значений частных критериев и выбирать либо аддитивный, либо мультипликативный обобщенный критерий оптимальности.

3.2.3 Методы определения весовых коэффициентов

Веса критериев – самое тонкое место в проблеме многокритериального анализа. Весовые коэффициенты w_i должны качественно отражать важность соответствующих частных критериев. Их значения выбираются исходя из анализа мирового уровня развития данной отрасли, из требований к проектируемому объекту и из существующих возможностей реализации этих требований. Открытие новых физических принципов и разработка новых методов проектирования могут существенно влиять на значения весовых коэффициентов.

Чаще всего веса назначают, исходя из интуитивного представления о сравнительной важности критериев. Однако исследования показывают, что человек (эксперт) не способен *непосредственно* назначать критериям корректные численные веса. Необходимы специальные процедуры получения весов. Наиболее популярны на практике ***методы экспертных оценок***.

Основная идея методов экспертных оценок: использовать интеллект людей, их способность искать и находить решение слабо формализованных задач. Наиболее эффективными методами проведения экспертизы в настоящее время считаются методы *ранжирования* и *приписывания баллов*.

Метод ранжирования. Пусть экспертиза проводится группой из L экспертов, которые являются квалифицированными специалистами в той области, где принимается решение. Метод основан на расстановке частных критериев в порядке их важности. Цифрой 1 обозначают наиболее важный частный критерий, цифрой 2 – следующий по важности и т.д. Далее ранг 1 получает оценку m (количество частных критериев), ранг 2 – оценку $m – 1$ и т.д. до ранга m, которому присваивается оценка 1. Обозначим полученные оценки r_{ik}, где i – номер эксперта, k – номер критерия и сведем результаты опроса экспертов в таблицу

Эксперты	Критерии			
	F_1	F_2	. . .	Fm
1	r_{11}	r_{12}	. . .	r_{1m}
2	r_{21}	r_{22}		r_{2m}
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
L	r_{L1}	r_{L2}	. . .	r_{Lm}
$\sum$ оценок	r_1	r_2	. . .	r_m

Значения элементов нижней строки таблицы $r_i = \sum_{j=1}^{L} r_{ji}$, $i = 1,2, \ldots,m$. Тогда весовые коэффициенты $w_i = r_i \Big/ \sum_{i=1}^{m} r_i$, $i = 1,2, \ldots,m$.

Пример. Группа из трёх экспертов ($L = 3$) привлечена для ранжирования четырех критериев ($m = 4$). Эксперты расставили критерии в следующем порядке:

Эксперты	Места			
	1	2	3	4
1	F_1	F_3	F_4	F_2
2	F_3	F_1	F_2	F_4
3	F_1	F_4	F_2	F_3

Определим элементы матрицы рангов критериев согласно алгоритму (первому месту – четыре балла, а второму – три и т.д.):

Эксперты	Критерии			
	F_1	F_2	F_3	F_4
1	4	1	3	2
2	3	2	4	1
3	4	2	1	3
$\sum$ оценок	$r_1 = 11$	$r_2 = 5$	$r_3 = 8$	$r_4 = 6$

$\sum_{i=1}^{m} r_i = 11 + 5 + 8 + 6 = 30$; w_1=0.3667; w_2=0.1667; w_3=0.2666; w_4=0.2.

Метод приписывания баллов. Эксперты оценивают важность частного критерия по шкале [0-10]. При этом разрешается оценивать важность дробными величинами или приписывать одну и ту же величину из выбранной шкалы нескольким критериям. Обозначим через h_{ji} балл j-го эксперта для i-го критерия, тогда вес i-го критерия, установленный j-м экспертом $r_{ji} = h_{ji} \Big/ \sum_{i=1}^{m} h_{ji}$, а значения весовых коэффициентов определяются аналогично методу ранжирования.

Пример. Пусть три эксперта поставили четырем критериям следующие баллы:

Эксперты	критерии				
	F_1	F_2	F_3	F_4	Сумма
1	h_{11}= 10	h_{12}= 4	h_{13}= 8	h_{14}= 6	28
2	h_{21}=7	h_{22}=5	h_{23}=10	h_{24}=3	25
3	h_{31}=10	h_{32}=6	h_{33}=5	h_{34}=7	28

Веса критериев:

Эксперты	критерии			
	F_1	F_2	F_3	F_4
1	10/28	4/28	8/28	6/28
2	7/25	5/25	10/25	3/25
3	10/28	6/28	5/28	7/28
$\sum$ оценок	r_1=0.9943	r_2=0.5571	r_3=0,8643	r_4=0,5843

$\sum_{i=1}^{m} r_i$ =0.9943+0.5571+0.8643+0.5843=3; w_1=0.3314; w_2=0.1857; w_3=0.2881; w_4=0.1948.

Замечания. 1. Применение подобного подхода к решению многокритериальных задач может привести лишь к получению решения, оптимального с точки зрения выбранной группы экспертов. В ответственных случаях обычно привлекают несколько независимых групп экспертов.

2. В случаях, когда компетентность экспертов различна, ее можно ценить методом ранжирования или приписывания баллов и получить значения весов экспертов α_j, $j = 1,\ldots,L$. Тогда $r_i = \sum_{j=1}^{L} r_{ji} \cdot \alpha_j$.

Статистическая обработка результатов экспертных оценок. Если рассматривать результаты оценок каждого из экспертов как значения некоторой случайной величины, то к ним можно применять методы математической статистики.

Среднее значение оценки для i-го критерия $\overline{r_i} = \frac{1}{L}\sum_{j=1}^{L} r_{ji} = \frac{r_i}{L}$ выражает коллективное мнение группы экспертов. Степень согласованности мнений экспертов характеризуется величиной дисперсией оценок $\sigma_i^2 = \frac{1}{L}\sum_{j=1}^{L}(r_{ji} - \overline{r_i})^2$. Чем меньше значение дисперсии, чем с большей уверенностью можно опираться на значения $\overline{r_i}$, $i = 1,\ldots,m$ как оценки степени важности частных критериев F_i, $i = 1,\ldots,m$.

Весовые коэффициенты $w_i = \overline{r_i} \Big/ \sum_{i=1}^{m} \overline{r_i}$, $i = 1,\ldots,m$.

Статистическая обработка результатов экспертных оценок подобна статистической обработке результатов измерений. На достоверность экспертизы существенно влияют такие факторы, как численный состав экспертной группы, уровень компетентности экспертов; состав вопросов, представляемых экспертам и т.д. Индивидуальные экспертные оценки также носят на себе печать случайности: настроение, самочувствие, обстановка, а также знание и опыт.

Формальные методы определения весовых коэффициентов – это приемы, позволяющие по информации о частных критериях оптимальности определять значения весовых коэффициентов w_i.

Прием 1. Для каждого частного критерия оптимальности F_i, $i = 1,\ldots,m$ вычисляется коэффициент относительного разброса по формуле:

$\delta_i = \dfrac{F_i^+ - F_i^-}{F_i^+} = 1 - \dfrac{F_i^-}{F_i^+}$, где $F_i^- = \min\limits_{X \in D} F_i(X)$, $F_i^+ = \max\limits_{X \in D} F_i(X)$. Весовые коэффициенты получают наибольшее значение для тех критериев, относительный разброс которых наиболее значителен: $w_i = \dfrac{\delta_i}{\sum\limits_{k=1}^{m} \delta_k}$ $i = 1,\ldots,m$.

<u>Пример</u>. Рассмотрим конкретную числовую задачу в следующей постановке:
$\min\limits_{x \in D} F_1(x) = \min\limits_{x \in D} 4(x-2)^2 + 5,\ \min\limits_{x \in D} F_2(x) = \min\limits_{x \in D} (x-4)^2 + 1,\ D = \{0 \le x \le 5\}.$
Коэффициенты относительного разброса значений критериев:
$F_1^+ = 41, F_1^- = 5, \delta_1 = \dfrac{41-5}{41} = \dfrac{36}{41},\ F_2^+ = 17, F_2^- = 1, \delta_2 = \dfrac{17-1}{17} = \dfrac{16}{17}.$
Весовые коэффициенты:
$w_1 = \dfrac{\delta_1}{\delta_1 + \delta_2} = \dfrac{36}{41} \Big/ \left(\dfrac{36}{41} + \dfrac{16}{17} \right) = 0{,}48,\ w_2 = \dfrac{\delta_2}{\delta_1 + \delta_2} = \dfrac{16}{17} \Big/ \left(\dfrac{36}{41} + \dfrac{16}{17} \right) = 0{,}52.$

Прием 2. Пусть все $F_i^- \neq 0$, $i = 1,2, \ldots,m$. Рассматриваются коэффициенты $\beta_i(X) = \dfrac{F_i(X) - F_i^-}{F_i^-}$, характеризующие отклонение частных критериев оптимальности от их наименьших значений, и важность i-го критерия зависит от выполнения неравенства

$$\beta_i \le \xi_i. \qquad (*)$$

Значения ξ_i, $i = 1,\ldots,m$ задаются ЛПР и характеризуют важность критериев (чем важнее критерий, тем меньше значение ξ_i). Пусть R_i^* – наибольший радиус окрестности точки X_i^* – точки минимума i-го критерия оптимальности, точки которой $(x_1,\ldots,x_n)$ удовлетворяют неравенству (*):
$R_i^* = \max\limits_{X \in D} \left\{ \sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - x_k^*)^2 \left| \dfrac{F_i(x_1,\ldots,x_n) - F_i^-}{F_i^-} \le \xi_i \right. \right\}$. Чем больше значение R_i^*, тем меньше выбирается значение весового коэффициента: $w_i = \dfrac{1/R_i^*}{\sum\limits_{i=1}^{m} 1/R_i^*}$, $i = 1,\ldots,m$.

<u>Пример</u>. Рассмотрим задачу предыдущего примера и положим, что ЛПР задал $\xi_1 = 0.4$, $\xi_2 = 0.6$. Точки минимумов критериев: $x^* = 2$, $F_1^- = 5$ и $x^* = 4$, $F_2^- = 1$.

Тогда:
$$\left. \begin{aligned} R_1^* &= \max_{0 \le x \le 5} \left\{ (x-2)^2 \left| \frac{4(x-2)^2 + 5 - 5}{5} \le 0.4 \right. \right\} = 0.5 \\ R_2^* &= \max_{0 \le x \le 5} \left\{ (x-4)^2 \left| \frac{(x-4)^2 + 1 - 1}{1} \le 0.6 \right. \right\} = 0.6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = \dfrac{6}{11} = 0.545 \\ w_2 = \dfrac{5}{11} = 0.455 \end{cases}.$$

3.3 Методы последовательной оптимизации

Из этой группы методов многокритериальной оптимизации рассмотрим *метод последовательных уступок* и *метод равенства частных критериев*.

3.3.1Метод последовательных уступок

Основная идея метода: некоторое снижение величин более важных критериев для повышения величин менее важных:

1) частные критерии ранжируются по важности (главным считается критерий z_1 , менее важным z_2 и т.д. до z_m);

2) осуществляется поиск лучшего решения по наиболее важному критерию (пусть ему соответствует значение $z_{1\min}$);

3) осуществляется поиск решения, наилучшего по следующему критерию, причем делается уступка $\Delta_1 \geq 0$ по первому критерию (значение z_1 должно быть не больше, чем $z_{1\min}+\Delta_1$);

4) п. 3) повторяется для каждого последующего критерия при заданных уступках по всем, уже рассмотренным (на последнем шаге значения каждого критерия z_i из m–1 предыдущих должны быть не больше $z_{i\min}+\Delta_i$).

Таким образом, оптимальным считается решение последней задачи из следующей последовательности :

1) Найти $z_{1\min} = \min\limits_{X \in D} z_1(X)$

2) Найти $z_{2\min} = \min\limits_{X \in D} z_2(X)$

$z_1 \leq z_{1\min}+\Delta_1$

• • •

m) Найти $z_{m\min} = \min\limits_{X \in D} z_m(X)$

$z_i \leq z_{i\min}+\Delta_i$, I =1,…,m–1

Величины уступок выбирают в пределах инженерной точности: 5-10% от наименьшего значения критерия.

Пример. Пусть в области $D = \{0;4\}$ заданы два критерия $z_1(x)=(x-1)^2+1$ $z_2(x)=(x-2)^2+2$, которые нужно минимизировать, причем критерий z_1 важнее критерия z_2.

1. Задача оптимизации: найти $\min z_1(x) = \min[(x-1)^2+1]$

при ограничении $x \in \{0;4\}$.

Минимум z_1 достигается в точке x_{1opt}=1: $z_{1\min}$= 1.

2. Назначается величина уступки Δ_1 = 0.1 и решается следующая задача оптимизации: найти $\min z_2(x) = \min[(x-2)^2+2]$

при ограничениях: $x \in \{0;4\}$

$(x-1)^2+1 \leq 1+0.1$

Применяя для решения метод множителей Лагранжа, получим задачу безусловной оптимизации: $\Phi(x, \lambda) = (x-2)^2 + 2 + \lambda((x-1)^2 - 0.1)$. Находим частные производные функции $\Phi(x, \lambda)$ и приравниваем их к нулю: $\begin{cases}(x-2)+\lambda(x-1)=0\\(x-1)^2-0.1=0\end{cases}$, откуда

$x_{2opt} = 1.32$. Согласно алгоритму, решение, полученное на последнем этапе, будет считаться оптимальным, т.е. $x_{opt} = 1.32$.

Замечание. Если каждый из частных критериев очевидно более важен, чем последующий, то можно ограничиться учётом только попарной связи критериев и выбирать величину допустимого снижения очередного критерия с учётом поведения лишь одного следующего критерия.

Недостатком метода является необходимость формирования неизменного для всей задачи априорного ранжирования критериев, а также трудности с назначением и согласованием величин уступок, возрастающие с ростом количества частных критериев.

3.3.2 Метод равенства частных критериев

Принцип компромисса в данном случае основан на идее равномерности: стараются найти такие значения переменных $X = (x_1,\ldots,x_n)$, при которых нормированные значения всех частных критериев с учетом весовых коэффициентов становятся равными между собой: $w_i \cdot z_i(X) = const$, $i = 1,\ldots,m$.

Замечание. Чем больше частных критериев, тем труднее добиться выполнения этого равенства.

Пример. Применим метод равенства частных критериев для определения оптимальных параметров переносного автомата для забивания стальных дюбелей в бетонные стены, см. п. 3.2.1, 3.2.2. Будем считать, что частные критерии одинаковы по важности, тогда $\dfrac{z_1(L,N)}{V_{max}} = \dfrac{z_2(L,N)}{N_{max}} \Rightarrow \dfrac{k\sqrt{L}}{218} = \dfrac{N}{65}$.

Выразим z_2 через z_1: $z_2 = \dfrac{N_{max}}{V_{max}} z_1 \Rightarrow N = \dfrac{66}{218} 150\sqrt{L}$ и подставим в уравнение для массы автомата: $1.6L + 0.05\dfrac{66}{218}150\sqrt{L} = 4$. Решив это квадратное уравнение относительно $\sqrt{L}$ и выбрав положительный корень, получим: $\sqrt{L} = 1.024$ или $L = 1.05$ м. Таким образом, $N_{opt} = 46$, $L_{opt} = 1.05$м, $V_{opt} = 152$ м/с, т.е. получен третий вариант оптимального решения этой задачи.

3.4 Метод анализа иерархий

Этот метод предложен профессором Томасом Саати в 70-х годах прошлого века для ситуаций, когда численно оценить альтернативы по критериям затруднительно, но возможно попарное сравнение альтернатив по каждому из критериев. Метод включает четыре основных этапа.

1. *Построение иерархии "цель-критерии-альтернативы"*. Например, *цель*: выбор места работы; *критерии*: (1) зарплата, (2) соответствие имеющейся квалификации, (3) удаленность от дома; *альтернативы*: (1) ОАО "Завком", (2) ЗАО "Завод Тамбовполимермаш", (3) ОАО "АРТИ-завод".

2. *Парные сравнения альтернатив по каждому из критериев* согласно таблице:

Рейтинг	*Описание*
1	Одинаковое предпочтение
3	Умеренное предпочтение
5	Явное предпочтение
7	Очевидное предпочтение
9	Абсолютное предпочтение

(возможны и промежуточные оценки: 2, 4, 6, 8) и построение по результатам сравнения матриц попарного сравнения альтернатив по критериям. В рассматриваемом примере это будут матрицы размерностью 3×3:

по критерию (1) $\begin{pmatrix} \text{Альт.} & (1) & (2) & (3) \\ (1) & 1 & 5 & 3 \\ (2) & 1/5 & 1 & 1/3 \\ (3) & 1/3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ (ОАО "Завком" явно предпочтительнее ЗАО "Завод Тамбовполимермаш" и умеренно предпочтительнее ОАО "АРТИ-завод", в свою очередь ОАО "АРТИ-завод" умеренно предпочтительнее ЗАО "Завод Тамбовполимермаш"); по критерию (2) $\begin{pmatrix} \text{Альт.} & (1) & (2) & (3) \\ (1) & 1 & 1/5 & 3 \\ (2) & 5 & 1 & 3 \\ (3) & 1/3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$ (ЗАО "Завод Тамбовполимермаш" явно предпочтительнее ОАО "Завком" и умеренно предпочтительнее ОАО "АРТИ-завод", в свою очередь ОАО "Завком" умеренно предпочтительнее ОАО "АРТИ-завод"); по критерию (3) $\begin{pmatrix} \text{Альт.} & (1) & (2) & (3) \\ (1) & 1 & 3 & 5 \\ (2) & 1/3 & 1 & 3 \\ (3) & 1/5 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$ (ОАО "Завком" явно предпочтительнее ОАО "АРТИ-завод" и умеренно предпочтительнее ЗАО "Завод Тамбовполимермаш", в свою очередь ЗАО "Завод Тамбовполимермаш" умеренно предпочтительнее ОАО "АРТИ-завод").

Построенные матрицы нормализуются так, чтобы сумма элементов каждого столбца была равна единице (каждый элемент делится на сумму элементов соответствующего столбца), а затем строится вектор приоритетов (его элементами являются средние арифметические элементов строк нормализованной матрицы):

по критерию (1) $\begin{pmatrix} 0.652 & 0.556 & 0.692 \\ 0.13 & 0.111 & 0.077 \\ 0.217 & 0.333 & 0.231 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0.633 \\ 0.106 \\ 0.26 \end{pmatrix}$; по критерию (2) $\begin{pmatrix} 0.158 & 0.13 & 0.429 \\ 0.79 & 0.652 & 0.429 \\ 0.053 & 0.217 & 0.143 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0.239 \\ 0.623 \\ 0.138 \end{pmatrix}$; по критерию (3) $\begin{pmatrix} 0.652 & 0.692 & 0.556 \\ 0.217 & 0.231 & 0.333 \\ 0.13 & 0.077 & 0.111 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0.633 \\ 0.26 \\ 0.106 \end{pmatrix}$.

3. *Взвешивание критериев* – построение матрицы сравнений и вектора приоритетов для критериев. Матрица сравнений: $\begin{pmatrix} \text{Крит.} & (1) & (2) & (3) \\ (1) & 1 & 5 & 3 \\ (2) & 1/5 & 1 & 1/3 \\ (3) & 1/3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ("зарплата" явно предпочтительнее "квалификации" и умеренно предпочтительнее "удаленно-

сти", в свою очередь "удаленность" умеренно предпочтительнее "квалификации").

Нормализация и вектор приоритетов: $\begin{pmatrix} 0.652 & 0.556 & 0.692 \\ 0.13 & 0.111 & 0.077 \\ 0.217 & 0.333 & 0.231 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0.633 \\ 0.106 \\ 0.26 \end{pmatrix}$.

4. *Выбор наиболее предпочтительной альтернативы* – вычисление ранга каждой альтернативы с учетом веса критериев:
ОАО "Завком" – 0.633·0.633 + 0.239·0.106 + 0.633·0.26 = 0.591,
ЗАО "Завод Тамбовполимермаш" – 0.106·0.633 + 0.624·0.106 + 0.26·0.26 = 0.201,
ОАО "АРТИ-завод" – 0.26·0.633 + 0.138·0.106 + 0.106·0.26 = 0.207.
Очевидно преимущество ОАО "Завком", две другие альтернативы практически равнозначны.

Пункты 2 и 3 рекомендуется дополнять так называемой проверкой согласованности оценок. Эта проверка считается необходимой, если число альтернатив и критериев превосходит 4. Ее суть – проверка транзитивности оценок: если альтернатива (1) предпочтительнее (2) по какому-либо критерию, а (2) предпочтительнее (3), то (1) должно быть предпочтительнее (3).

Проверка заключается в следующем. Суммы столбцов исходной матрицы сравнений умножаются на элементы соответствующего вектора приоритетов и складываются. Для сравнения альтернатив по критерию (1) в рассмотренном примере: $\lambda=(1+1/5+1/3)\cdot0.633+(5+1+3)\cdot0.106+(3+1/3+1)\cdot0.26 = 0.97+0.954+1.127=3.051$. В случае идеальной согласованности эта сумма должна быть равна числу альтернатив (трем).

Затем рассчитывается *коэффициент согласованности* $CR = \dfrac{(\lambda - n)/(n-1)}{RI}$, где n – число альтернатив, RI – индекс рандомизации для рассматриваемого числа альтернатив. Значения RI сведены в следующую таблицу:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
RI	0	0	0.58	0.9	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49

для рассматриваемого примера $CR = (3.051–3)/(2\cdot0.58) = 0.044$. Несогласованность оценок считается приемлемой, если она не превосходит 0.1.

Коэффициент согласованности рассчитывается для матриц сравнений по всем критериям и матрицы сравнения критериев. Если какой-то из них превышает 0.1, надо проверить корректность выбранных степеней предпочтения.

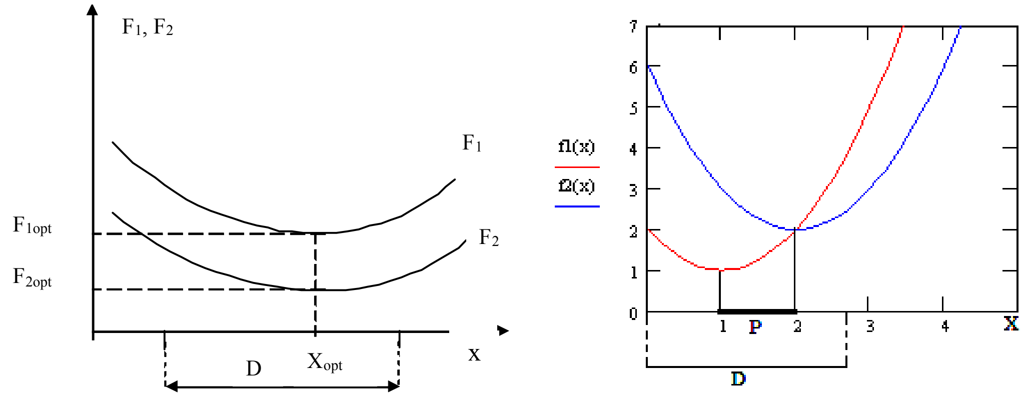
3.5 Оптимальность по Парето

Пусть для каждого решения $X = (x_1,\ldots,x_n)$ из области D определен набор его оценок по всем критериям: $(z_1(X), z_2(X),\ldots, z_m(X))$ – *векторная оценка* решения X. Сравнение двух любых решений представляет собой сравнение их векторных оценок. Далее будем считать, что оптимальным является решение, которому соответствует минимальное значение каждого частного критерия $z_i(X)$, $i = 1,\ldots,m$.

Определения. 1. Решение X_1 *доминирует* решение X_2, если $z_i(X_1) \le z_i(X_2)$ $\forall i =1,\ldots,m$ и хотя бы для одного (j-го) критерия $z_j(X_1) < z_j(X_2)$, т.е. переход от X_2 к X_1 не приведет к росту значения какого-либо критерия, но значение одного из критериев точно уменьшится.

2. Решение, не доминируемое никаким другим решением, называется *Парето-оптимальным*. Множество таких решений называется *множеством Парето* (обозначается буквой P, $P \subset D$). Парето-оптимальные решения располагаются между решениями, оптимальными с точки зрения каждого частного критерия.

3. Множество векторных оценок, соответствующих множеству D, называется *критериальным пространством* Y_D, множество Парето – *областью компромиссов* Y_P, множество доминируемых решений – *областью согласия* Y_C.



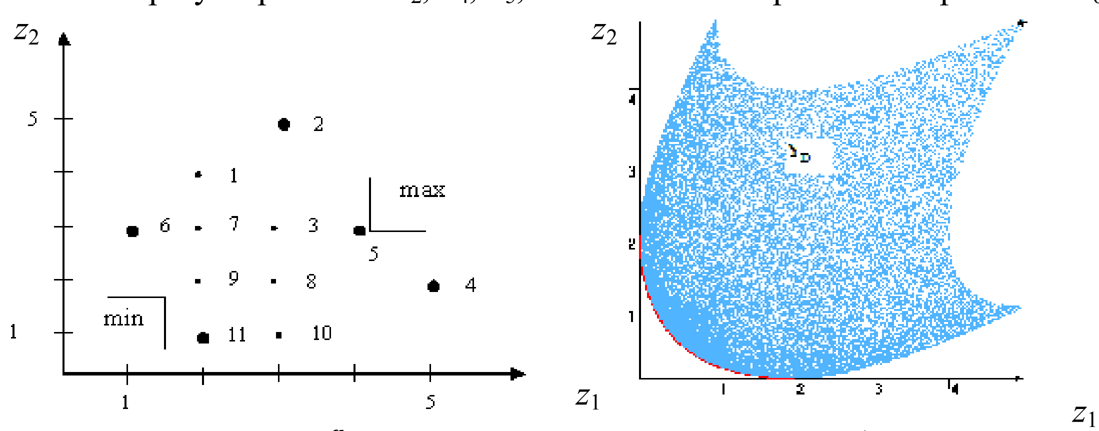
а ***б***

Рисунок 3.1 – Отсутствие (*а*) и наличие (*б*) противоречий между частными критериями

В области согласия нет противоречий между частными критериями оптимальности, т.е. в этой области существует решение, оптимальное с точки зрения всех критериев, см. рис. 3.1а. В области компромиссов частные критерии противоречат друг другу: минимум по каждому из них соответствует различным Парето-оптимальным решениям, см. рис. 3.1б.

Оптимальность по Парето означает, что невозможно улучшить значение одного из частных критериев, не ухудшая значения хотя бы одного из остальных.

<u>Пример</u>. Пусть множество D состоит из 11 решений, оцениваемых двумя критериями. Векторные оценки решений следующие: $Z(X_1) = (2;4)$, $Z(X_2) = (3;5)$, $Z(X_3) = (3;3)$, $Z(X_4) = (5;2)$, $Z(X_5) = (4;3)$, $Z(X_6) = (1;3)$, $Z(X_7) = (2;3)$, $Z(X_8) = (3;2)$, $Z(X_9) = (2;2)$, $Z(X_{10}) = (3;1)$, $Z(X_{11}) = (2;1)$. Критериальное пространство иллюстрирует рис. 3.2а. Множества Парето образуют решения, лежащие на правой верхней или левой нижней границе области D: если оба критерия необходимо максимизировать, то множество Парето образуют решения X_2, X_4, X_5, а если минимизировать – то решения X_6, X_{11}.



а ***б***

Рисунок 3.2 – Критериальные пространства и множества Парето

Замечания. 1. Для определения множества Парето используют правило "уголка": уголок вида └ используется для определения области компромиссов в критериальном пространстве, когда критерии максимизируются, а уголок ┐ – когда минимизируются.

2. В случае, когда множество D является непрерывным, критериальное пространство представляет собой некоторую область на плоскости, см. рис. 3.2б. Множество Парето в данном случае представляет собой часть границы области Y_D: если критерии минимизируются – "юго-западную границу", если максимизируются – "северо-восточную".

3. Если область Y_D не выпуклая, ее Парето-оптимальная граница может состоять из отдельных линий и/или точек. На рис. 3.2б для случая максимизации критериев это правый верхний пик.

3.5.1 Методы построения множества Парето

Определение. Множество Парето в двумерном пространстве критериев ($m = 2$) называется *компромиссной кривой*.

Если $(y_1^{(1)}, y_1^{(2)})$ и $(y_2^{(1)}, y_2^{(2)})$ – произвольные точки, принадлежащие компромиссной кривой (КК), и $y_1^{(1)} < y_2^{(1)}$, то $y_1^{(2)} > y_2^{(2)}$, т.е. в двумерном представлении критериального пространства КК не содержит ни горизонтальных, ни вертикальных отрезков. Она может состоять из несвязных отрезков, содержать изолированные точки и представляет собой геометрическое место точек соприкосновения поверхностей уровня $z_1(X) = b_1$ и $z_2(X) = b_2$, в которых справедливо равенство: $\mathrm{grad}z_1 = -\delta\mathrm{grad}z_2$, $0 \le \delta \le \infty$.

Если функции $z_1(X)$ и $z_2(X)$ дифференцируемы, то равенство $\mathrm{grad}z_1 = -\delta\mathrm{grad}z_2$ эквивалентно системе алгебраических уравнений $\dfrac{\partial z_1}{\partial x_j} = -\delta\dfrac{\partial z_2}{\partial x_j}$, $j = 1,\ldots,n$, которая определяет кривую в пространстве параметров $x_1 = \varphi_1(\delta)$, ..., $x_n = \varphi_n(\delta)$. КК представляет собой участок этой кривой, на котором $\delta \ge 0$, принадлежащий множеству D, и определяется параметрическими уравнениями: $z_1 = z_1(\varphi_1(\delta),\ldots,\varphi_n(\delta))$, $z_2 = z_2(\varphi_1(\delta),\ldots,\varphi_n(\delta))$, $\delta \ge 0$.

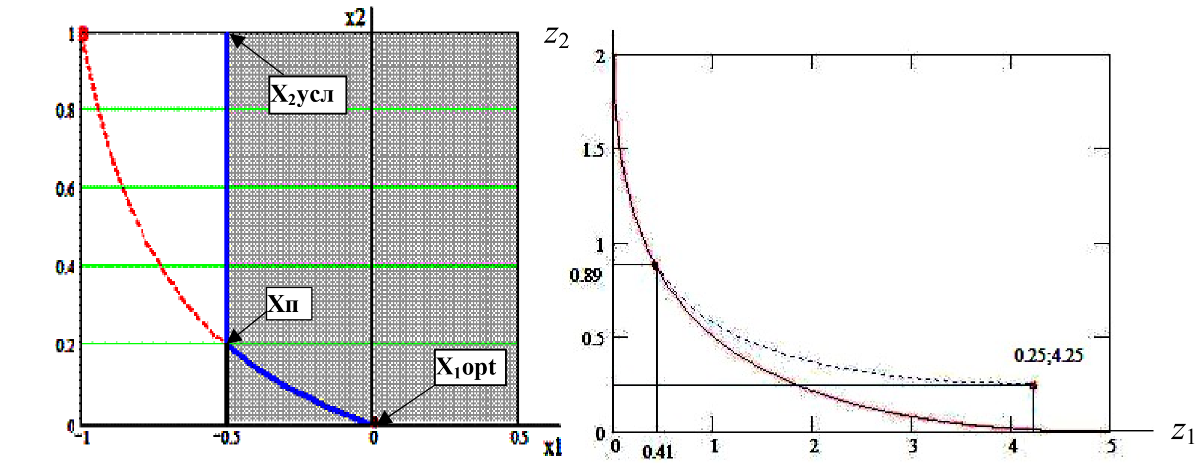
Пример. На множестве $D = \{-0.5 \le x_1 \le 0.5;\ 0 \le x_2 \le 1\}$ заданы два критерия: $z_1(x_1,x_2) = x_1^2 + 4x_2^2$ и $z_2(x_1,x_2) = (x_1 + 1)^2 + (x_2 - 1)^2$, которые необходимо минимизировать.

Абсолютный минимум функции $z_1(x_1,x_2)$ находится в точке $X_{1\mathrm{opt}} = (0,0)$, принадлежащей области D, а функции $z_2(x_1,x_2)$ – в точке $X_{2\mathrm{opt}} = (-1,1)$, лежащей за пределами области D. Условный минимум функции $z_2(x_1,x_2)$ находится в точке $X_{2\text{услов}} = (-0.5,1)$.

Частные производные: $\dfrac{\partial z_1}{\partial x_1} = 2x_1$, $\dfrac{\partial z_1}{\partial x_2} = 8x_2$, $\dfrac{\partial z_2}{\partial x_1} = 2(x_1 + 1)$, $\dfrac{\partial z_2}{\partial x_2} = 2(x_2 - 1)$.

Система уравнений: $\begin{cases} 2x_1 = -2\delta(x_1 + 1) \\ 8x_2 = -2\delta(x_2 - 1) \end{cases}$, откуда $x_1 = -\dfrac{\delta}{\delta + 1}$, $x_2 = \dfrac{\delta}{\delta + 4}$, т.е. параметрические уравнения КК для случая, когда точки $X_{1\mathrm{opt}}$ и $X_{2\mathrm{opt}}$ принадлежат области

D, имеют вид: $z_1(\delta) = \left(-\frac{\delta}{\delta+1}\right)^2 + 4\cdot\left(\frac{\delta}{\delta+4}\right)^2$, $z_2(\delta) = \left(\frac{1}{\delta+1}\right)^2 + \left(-\frac{4}{\delta+4}\right)^2$. В пространстве параметров уравнение КК можно получить, выразив δ через x_1, через x_2 и приравняв полученные выражения: $x_2 = -\frac{x_1}{3x_1+4}$. Найдем точку пересечения

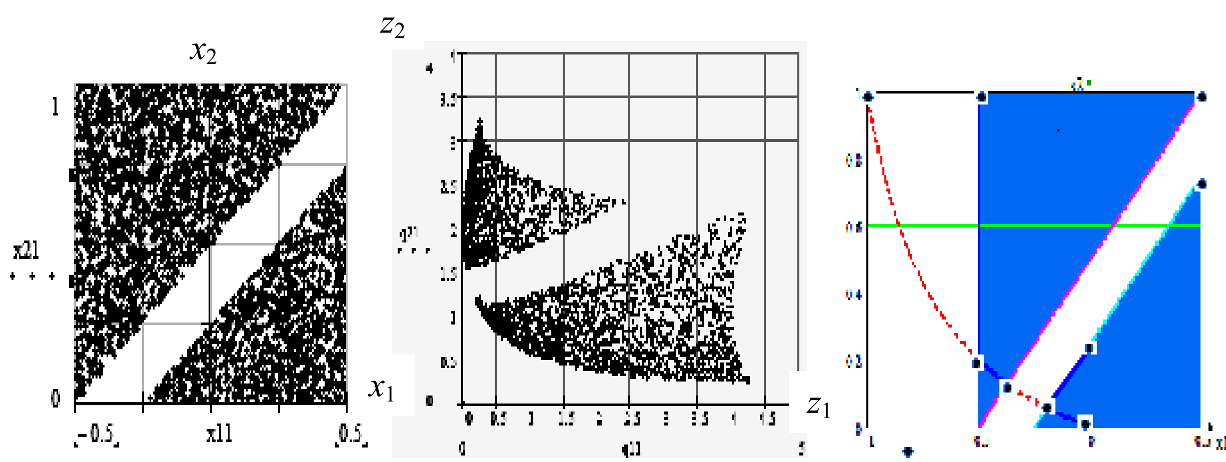


а *б*

Рисунок 3.3 – Компромиссная кривая в области D (*а*) и в области Y_D (*б*)

этой кривой с прямой $x_1 = -0.5$: $X_п = (-0.5,0.2)$, при этом $0 \le \delta \le 1$, $z_1(0) = 0$, $z_2(0) = 2$, $z_1(1) = 0.41$, $z_2(1) = 0.89$, т.е. между точками X_{1opt} и $X_п$ КК соответствует уравнению $x_2 = -\frac{x_1}{3x_1+4}$, а далее совпадает с прямой $x_1 = -0.5$, см. рис. 3.3а. В критериальном пространстве КК соответствует выражениям $z_1(\delta)$ и $z_2(\delta)$ на участке между точками (0,2) и (0.41,0.89), а далее идет к точке $[z_1(-0.5,1); z_2(-0.5,1)] = (4.25,0.25)$ см. рис. 3.3б.

Введем ограничение на изменение параметров x_1, x_2: $|x_2 - x_1 - 0.375| \ge 0.125$. Точки условного минимума критериев в этом случае не изменятся, но изменятся множества D и Y_D, см. рис. 3.4 а,б. Компромиссная кривая в данном случае будет состоять из трех отрезков. см. рис 3.4 в.



а *б* *в*

Рисунок 3.4 – Область D (*а*), область Y_D (*б*) и КК (*в*) при наличии ограничения

Как видно, определение КК даже для простого примера является достаточно сложной задачей. Поэтому в вычислительной практике чаще применяются численные методы определения множества Парето. Например, в области D формируется сетка, координаты узлов которой задаются датчиком случайных чисел, вычисляются значения критериев в этих узлах и путем сравнения их значений строится множество Парето на выбранной сетке.

3.5.2 Способы сужения множества Парето

Определение. *Оптимально-компромиссным решением* называется одно из Парето-оптимальных, предпочтительное с точки зрения ЛПР. Выбор ЛПР зависит от имеющейся информации о важности частных критериев.

При достаточно большой мощности множества D множество Парето может оказаться настолько большим, что ЛПР оказывается не в состоянии осуществить выбор самостоятельно. Для выбора оптимально-компромиссного решения в каждой конкретной многокритериальной задаче необходимо использовать дополнительную информацию, которая при формировании совокупности критериев осталась неформализованной и потому неиспользованной. Рассмотрим некоторые способы сужения множества Парето с использованием дополнительной информации.

Указание граничных значений критериев. Дополнительная информация в этом случае имеет вид: $z_i(X_{\text{opt}}) \le C_i$, $z_j(X_{\text{opt}}) \ge C_j$, $i,j = 1,...,m$, $i \ne j$. Каждое из чисел C_i представляет собой верхнюю или нижнюю границу для i-го критерия.

Заметим, что указание граничных значений критериев не может быть основано на постановке задачи принятия решения: набор значений $(C_1,C_2,...,C_m)$ и отношений предпочтения – это дополнительная информация, используемая ЛПР.

Субоптимизация. В этом случае дополнительная информация представляет собой указание на один из критериев как важнейший и задание граничных значений для остальных.

Лексикографическая оптимизация. Критерии упорядочиваются по относительной важности следующим образом: $z_i \succ z_j \succ ... \succ z_k$, $i, j, k = 1,...,m$, $i \ne j \ne k$: выбирается важнейший критерий, затем следующий за ним по важности и т.д. до наименее важного.

Методы ЭЛЕКТРА, предложенные профессором Б. Руа (Франция). В этих методах отношения предпочтения на множестве Парето строятся следующим образом.

Для каждого из m критериев (предполагается, что все критерии числовые) определяется вес – положительное число, характеризующее его важность. Например, при назначении весов критериям выбора автомобиля: цена (критерий 1), важнее комфортности (критерий 2), а та, в свою очередь, важнее, чем скоростные качества (критерий 3) и внешний вид автомобиля (критерий 4). Кроме того, критерии 3 и 4 имеют одинаковую важность, а, рассматриваемые совместно, имеют большую важность, чем критерий 1, т.е.:

$$p_1 > p_2 > p_3 = p_4,\ p_3 + p_4 > p_1.$$

Один из вариантов назначения весовых коэффициентов: $p_1 = 5$; $p_2 = 4$; $p_3 = p_4 = 3$.

Часто весовые коэффициенты нормируют: $\lambda_i = p_i \Big/ \sum_{j=1}^{m} p_j$, $i = 1,...,m$, т.е. $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$.

Для того чтобы определить, превосходит ли решение X_k решение X_l, необходимо:

1) Разбить множество критериев на три подмножества:

- критерии, по которым X_k превосходит X_l;
- критерии, по которым X_k и X_l имеют одинаковые оценки;
- критерии, по которым X_l превосходит X_k.

2) Определить относительную важность каждого из этих подмножеств $P_{kl}^{+}, P_{kl}^{=}, P_{kl}^{-}$ как сумму весов входящих в них критериев и считать, что вариант X_k превосходит X_l если, выполняется условие:

$$P_{kl}^{+} \Big/ \sum_{i=1}^{m} p_i > P_{kl}^{-} \Big/ \sum_{i=1}^{m} p_i \,.$$

Это условие является необходимым, но не достаточным условием превосходства X_k над X_l. В некоторых методах *ЭЛЕКТРА* формулируется дополнительные условия, которые учитывают не только оценки X_k и X_l по критериям, но и значения разностей этих оценок.

Пример. Выбрать место работы:

Критерий	№ варианта								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Зарплата, (руб.)	900	500	700	800	400	600	900	600	650
Отпуск, (дни)	20	30	36	40	60	30	35	24	35
Время, (мин)	60	20	40	50	15	10	60	10	40

Из смысла задачи следует, что критерии З (зарплата) и О (отпуск) следует максимизировать, а критерий В (время, затрачиваемое на дорогу) – минимизировать.

Парето-оптимальными являются варианты {3,4,5,6,7}, т.к. вариант 1 доминируется вариантом 7, варианты 2 и 8 – вариантом 6, вариант 9 – вариантом 3.

Указание нижних границ критериев: З – не менее 600 рублей; О – не менее 30 дней; В – не более 40 минут.

Этим дополнительным ограничениям удовлетворяют варианты {3,6,9}, из них Парето-оптимальными являются варианты 3 и 6, из которых и делается окончательный выбор.

Метод ЭЛЕКТРА. Веса критериев: $p_З = 0.5$, $p_В = 0.3$, $p_О = 0.2$. Сравнивая решения 3 и 6 при C_{36} = 0.8, получим: $P_{36}^{+} = 0.5 + 0.2 = 0.7$, $P_{36}^{=} = 0$, $P_{36}^{-} = 0.3$, $P_{36}^{+} \Big/ \sum_{i=1}^{3} p_i = 0.7 > P_{36}^{-} \Big/ \sum_{i=1}^{3} p_i = 0.3$, т.е. решение 3 предпочтительнее решения 6.

Субоптимизация. Пусть важнейшим критерием является З.

Ограничения: О – не менее 30 дней,

В – не более 40 минут.

Множество D образуют варианты {2,3,5,6,9}. Оптимальным является вариант 3, которому соответствует максимальная зарплата.

Лексикографическая оптимизация. Упорядочим критерии по относительной важности следующим образом: $З \succ В \succ О$ (важнейший критерий – зарплата, следующий за ним по важности – время, затрачиваемое на дорогу, наименее важный – отпуск). Максимальное значение по критерию З имеют варианты 1 и 7, по критерию В эти варианты одинаковы, по критерию О лучшим является вариант 7, который и будет выбран в качестве оптимального.

4 ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ РИСКА И НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

До сих пор рассматривались ситуации выбора между вполне определенными вариантами решения – принятия решений в условиях определенности. Рассмотрим ситуации, когда каждый из вариантов решения может быть реализован с известной вероятностью (принятия решения в условиях риска) и когда эти вероятности неизвестны (принятия решения в условиях неопределенности).

В этих ситуациях прибыль или затраты, связанные с каждым альтернативным решением, зависят от заданной или прогнозируемой вероятности его реализации и являются случайными величинами. В качестве критерия принятия решения, как правило, используется *ожидаемое значение стоимости*.

4.1 Построение "дерева решений" и таблицы исходов

Пример. Для финансирования проекта бизнесмену нужно занять сроком на один год 15 млн. руб. Банк может одолжить ему эти деньги под 15% годовых или вложить в дело со 100%-ным возвратом суммы, но под 9% годовых. Из прошлого опыта банку известно, что 4% таких клиентов ссуду не возвращают. Давать заем или нет?

Для решения подобных задач рекомендуется строить так называемое "дерево решений". Построим его в виде таблицы:

Альтернативы	Действия	Вероятности	Возврат, млн.руб.	Ожидаемый доход, млн.руб.
A	Дать заем	Вернули: 0.96	$15\times1.15 = 17.25$	$17.25\times0.96 + 0\times0.04 - 15 = 16.56 - 15 =$ **1.56**
		Не вернули: 0.04	0	$0 - 15 =$ **– 15**
B	Инвестировать под 9%	1.00	$15\times1.09 = 16.35$	$16.35 - 15 =$ **1.35**

Поскольку ожидаемый доход больше для альтернативы А, принимается решение выдать заем.

Последовательность принятия решения выглядит так:

1. Определить все возможные в данной ситуации варианты решения и для каждого из них определить все его возможные исходы (построить "дерево решений").

2. Оценить качество исходов и выбрать оптимальный вариант решения.

Замечания. 1. Таким образом будет выбран *более вероятный* вариант решения, но в реальности ситуация может быть и обратной.

2. Выбор решения зависит от вероятностей исходов, поэтому важно знать, насколько оно чувствительно к изменению значений вероятностей (насколько можно полагаться на это решение).

Проведем анализ чувствительности рассмотренного примера. Ожидаемые чистые доходы для альтернатив А и В довольно близки: 15.6 и 1.35 млн. руб. Выбор решения зависит от значения вероятности возврата займа. Обозначим вероятность "невозврата" займа через p и приравняем ожидаемые доходы для вариантов А и В: $17.25\times (1-p) + 0\times p - 15 = 1.35$, откуда $p = 0.052$.

Близость полученного результата к исходному $p = 0.04$ указывает, что выбор решения очень чувствителен к вероятности "невозврата" и даже малая ошибка может привести к выбору другого варианта решения.

"Дерево решений" – удобный инструмент для принятия решений в условиях риска, однако решать подобные задачи можно и другими способами.

Пример. Продавец газет закупает их оптом по 5 руб. и перепродает по 10 руб., а если у него остается нераспроданный товар, он может сдать его назад по 2 руб. Сколько ему нужно закупать газет, чтобы получить максимальный доход?

Составим таблицу возможных доходов продавца в руб.:

Закупка, шт.\Спрос, шт.	0	10	20	30	40	50
0	0	0	0	0	0	0
10	-30	50	50	50	50	50
20	-60	20	100	100	100	100
30	-90	-10	70	150	150	150
40	-120	-40	40	120	200	200
50	-150	-70	10	90	170	250

Статистика спроса на газеты (анализ проводился в течение 100 дней):

Объем спроса на газеты	0	10	20	30	40	50
Число дней, когда имел место такой спрос	3	17	37	29	12	2

Расчет ожидаемой прибыли:

Закупка, шт	Ожидаемая прибыль, руб
0	$= 0$
10	$(-30)\cdot 0{,}03 + 50\cdot 0{,}17 + 50\cdot 0{,}37 + 50\cdot 0{,}29 + 50\cdot 0{,}12 + 50\cdot 0{,}02 = \mathit{47{,}6}$
20	$(-60)\cdot 0{,}03 + 20\cdot 0{,}17 + 100\cdot 0{,}37 + 100\cdot 0{,}29 + 100\cdot 0{,}12 + 100\cdot 0{,}02 = \mathit{81{,}6}$
30	$(-90)\cdot 0{,}03 + (-10)\cdot 0{,}17 + 70\cdot 0{,}37 + 150\cdot 0{,}29 + 150\cdot 0{,}12 + 150\cdot 0{,}02 = \mathbf{86{,}0}$
40	$(-120)\cdot 0{,}03 + (-40)\cdot 0{,}17 + 40\cdot 0{,}37 + 120\cdot 0{,}29 + 200\cdot 0{,}12 + 200\cdot 0{,}02 = \mathit{67{,}2}$
50	$(-150)\cdot 0{,}03 + (-70)\cdot 0{,}17 + 10\cdot 0{,}37 + 90\cdot 0{,}29 + 170\cdot 0{,}12 + 250\cdot 0{,}02 = \mathit{38{,}8}$

4.2 Функция "полезности"

В рассмотренных примерах критерий оптимальности решения выражался в виде реальных денег. Зачастую возникают ситуации, когда при анализе следует использовать скорее "полезность", чем сумму платежей. Например, предположим, существует вероятность 50%, что инвестиция в 20 млн. руб. принесет прибыль в 40 млн. руб., и, с такой же вероятностью, будет полностью потеряна. Соответствующая ожидаемая прибыль равна $40\times 0{,}5 - 20\times 0{,}5 = 10$ млн. руб.

Хотя ожидается прибыль, разные люди могут по-разному интерпретировать полученный результат:

- инвестор, который идет на риск, может вложить деньги, чтобы с вероятностью 50% получить прибыль в 40 млн. руб.;

- осторожный инвестор может не захотеть рисковать потерей 20 млн. руб. Как видно, разные люди, в силу различных обстоятельств, проявляют разное отношение к риску, поскольку результаты для них имеют разную полезность.

Функция "полезности" как критерий выбора оптимальной альтернативы, отражает отношение к деньгам конкретного человека в конкретной ситуации, например, к риску выиграть или проиграть определенную сумму. В рассмотренном примере наилучший платеж равен 40 млн. руб., а наихудший – -20 млн. руб. Установим шкалу полезности U (utility), изменяющуюся от 0 до 100, где 0 соответствует полезности -20 млн., а 100 – +40 млн., т.е. $U(-20) = 0$ и $U(40) = 100$.

Если отношение лица, принимающего решение (ЛПР) беспристрастно к риску, то результирующая функция полезности является прямой линией, соединяющей точки (0,-20) и (100,40), см рис. 4.1, прямая Y. В этом случае полезность равна денежной оценке результата. В более реальных ситуациях функция полезности может принимать вид X, Z или W.

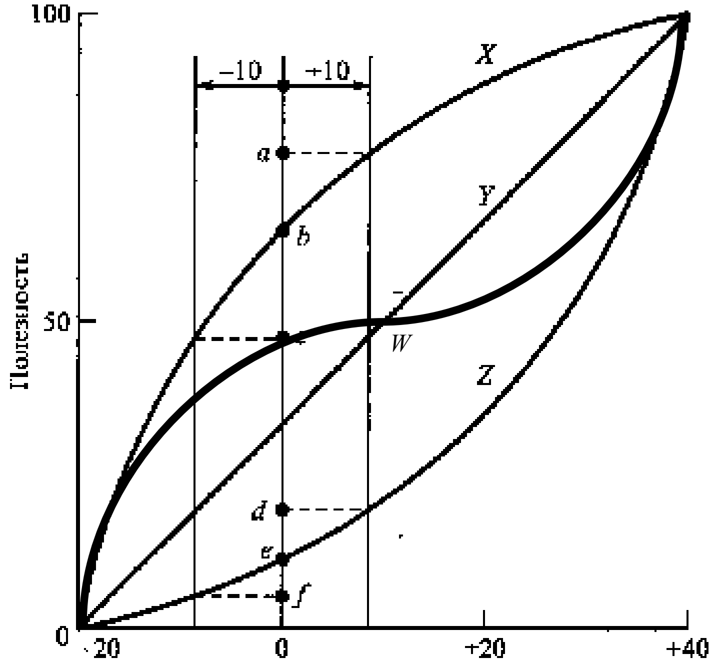


Рисунок 4.1 – График функции "полезности"

Кривая X характеризует осторожность, большую чувствительность к потере, чем к прибыли: при изменении на 10 млн. руб. вправо от точки, соответствующей 0 руб., полезность увеличивается на длину отрезка $[a,b]$, а влево – уменьшается на длину отрезка $[b,c]$, причем $|a,b| <| b,c|$. Кривая Z, наоборот, характеризует склонность к риску: при тех же изменениях ±10 млн. руб. движение вправо предпочтительнее движения влево – $|d,e| > |e,f|$. В общем случае ЛПР может изменять свою оценку полезности риска в зависимости от его суммы: в этом случае соответствующая кривая полезности будет иметь вид удлиненной буквы S, см рис. 4.1, кривая W.

Для построения реальной функции "полезности" необходимо определить полезность, соответствующую промежуточным значениям, например, x = -10 млн., x = 0, x = 10 млн., x = 20 млн. или x = 30 млн. по формуле:

$$U(x) = p \cdot U(-20) + (1-p) \cdot U(40) = 100 \cdot (1-p), \quad 0< p <1.$$

Для определения значения $U(x)$ ЛПР должен определить предпочтение между гарантированной наличной суммой x и возможностью сыграть в лотерею, где с вероятностью p реализуется проигрыш в сумме 20 млн. руб. и с вероятностью $(1-p)$ – выигрыш в 40 млн. руб. Под *предпочтением* понимается выбор значения p, при котором возможности сыграть в лотерею или получить гарантированную сумму x являются *одинаково привлекательными*. Например, если x = 10 млн. руб., то гарантированные 10 млн. руб. наличными и лотерея одинаково привлекательны при p = 0,3, то $U(10) = 100 \cdot (1 - 0,3) = 70$.

Эта процедура продолжается до тех пор, пока не будет получено количество точек (x, $U(x)$), достаточное для определения формы функции "полезности". Затем $U(x)$ можно окончательно определить путем приближения полученного множества точек алгебраическим полиномом.

Таким образом, процедура определения функции "полезности" полностью определяется мнением ЛПР, т.е. в эту процедуру вносится элемент субъективизма, причем получить точное значение p, обычно не удается: определяется некоторый диапазон. С другой стороны, полученные результаты для группы ЛПР (группы экспертов по какой-либо проблеме) можно классифицировать и, изучив их отношение к риску, принимать более обоснованные решения.

Замечание. "Вероятности", используемые при определении функции "полезности", не вытекают из каких-либо статистических данных, т.е. это не вероятности в том смысле, как их понимает теория вероятностей. "Настоящие" вероятности можно получить в результате обработки статистики построения функций "полезности".

4.3 Принятие решений в условиях неопределенности

Как указывалось выше, в данном случае вероятности реализации каждого из вариантов решения неизвестны. Наиболее популярный подход к решению подобных задач предусматривает заполнение таблицы возможных исходов и построение гипотез относительно вероятностей реализации вариантов решения.

Общий вид таблицы возможных исходов при m решениях (a_i, $i = 1,...,m$) и n условиях выбора (s_j, $j = 1,...,n$):

Решения\Условия	s_1	s_2	.....	s_n
a_1	$v(a_1,s_1)$	$v(a_1,s_2)$	....	$v(a_1,s_n)$
a_2	$v(a_2,s_1)$	$v(a_2,s_2)$	....	$v(a_2,s_n)$
....	....	....	....	....
a_m	$v(a_m,s_1)$	$v(a_m,s_2)$	....	$v(a_m,s_n)$

В расчетной практике наиболее популярны следующие гипотезы:

1) все возможные условия выбора равновероятны (критерий Лапласа);

2) выбор наилучшей альтернативы из наихудших (минимаксный критерий);

3) прогнозирование вероятностей с применением "параметра оптимизма" (критерий Гурвица);

4) замена таблицы возможных исходов таблицей потерь (критерий Сэвиджа).

Критерий Лапласа опирается на принцип недостаточного обоснования: поскольку распределение вероятностей неизвестно, нет причин считать их различными, т.е. $P(s_j) = 1/n$, $j = 1,...,n$. Если при этом $v(a_i,s_j)$ – прибыль, то лучшим является решение, обеспечивающее $\max\limits_i \left\{ \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} v(a_i, s_j) \right\}$, а если $v(a_i,s_j)$ – издержки, то лучшему решению соответствует $\min\limits_i \left\{ \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} v(a_i, s_j) \right\}$.

Пример. Выбор вместимости строящегося стадиона. Варианты решения: 15, 20, 30 или 35 тыс. человек. В качестве условий выбора используем затраты на строительство при различных уровнях комфорта зрителей. Таблица возможных издержек для данной задачи имеет вид:

Вместимость, тыс.чел.	Издержки, млн. руб			
15	100	120	160	185
20	120	110	145	170
30	140	145	140	175
35	170	165	150	190

Решение задачи по критерию Лапласа:

Вместимость, тыс.чел.	Ожидаемые затраты, млн. руб
15	(100 + 120 + 160 + 185)/4 = *141,25*
20	(120 + 110 + 450 + 170)/4 = **136,25**
30	(140 + 145 + 140 + 175)/4 = *150*
35	(170 + 165 + 150 + 190)/4 = 168,75

Как видно, оптимальным с точки зрения критерия Лапласа является вариант стадиона вместимостью 20 тыс. человек.

Замечание. Если удается спрогнозировать распределение вероятностей возможных исходов, т.е. зафиксировать значения $P(s_j)$, $j = 1,...,n$, то лучшим с точки зрения прибыли будет решение $\max\limits_i \left\{ \sum\limits_{j=1}^{n} P(s_j) \cdot v(a_i, s_j) \right\}$, а с точки зрения издержек – решение $\min\limits_i \left\{ \sum\limits_{j=1}^{n} P(s_j) \cdot v(a_i, s_j) \right\}$. Такой метод принятия решения называют ***методом Байеса-Лапласа.***

Минимаксный критерий основан на консервативном, осторожном поведении ЛПР. Если в таблицу возможных исходов внесены значения получаемой прибыли, то в качестве оптимального выбирается решение, соответствующее $\max\limits_i \left\{ \min\limits_j v(a_i, s_j) \right\}$, а если в таблицу внесены издержки, то – $\min\limits_i \left\{ \max\limits_j v(a_i, s_j) \right\}$.

Результаты применения этого критерия для решения задачи выбора вместимости стадиона:

Вместимость, тыс.чел.	Издержки, млн. руб				Max. издержки, млн. руб.
15	100	120	160	185	*185*
20	120	110	145	170	**170**
30	140	145	140	175	*175*
35	170	165	150	190	*190*

Как видно наилучшей альтернативой из наихудших является решение построить стадион на 20 тыс. человек.

Критерий Гурвица – это минимаксный критерий, модифицированный применением "параметра оптимизма" $0 \le \alpha \le 1$. Если значения $v(a_i,s_j)$ представляют собой доходы, лучшему решению соответствует

$\max_i\left\{\alpha\cdot\max_j v(a_i,s_j)+(1-\alpha)\min_j v(a_i,s_j)\right\}$, а если $v(a_i,s_j)$ – издержки, то – $\min_i\left\{\alpha\cdot\min_j v(a_i,s_j)+(1-\alpha)\max_j v(a_i,s_j)\right\}$. Отметим, что при α = 0 критерий Гурвица становится минимаксным, а при α = 1 – максимаксным, т.е. будет выбираться наилучшая альтернатива из наилучших.

Например, при α = 0,25 применение критерия Гурвица для решения задачи о выборе вместимости стадиона даст следующие результаты:

Вместимость, тыс.чел.	Издержки, млн. руб				Критерий Гурвица, млн. руб.
15	100	120	160	185	100·0,25 + 185·(1 – 0,25) = *163,25*
20	120	110	145	170	110·0,25 + 170·(1 – 0,25) = **155**
30	140	145	140	175	140·0,25 + 175·(1 – 0,25) = *166,25*
35	170	165	150	190	150·0,25 + 190·(1 – 0,25) = *180*

т.е. оптимальной вместимостью стадиона также окажется 20 тыс. человек. Но если принять α = 0,7, то получим:

Вместимость, тыс.чел.	Издержки, млн. руб				Критерий Гурвица, млн. руб.
15	100	120	160	185	100·0,7 + 185·(1 – 0,7) = **125,5**
20	120	110	145	170	110·0,7 + 170·(1 – 0,7) = *128*
30	140	145	140	175	140·0,7 + 175·(1 – 0,7) = *150,5*
35	170	165	150	190	150·0,7 + 190·(1 – 0,7) = *162*

т.е оптимальной стала вместимость 15 тыс. человек.

Критерий Сэвиджа предусматривает формирование таблицы потерь по правилу: $r(a_i,s_j)=\begin{cases}\max\limits_j\{v(a_i,s_j)\}-v(a_i,s_j), \text{ если } v-\text{доход}\\ v(a_i,s_j)-\min\limits_j\{v(a_i,s_j)\}, \text{ если } v-\text{потери}\end{cases}$. Оптимальным считается решение, которому соответствует минимум потерь. Таблица потерь для задачи выбора вместимости стадиона:

Вместимость, тыс.чел.	Потери, млн. руб				Max. потери, млн. руб.
15	0	10	20	15	**20**
20	20	0	5	0	**20**
30	40	35	0	5	*40*
35	70	55	10	20	*70*

Как видно, согласно критерию Сэвиджа, уровень расходов для вариантов вместимости 15 и 20 тыс. человек одинаков, т.е. можно выбрать любой из этих вариантов

Другие гипотезы относительно вероятностей реализации вариантов решения конкретной задачи можно сформировать из мнений экспертов с учетом того, что эксперты высказывают мнения, но не несут ответственности за принятое на их основе решение.

5 ОСОБЕННОСТИ ПРИНЯТИЯ ПРОЕКТНЫХ РЕШЕНИЙ

Задачи выбора наилучших вариантов при проектировании технических объектов и систем в условиях ограниченного финансирования является одной из наиболее типичных для использования методов принятия решений.

Важными особенностями проектируемых технических объектов являются: применение новых технологий, применение новых конструкций машин и оборудования, использование компьютерных технологий в системах управления, усложнение структуры и рост числа объектов информационного взаимодействия, необходимость адаптации к быстроменяющейся обстановке.

На всех этапах проектирования задачи анализа и синтеза решаются как оптимизационные. Однако решение таких задач, как синтез оптимальной структуры объекта, параметрической оптимизации встречает серьезные трудности, обусловленные следующими обстоятельствами:

− отсутствие достоверных данных, для построения математических моделей, необходимых при решении задач оптимизации;

− высокая стоимость и длительные сроки проведения экспериментальных исследований для получения достоверных данных;

− субъективизм в выборе критериев, весовых коэффициентов, оценки стоимостных затрат и т.д.;

− высокая размерность решаемых задач;

− ведение проекта группами специалистов разного профиля.

В последнем случае возникают проблемы конструирования всей системы из готовых «черных ящиков», синтеза по техническим характеристикам элементов объекта с требуемыми показателями качества. В этих условиях для принятия проектных решений возрастает роль качественных методов - экспертных оценок, а также методов принятия решений в условиях неопределенности, или частичной неопределенности, т.е. методов Байеса-Лапласа, Сэвиджа и др.

5.1 Основные понятия

Проект – это последовательность взаимосвязанных операций, направленных на достижение конкретного нового результата. Для их выполнения требуется продолжительное время и ресурсы (трудовые, материальные, оборудование). Иногда в качестве синонима термина «проект» используется термин «программа», хотя, строго говоря, программа представляет собой долгосрочную деятельность и подразумевает выполнение более чем одного проекта.

В отличие от проектов и программ задача (частное техническое задание) является краткосрочным действием (рассчитанным на период от нескольких недель до нескольких месяцев), выполняемым одной организацией. Из комбинации задач может складываться проект.

Проект в своем естественном развитии проходит ряд отдельных фаз, образующих его жизненный цикл: формирование концепции, планирование, проектирование, изготовление, ввод в эксплуатацию (инсталляция) и завершение.

Основными особенностями проектов являются:

− наличие конкретной, строго определенной цели;

− привлечение для их выполнения нескольких групп проектировщиков;

− требование наличия ресурсов, объемы которых, как правило, ограничены;

− наличие процесса управления, т.е. планирования, контроля и регулирования.

Многим проектам, связанным с разработкой новых технических объектов, присущи: уникальность; наличие неопределенности; сложность решаемых задач. Наиболее часто выпускникам специальности 151701 – «Проектирование технологических машин и комплексов» прдется участвовать в выполнении проектов по созданию нового производства, в том числе многоассортиментного, или по разработке оптимальной стратегии перепрофилирования действующего производства на выпуск новой продукции. На фазе жизненного цикла этого типа проектов выполняются следующие работы.

1 *Концепция*: определение возможностей или потребностей, краткое технико-экономическое обоснование.

2 *Определение* (*планирование*): подготовка предложения по новому техническому объекту, план его создания, лист согласования, определение научно-исследовательских работ, запрос на ассигнования.

3 *Проектирование*: проектирование технической системы или объекта, возможно, создание и испытание прототипа.

4 *Разработка и производство*: создание прототипа серийного образца, а также создание производственного и тестового инструментария; изготовление первых серийных образцов.

5 *Внедрение, установка*: распространение и продажа продукции; оценка производительности.

6 *Завершение проекта*: создание концепций новых проектов для совершенствования продукта; итоговый отчет для сравнения полученных результатов с планом создания объекта, запросом на ассигнования и т.д.

Под управлением проектами понимается выполнение некоторого комплекса действий по планированию, распределению и регулированию трудовых и материальных ресурсов, оборудования с учетом всех ограничений данного проекта (технических, бюджетных и временных). Управление проектами включает:

– определение центров ответственности за проект в целом;

– создание системы комплексного планирования и контроля;

– формирование команды проекта и управление ею с целью объединения и координации усилий всех исполнителей, задействованных в проекте.

По степени определенности и полноты исходных данных задачи принятия проектных решений делятся на три класса:

− к первому классу относятся задачи, для которых задаются лишь перечень вариантов n и критерий в виде словесной формулировки целевой функции (Ц), это задачи принятия решений в условиях «полной» неопределенности или задачи качественного характера;

− второй класс задач характеризуется заданием количественных данных (часто приближенных) о значениях критерия в различных ситуациях, возможно вероятностях этих ситуаций и т.п., это задачи принятия решений в условиях «частичной» неопределенности (или риска);

− для задач третьего класса задаются математические модели, позволяющие рассчитывать значения критерия и другие характеристики, необходимые для принятия решения, это класс задач математического программирования (условия полной определенности).

Задачи первого класса обычно возникают, когда решение необходимо принять оперативно и в достаточно новой области, а для сбора экспериментальных (статистических) данных и разработки математической модели нет времени (или средств). Для решения задач этого класса широкое распространение получили методы экспертных оценок.

Для задач второго класса известно большое число методов, как классических с хорошо разработанной теорией, так и эвристических, например, методы минимакса, Байеса-Лапласа, Гурвица, Сэвиджа.

5.2 Методика принятия проектного решения

При выборе методов, используемых для принятия решения, необходимо в первую очередь учитывать условия и фазы жизненного цикла проекта. В табл. 5.1 даны общие рекомендации по выбору методов в зависимости от этих факторов.

Таблица 5.1 Рекомендации по выбору методов, используемых для принятия проектных решений

Этапы ЖЦ проекта	Условия принятия решений			
	Полная неопределенность	Неопределенность	Частичная неопределенность	Определенность
Концепция	Методы экспертных оценок	Методы экспертных оценок	Байесовские методы	Анализ иерархии
Планирование	–	Методы Гурвица, Сэвиджа	Байесовские методы	Анализ иерархии
Проектирование	–	Методы Гурвица, Сэвиджа	Байесовские методы	Методы оптимизации
Производство	–	–	Методы математической статистики	Методы оптимизации

В рассматриваемой методике используются следующие положения:

1) принятие решений производится на каждой фазе выполнения проекта;

2) наибольшее число альтернативных вариантов анализируется на начальных фазах проекта (концепция, планирование);

3) состав группы альтернативных вариантов после завершения очередной фазы может изменяться;

4) для каждой фазы жизненного цикла проекта характерны свои признаки генерации вариантов;

5) для принятия решения предпочтительно использовать результаты применения комбинации различных методов.

Эффективность принимаемых решений в основном определяется тремя факторами:

− правильной постановкой задачи исследования, т.е. определением типа задачи и выбором модели;

− выбором наиболее эффективного метода решения (или группы методов);

− использованием компьютерных технологий для оперативной обработки данных.

Принятие проектных решений включает следующие этапы:

1) формирование множества альтернативных вариантов

2) определение задания для экспертизы;

3) задание целевой функции;

4) формирование экспертной группы;

5) выбор метода проведения экспертизы;

6) работа группы экспертов;

7) математическая обработка результатов экспертизы;

8) принятие решения по результатам экспертизы;

9) выделение вариантов для окончательного принятия решения;

10) определение показателей эффективности вариантов в различных ситуациях;

12) расчет оптимального варианта методами принятия решений в условиях неопределенности.

Учитывая особенности задач проектирования и возможности использования компьютерных технологий, наибольшее применение находят следующие методы:

− экспертных оценок, в частности ранжирования вариантов (ЭОР) и парных сравнений (ЭОПС);

− Байеса-Лапласа (Б-Л);

– минимакса (ММ);

− Гурвица (Г);

− минимизации последствий ошибочного решения Сэвиджа (С).

В зависимости от важности исследуемой проблемы, повторяемости решения задач, наличия информации о вероятностях ситуаций в табл. 5.2 приведены рекомендации по применению различных групп методов.

Таблица 5.2 – Рекомендации по применению различных групп методов

Важность проблемы	Вероятности ситуаций	Повторяемость задач	
		однократные	многократные
Высокая	известны	ЭОПС; ММ	ЭОПС; Б-Л
	неизвестны	ЭОПС; ММ	ЭОПС; ММ
Средняя	известны	ЭОПС; Б-Л; ММ; С	ЭОР; Б-Л; Г
	неизвестны	ЭОПС; С; ММ	ЭОР; Б-Л; Г
Низкая	известны	ЭОР; Б-Л; ММ; С	ЭОР; Б-Л; Г
	неизвестны	ЭОР; Б-Л; Г; С	ЭОР; Б-Л; Г

Для обработки статистических данных также используется многочисленная группа методов, в частности, регрессионный анализ (РА), корреляционный анализ (КА), дисперсионный анализ (ДА), проверки статистических гипотез (ПСГ).

Каждый метод эффективен для решения определенной группы задач. Так, при анализе существенности влияния факторов на выход объекта при большом числе факторов и значительном изменении критерия удобно использовать метод ДА. При идентификации моделей важное значение имеет точность определения значений входных переменных. Если ошибками в определении X можно пренебречь, то можно использовать методы РА, если же значения X рассматриваются как случайные величины, то применяются методы КА.

Методы ПСГ используются в различных задачах, связанных с анализом случайных величин (идентификация закона распределения случайной величины, проверка существенности различий между параметрами распределения), построением доверительных интервалов, оценки степени согласованности мнений экспертов и др.

Принятие проектных решений связано с большим объемом вычислений и для оперативного их выполнения требуется компьютерная поддержка. В последние годы на рынке программных продуктов появились инструментальные средства поддержки принятия проектных решений (AutoPLANT, PLANT–4D, Model Studio CS).

6 ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

Лабораторные работы выполняются в среде MathCAD.

Лабораторная работа №1. *Поиск безусловного и условного экстремума функции двух переменных.*

Задание: 1. Найти (x_1^*, x_2^*), в которой заданная функция $f(x_1,x_2)$ из таблицы 6.1 достигает минимума или максимума.

2. Найти точку (x_1^*, x_2^*), в которой заданная функция $f(x_1,x_2)$ из таблицы 6.2 достигает минимума при выполнении ограничения $g(x_1,x_2) \le 0$.

Таблица 6.1 – Функции и области поиска экстремума

№ п/п	Функция $f(x_1,x_2)$	Вид экстремума	Область поиска экстремума
1	$-0.75\cdot(x_1-0.5\cdot x_2^2)^2-1.25\cdot(2-x_2)^2+0.8$	Максимум	$x_1\in[0,5]$, $x_2\in[1,6]$
2	$(x_1^2+x_2-1)^2+0.15\cdot x_1^3-x_2+0.9$	Минимум	$x_1\in[-2,3]$, $x_2\in[-2,3]$
3	$-x_1+1.4\cdot x_2-e^{0.01\cdot x_1^2+0.11\cdot x_2^2}$	Максимум	$x_1\in[-13,-8]$, $x_2\in[-2,3]$
4	$0.2\cdot(x_1+x_2)^2+0.3\cdot(2.5+x_2)^2+0.3$	Минимум	$x_1\in[-1,4]$, $x_2\in[-5,0]$
5	$-0.6\cdot(x_1+1.6)^2-0.25\cdot(x_2+3.2)^2+0.6$	Максимум	$x_1\in[-4,1]$, $x_2\in[-6,-1]$
6	$-1.9\cdot[1.2+0.35\cdot(x_1+3.1)^2+0.88\cdot(x_2-2.1)^2]^{-1}$	Минимум	$x_1\in[-5,0]$, $x_2\in[-1,4]$
7	$1.15\cdot e^{-0.38\cdot(x_1-2.87)^2-0.58\cdot(x_2-1.11)^2}$	Максимум	$x_1\in[0,5]$, $x_2\in[-2,3]$
8	$-0.8\cdot x_1+1.1\cdot x_2^3-0.9\cdot x_1^3-1.2\cdot x_2+2.9\cdot x_1^2+3.1\cdot x_2^2$	Минимум	$x_1\in[-2,3]$, $x_2\in[-3,2]$
9	$-0.95\cdot x_1^4-1.03\cdot x_2^2-4.11\cdot x_1+4.96\cdot x_2$	Максимум	$x_1\in[-3,2]$, $x_2\in[1,6]$
10	$(x_1-0.94)\cdot e^{1.03\cdot x_1}-(1.12+e^{-0.95\cdot x_2})\cdot \mathrm{Sin}(x_2)$	Минимум	$x_1\in[-4,1]$, $x_2\in[-1,4]$
11	$-1.1\cdot(x_1^2+0.9\cdot x_2-0.8)^2-0.12\cdot x_1^3+x_2-1$	Максимум	$x_1\in[-3,2]$, $x_2\in[-2,3]$
12	$1.1\cdot x_1-1.5\cdot x_2+e^{0.02\cdot x_1^2+0.18\cdot x_2^2}$	Минимум	$x_1\in[-10,-5]$, $x_2\in[-2,3]$
13	$-0.4\cdot(0.8\cdot x_1+x_2)^2-0.3\cdot(2.4-x_2)^2+1$	Максимум	$x_1\in[-5,0]$, $x_2\in[0,5]$
14	$0.48\cdot(x_1+2.1)^2+0.14\cdot(x_2+4.2)^2-0.4$	Минимум	$x_1\in[-3,2]$, $x_2\in[-6,-1]$
15	$2.8\cdot[0.9+2.5\cdot(x_1-1.1)^2+0.38\cdot(x_2+1.9)^2]^{-1}$	Максимум	$x_1\in[-1,4]$, $x_2\in[-5,0]$
16	$-1.48\cdot e^{-1.91\cdot(x_1-2.12)^2-0.45\cdot(x_2-3.91)^2}$	Минимум	$x_1\in[0,5]$, $x_2\in[1,6]$
17	$0.8\cdot(x_1-0.4\cdot x_2^2)^2+1.3\cdot(x_2-1.5)^2-1.2$	Минимум	$x_1\in[-1,4]$, $x_2\in[-2,3]$
18	$1.2\cdot x_1-0.9\cdot x_2^3+1.1\cdot x_1^3+0.8\cdot x_2-3.1\cdot x_1^2-2.9\cdot x_2^2$	Максимум	$x_1\in[-2,3]$, $x_2\in[-3,2]$
19	$1.06\cdot x_1^4+0.94\cdot x_2^2+3.88\cdot x_1-5.16\cdot x_2$	Минимум	$x_1\in[-3,2]$, $x_2\in[1,6]$
20	$-(x_1-1.07)\cdot e^{0.96\cdot x_1}+(0.89+e^{-1.12\cdot x_2})\cdot \mathrm{Sin}(x_2)$	Максимум	$x_1\in[-4,1]$, $x_2\in[-1,4]$

Таблица 6.2 – Функции и ограничения

№ п/п	Функция $f(x_1,x_2)$	Функция $g(x_1,x_2)$
1	*2*	*3*
1	$0.8\cdot(1.1\cdot x_2-x_1)^2+1.2\cdot(2.75+x_1)^2-0.63$	$0.16\cdot x_1^2+0.12\cdot x_2^2-1.07$
2	$0.91\cdot(x_1-1.1)^2+0.3\cdot(x_2-2.2)^2+0.4$	$0.83\cdot x_1^2+0.21\cdot x_2^2-0.95$
3	$0.4\cdot(0.8\cdot x_2+x_1)^2+0.3\cdot(2.4-x_1)^2+0.3$	$0.59\cdot x_1^2+0.15\cdot x_2^2-1.15$
4	$0.16\cdot(x_1+6.4)^2+(x_2+3.2)^2-1.3$	$0.02\cdot x_1^2+0.1\cdot x_2^2-0.85$
5	$0.7\cdot(0.9\cdot x_1-x_2)^2+1.2\cdot(1.8-x_2)^2-0.8$	$0.31\cdot x_1^2+0.08\cdot x_2^2-0.8$

Продолжение таблицы 6.2

1	*2*	*3*
6	$0.83\cdot(x_1+1.2)^2+0.42\cdot(x_2-2.4)^2+0.2$	$0.69\cdot x_1^2+0.17\cdot x_2^2-0.9$
7	$0.8\cdot(1.1\cdot x_1-x_2)^2+1.2\cdot(2.75+x_2)^2-0.3$	$0.09\cdot x_1^2+x_2^2-1.1$
8	$0.11\cdot(x_1-7.2)^2+0.29\cdot(x_2+3.6)^2-0.5$	$0.08\cdot x_1^2+0.02\cdot x_2^2-1.05$
9	$0.2\cdot(x_1+x_2)^2+0.3\cdot(2.5+x_1)^2+0.2$	$0.13\cdot x_1^2+0.21\cdot x_2^2-0.96$
10	$0.77\cdot(x_1+1.3)^2+0.19\cdot(x_2-3.9)^2+0.5$	$0.15\cdot x_1^2+0.59\cdot x_2^2-1.3$
11	$-2.7\cdot[1.1+2.4\cdot(x_1-0.9)^2+0.43\cdot(x_2+2.2)^2]^{-1}$	$0.63\cdot x_1^2+0.19\cdot x_2^2-1.05$
12	$-1.8\cdot[0.9+0.25\cdot(x_1-3.2)^2+0.78\cdot(x_2+1.9)^2]^{-1}$	$0.23\cdot(x_1-1)^2+0.59\cdot(x_2-1)^2-1.45$
13	$-0.7\cdot x_1+1.2\cdot x_2^3-1.1\cdot x_1^3-1.3\cdot x_2+2.8\cdot x_1^2+3.2\cdot x_2^2$	$0.17\cdot(x_1+2)^2+0.55\cdot(x_2+1)^2-1.15$
14	$(x_1-1.14)\cdot e^{0.93\cdot x_1}-(0.92+e^{-1.05\cdot x_2})\cdot \mathrm{Sin}(x_2)$	$0.29\cdot(x_1-1)^2+0.85\cdot(x_2+1)^2-0.85$
15	$0.96\cdot x_1^4+1.14\cdot x_2^2+4.18\cdot x_1-4.88\cdot x_2-0.7$	$0.67\cdot(x_1+1)^2+0.35\cdot(x_2+1)^2-0.55$
16	$(x_1^2+x_2-0.95)^2+0.18\cdot x_1^3-x_2+1.9$	$0.71\cdot(x_1+1)^2+0.28\cdot(x_2+1)^2-0.65$
17	$0.9\cdot(1.2-x_2)^2+1.3\cdot(0.8\cdot x_1-x_2)^2-0.4$	$0.75\cdot x_1^2+0.25\cdot x_2^2-0.75$
18	$0.94\cdot x_1-1.45\cdot x_2+e^{0.03\cdot x_1^2+0.13\cdot x_2^2}$	$0.28\cdot(x_1+3)^2+0.77\cdot x_2^2-0.91$
19	$0.2\cdot(3.5+x_2)^2+0.3\cdot(1.5\cdot x_1+x_2)^2+0.8$	$0.31\cdot(x_1+2)^2+0.72\cdot(x_2-1)^2-0.96$
20	$0.78\cdot(x_1-0.44\cdot x_2^2)^2+1.13\cdot(x_2-1.57)^2-1.6$	$0.81\cdot(x_1+1)^2+0.22\cdot x_2^2-0.89$

Порядок выполнения работы:

1) изобразить линии равных значений функции $f(x_1,x_2)$ из таблицы 4.1 в области поиска ее экстремума с применением процедуры ***CreateMesh***;

2) выбрать начальное приближение $(x_1^{(0)},x_2^{(0)})$ к точке экстремума функции в указанной области;

3) найти точку минимума (максимума) функции $f(x_1,x_2)$ из таблицы 4.1 с применением процедуры ***Minimize*** (***Maximize***);

4) изобразить линии равных значений функции $f(x_1,x_2)$ из таблицы 4.2 вблизи точки (0,0) и линию $g(x_1,x_2)=0$ с применением процедуры ***CreateMesh***;

5) выбрать начальное приближение $(x_1^{(0)},x_2^{(0)})$ к точке экстремума функции с

6) найти точку минимума функции $f(x_1,x_2)$ при условии $g(x_1,x_2)\le 0$ с применением блока ***Given*** и процедуры ***Minimize***.

Контрольные вопросы:

1. Какое направление поиска минимума функции из фиксированной точки наиболее предпочтительно? Почему?

2. За счет чего метод наискорейшего спуска превосходит в скорости метод градиента с постоянным шагом?

3. Основные недостатки градиентных методов оптимизации.

4. Как следует поступить, если результатом применения метода сравнения значений целевой функции на сетке значений аргументов является точка, расположенная на границе области изменения аргументов?

5. В какой ситуации, и каким образом производится уменьшение величины рабочего шага поиска при использовании метода многогранника?

6. Какие обстоятельства затрудняют применение метода штрафных функций?

7. Как должна выбираться начальная точка поиска условного экстремума при использовании метода прямого поиска с возвратом и метода возможных направлений?

8. Каков порядок применения методов условной оптимизации при ограничениях типа равенств?

Лабораторная работа №2. *Решение задачи линейного программирования*

Задание: Сформулировать математически указанный вариант задачи линейного программирования и решить ее в среде MathCAD.

Варианты заданий

Вариант 1. Цех выпускает 3 вида продукции из 4-х видов сырья. Определить объем производства каждого продукта, при котором достигается максимальная прибыль и достаточны запасы сырья:

Вид продукции	Вид сырья,				Стоимость 1 т, т. руб
	A	B	C	D	
	потребность, т				
I	2	1	-1	4	7
II	2	4	2	- 1*	3
III	-1	-1	-1	1	2
	Запасы, т				
	8	4	1	8	

* (-1) – побочный продукт в данном процессе.

Вариант 2. Фирма-посредник поставляет компьютеры с 3-х складов в 5 магазинов. Число компьютеров на складах, потребности магазинов и стоимости перевозок:

№ склада	№ магазина					Число комп. на складе
	1	2	3	4	5	
	Затраты на 1 компьютер, руб					
I	10	0	30	40	20	15
II	50	10	20	30	30	25
III	40	80	10	40	30	20
	Потребности магазинов, шт.					
	20	12	5	8	15	

Определить поставки с каждого склада в каждый магазин, при которых суммарная стоимость перевозок минимальна.

Вариант 3. Распределите годовой бюджет рекламной фирмы, равный 500000 $ по четырем видам рекламы так, чтобы получить максимальную прибыль:

Ср-во рекламы	Ограничения на распределение бюджета	Прибыль, $/$
Телевидение	Не более 40%	10
Радио	Не менее 50% от телевидения	3
Газеты	-	4
Интернет	Не более 20%	6

Вариант 4. Сформировать диету из пяти видов продуктов с необходимым содержанием питательных веществ при минимальных затратах:

Продукты	Содержание питательных веществ, г/кг				Цена 1 кг., руб.
	белки	жиры	углеводы	витамины	
Хлеб	2	1	12	2	12
Соя	12	8	0	2	36
Рыба	10	3	0	4	62
Фрукты	1	0	4	6	28
Молоко	2	4	3	2	20
	Минимальное содержание в диете, ед.				
	20	10	30	40	

Вариант 5. Спланировать недельные поставки продукции от каждого поставщика каждому потребителю, при которых транспортные расходы будут минимальными:

Поставщики	Потребители				Недельный объем производства, шт.
	W_1	W_2	W_3	W_4	
	Стоимость транспорта 1 шт., руб				
F_1	200	200	200	400	15
F_2	300	100	100	300	25
F_3	300	600	300	400	20
	Недельная потребность, шт.				
	20	12	5	9	

Вариант 6. Максимизировать прибыль компании, изготавливающей три вида смазочного масла из четырех видов сырья:

Вид масла	Содержание сырья в масле				Цена 1 бочки, руб.	Max. объем продажи, бочек/год
	X	Y	Z	W		
A	-	-	≤25%	≥10%	9000	90000
B	-	-	-	≥15%	8700	100000
C	≥20%	≤50%	≤15%	-	8400	120000
	Цена 1 бочки сырья, руб.					
	7200	6000	6700	7500		

Вариант 7. Сформировать недельный план выпуска 3-х видов продукции мебельного цеха, обеспечивающий максимальную прибыль:

Виды продукции	Затраты труда, чел/час			Прибыль от продажи, руб	Мин. выпуск, шт./неделя
	Лесопилка	Сборка	Отделка		
Стулья	1	2	1	900	40
Столы	2	4	1	1100	10
Шкафы	4	2	2	1500	5
	Резерв раб. силы, чел/час/нед.				
	360	520	220		

Вариант 8. Спланировать годовые поставки стали трех металлургических заводов четырем металлообрабатывающим, минимизировать транспортные расходы:

Метал-лообраб. заводы	Металлургические заводы			Годовая потребность, тыс.т.
	M_1	M_2	M_3	
	Стоимость перевозки 1 тыс. т, руб.			
P_1	1500	1900	1400	12
P_2	1900	1800	1600	15
P_3	1900	1800	2000	25
P_4	1500	1900	1800	36
	Объем производства, тыс.т./год			
	50	30	20	

Вариант 9. Определить объем продаж трех видов столового вина и необходимое для этого число бутылок красного вина для получения максимальной прибыли:

Столовое вино	Ограничение по содержанию красного вина				Цена 1 бут., $	Объем продаж, бут.
	Бургундское	Бордо	Испанское	Анжуйское		
Божеле	≥30%	-	≤50%	-	10,96	≤200000
Сент-Жорж	≥30%	-	≤30%	≥20%	20,46	не огр.
Сент-Эмильон	-	≥60%	≤30%	-	20,08	≤180000
	Цена 1 бутылки, $					
	10,08	9,6	5	6,6		
	Ограничения на импорт, бут.					
	100000	130000	150000	75000		

Вариант 10. Определить объем недельного выпуска каждого из видов продукции цеха сборки бытовой электроники, при котором достигается максимальная прибыль:

Вид продукции	Объем работы, чел/час.			Прибыль от продажи, т. руб.
	Изгот.частей	Сборка	Проверка	
Муз. центр	2	1	1	1.5
Телевизор	3	2	1	2.2
Видеоплейер	2	3	2	0.9
	Макс. объем работ, чел/час/нед.			
	360	240	180	

Возможность хранения: не более 170 изделий в неделю.

Вариант 11. Сформировать недельный план перевозок подшипников с трех фабрик четырем ремонтным предприятиям так, чтобы сумма расходов на перевозку была минимальной:

Фабрики	Ремонтные предприятия				Объем производства, тыс. шт./нед.
	C_1	C_2	C_3	C_4	
	Стоимость перевозки 1 тыс. шт., руб				
F_1	130	170	170	140	50
F_2	180	160	160	180	25
F_3	120	140	190	170	25
	Объемы ремонтов, тыс.шт./нед.				
	15	20	20	30	

Вариант 12. Распределите часть годового семейного бюджета, равную 100 т. руб. по четырем видам вложений так, чтобы получить максимальную прибыль:

Вид вложения	Ограничения на распределение бюджета	Прибыль, руб./руб.
Акции	Не более 50% от Сбербанка	1.25
Валюта	Не менее 20%	1.15
Сбербанк	Не менее 50%	1.07
Коммерческий банк	Не более 20%	1.1

Вариант 13. Составить недельный план выпуска продукции станкостроительного производства, обеспечивающий максимальную прибыль:

Вид станка	Необх. кол-во комплектующих, шт.			Прибыль, т.руб./шт.	Возможная реализация
	I	II	III		
Сверлильный	1	4	2	10	70
Фрезерный	2	3	3	30	80
Токарный	10	10	8	20	40
	Кол-во доступных изделий, шт.				
	650	850	650		

Вариант 14. Минимизировать расходы на перевозку бригад по обслуживанию бурового оборудования в 5 городов мира тремя авиалиниями:

Авиалиния	Города					Возможн. число перевозок
	Калькутта	Сидней	Бейрут	Даллас	Сан-Паулу	
	Стоимость одной перевозки, $					
A_1	1600	2400	800	1000	1400	20
A_2	1500	2100	700	1200	1600	30
A_3	1400	2300	700	1400	1200	20
	Необходимое число перевозок					
	15	10	20	10	15	

Вариант 15. Максимизировать прибыль компании, изготавливающей три вида бензина с применением четырех присадок:

Вид бензина	Содержание присадки в бензине				Цена 1 литра, руб.	Max. объем продажи, л/мес.
	ТЭС	ММА	АДА	К-31		
А-80	8-10%	0%	0%	5-7%	15	50000
А-92	0%	0%	10-15%	7-10%	18	80000
А-95	0%	12-15%	10-12%	0%	21	30000
	Цена 1 литра присадки, руб.					
	25	60	77	95		

Вариант 16. Обеспечить выполнение плана поставок, возможность хранения продукции и максимальную прибыль цеха красителей:

Цвет красителя	Время переработки на стадиях ХТС, ч.				Прибыль от продажи, т.руб/т	План поставок, т
	1-я ст.	2-я ст.	3-я ст.	4-я ст.		
Желтый	1	3	1	2	3	10
Оранжевый	6	1	3	3	6	3
Красный	3	3	2	4	4	2
	Фонд раб. времени стадий, ч.					
	120	72	48	72		

Возможность хранения продукции: 25 т.

Вариант 17. Минимизировать затраты на транспортировку автомобилей, производимых тремя заводами, в четыре города при заданных объемах выпуска, обязательствах по поставкам, стоимости перевозки одного автомобиля:

Город	Стоимость перевозок 1 шт., $			Объем поставок
	Завод I	Завод II	Завод III	
$Г_1$	100	900	600	1500
$Г_2$	400	200	100	2500
$Г_3$	100	200	700	2700
$Г_4$	900	800	300	3300
	Объем производства, шт.			
	6000	3000	3000	

Вариант 18. Максимизировать прибыль пекарни, выпекающей три вида хлеба из четырех видов сырья. Доля сухого сырья в хлебе не превышает 80%:

Вид хлеба	Ограничения по содержанию сырья в хлебе				Цена 1 кг, руб.	Max. объем продажи, кг/месяц
	Тмин	Ржаная мука	Пшеничная мука	Ячменная мука		
Бородинский	4-5%	≥70%	0%	0%	10	3000
Орловский	1-2%	≤40%	≥30%	0%	8	4000
Дарницкий	0%	≤30%	≥30%	≤15%	6	7000
	Цена 1 кг сырья, руб.					
	120	10*	15*	8*		

* с государственными дотациями

Вариант 19. Составить план производства трех видов карамели (A, B, C), при котором прибыль будет максимальной. Затраты сырья, запасы сырья в цеху и прибыль от реализации каждого вида карамели:

Вид сырья	Затраты сырья для видов карамели, т/т			Запасы сырья, т
	A	B	C	
Сахарный песок	0.8	0.5	0.6	800
Патока	0.4	0.4	0.9	600
Фруктовый сироп	–	0.1	0.1	120
Прибыль, руб./т	108	112	126	

Вариант 20. Составить дневной рацион откорма животных, обеспечивающий получение питательных веществ А, Б и С в необходимых объемах при минимальных затратах. Содержание питательных веществ в кормах и их цены:

Питательные вещества	Содержание в кормах, кг/кг			Норма потребления, кг
	I	II	III	
A	0.1	0.3	0.4	≥ 60
Б	0.2	0.4	0.2	≥ 50
C	0.1	0.4	0.3	≥ 12
Цена руб./кг	9	12	10	

Порядок выполнения работы

1. Определить число независимых параметров задачи и присвоить им начальные неотрицательные значения.

2. Записать целевую функцию задачи и ограничения на изменения независимых параметров.

3. Сформировать рабочий файл системы MathCAD и найти оптимальное решение задачи.

4. Проверить выполнение всех ограничений и найти значение целевой функции, соответствующее оптимальному решению.

Контрольные вопросы

1. Признаки задачи линейного программирования.

2. Почему число линейно-независимых ограничений задачи должно быть меньше числа независимых переменных?

3. Может ли целевая функция задачи линейного программирования иметь несколько экстремумов?

4. Что такое степень неопределенности задачи и при какой степени неопределенности возможно ее геометрическое решение?

5. Идея алгоритма симплекс-метода решения задач линейного программирования.

Лабораторная работа №3. *Решение вариационной задачи с закрепленными концами.*

Задание: Реализовать в среде MathCAD алгоритм решения задачи из табл. 6.3: найти функцию $x(t)$, доставляющую минимум функционалу $I(x,t)$, в классе кусочно-линейных функций, или в классе полиномиальных функций по указанию преподавателя.

Таблица 6.3 – Функционалы и граничные условия

№ вар-та	Функционал	Граничные условия
1	$I(x,t)=\int_{-1}^{1}\left(x'^2-4\cdot x^2+2\cdot x\cdot t-t^2\right)dt$	$x(-1)=2,\ x(1)=4$
2	$I(x,t)=\int_{-1}^{1}\left(x'^2+4\cdot x^2+4\cdot x\cdot t^2+t\cdot \mathrm{Cos}t\right)dt$	$x(-1)=2,\ x(1)=0.5$
3	$I(x,t)=\int_{0}^{2}\left(x'^2+9\cdot x^2+2\cdot x\cdot t-t\cdot \mathrm{Sin}t\right)dt$	$x(0)=1,\ x(2)=2$
4	$I(x,t)=\int_{-2}^{0}\left(x'^2-4\cdot x^2+2\cdot x+t\cdot \mathrm{e}^{2\cdot t}\right)dt$	$x(-2)=0,\ x(0)=1$
5	$I(x,t)=\int_{0}^{1}\left(x'^2-9\cdot x^2+2\cdot x\cdot \mathrm{Sin}t-t^2\cdot \mathrm{e}^{t}\right)dt$	$x(0)=1,\ x(1)=-1$
6	$I(x,t)=\int_{-1}^{1}\left(x'^2+4\cdot x^2+6\cdot x\cdot e^{t}+2\cdot t\cdot \mathrm{Cos}t\right)dt$	$x(-1)=1,\ x(1)=3$
7	$I(x,t)=\int_{-1}^{1}\left(x'^2+x^2+4\cdot x\cdot e^{t}-t\cdot \mathrm{Sin}t\right)dt$	$x(-1)=1,\ x(1)=3$
8	$I(x,t)=\int_{-1}^{1}\left(x'^2+4\cdot x^2+8\cdot x\cdot e^{2\cdot t}+3\cdot t^2\right)dt$	$x(-1)=1,\ x(1)=3$
9	$I(x,t)=\int_{0}^{2}\left(2\cdot x'^2+2\cdot x^2+x\cdot \mathrm{Cos}t-5\cdot t\right)dt$	$x(0)=2,\ x(2)=2$
10	$I(x,t)=\int_{-1}^{1}\left(x'^2+4\cdot x^2-8\cdot x\cdot t+2\cdot t^2\right)dt$	$x(-1)=3,\ x(1)=1$

Порядок выполнения работы

1. Записать выражения для искомой функции $x(t)$ (для кусочно-линейных функций вначале можно принять $x(t) = t$, для полиномиальных – $x(a_0,a_1,t) = a_0 + a_1 \cdot t$) и ее производной. Записать подынтегральную функцию $\varphi(x,t)$ и граничные условия.

2. *Для кусочно-линейных функций* выбрать число точек излома кривой $x(t)$ ($p = 4 \div 6$), определить их абсциссы t_i, $i = 0,...,p$, присвоить ординатам x_i, $i = 0,...,p$ начальные значения. Записать выражение для функции $F(x_1,...x_{p-1})$ как сумму значений $(t_i - t_{i-1}) \cdot \varphi(x_i,t_i)$, $i = 1,...,p$, используя для записи производной $x(t)$ конечную разность.

3. В блоке ***Given*** задать граничные условия (для кусочно-линейных функций x_0 и x_p, для полиномиальных – $x(a_0,a_1,t_0)$ и $x(a_0,a_1,t_p)$) и найти с помощью программы ***Minimize*** значения x_i, $i = 1,...,p - 1$ (для кусочно-линейных функций) или a_0,a_1 (для полиномиальных функций), при которых функция $F(x_1,...x_{p-1})$ или функционал $I(a_0,a_1,t)$ принимают минимальные значения. Запомнить эти значения (F_1 или I_1).

4. Реализовать п.п. 2,3 повторно, увеличив число p точек излома кривой $x(t)$ или степень полинома $x(a_0,...,a_m,t)$ на 1. Запомнить значения F_2 или I_2.

5. Вычислить относительную ошибку определения функции $x(t)$: $\Delta = |F_1 - F_2|/|F_2|$. Если $\Delta > 0.25$, повторить действия п.4, предварительно переприсвоив F_1 или I_1 значения F_2 или I_2.

Контрольные вопросы

1. Основной признак вариационной задачи?

2. В каком виде задаются граничные условия вариационной задачи с закрепленными концами? Со свободными концами?

3. Общая схема решения вариационной задачи численным методом.

4. Что является параметрами вариационной задачи, если искомая функция кусочно-линейная? А если полином?

5. Признак окончания решения вариационной задачи, если искомая функция является кусочно-линейной? А если полиномом?

Лабораторная работа №4. *Решение задачи многокритериального выбора.*

Задание: выбрать лучшую из альтернатив решения предложенной задачи из табл. 6.4 с точки зрения указанных в таблице критериев двумя методами по указанию преподавателя:

1) заменой критериев ограничениями;

2) формированием и сужением множества Парето;

3) методом взвешивания и объединения критериев;

4) методом анализа иерархий.

Таблица 6.4 Задачи многокритериального выбора

№ п/п	Задача, альтернативы	Критерии	Описание предпочтений
1	*2*	*3*	*4*
1	Покупка автомобиля: A. Suzuki; B. Mitsubishi; C. Honda; D. Toyota.	1. Стоимость; 2. Расходы на обслуживание; 3. Расход бензина; 4. Комфорт.	*Критерии*: стоимость, комфорт, расходы на бензин, расходы на обслуживание. *Стоимость*: Suzuki существенно дороже всех, Honda немного дороже Mitsubishi, Toyota существенно дешевле всех. *Расходы на обслуживание*: Mitsubishi дороже всех, Toyota и Suzuki примерно равны, Honda дешевле всех. *Расход бензина*: самый высокий у Suzuki, немного меньше у Honda, существенно меньше у Mitsubishi, самый низкий – у Toyota. *Комфорт*: самая комфортная – Toyota, чуть менее – Mitsubishi, существенно хуже – Honda, самая некомфортная – Suzuki.
2	Выбор университета для поступления: A. Oxford; B. Московский гос.ун-т; C. Томский гос. ун-т.; D. Тамб. ГТУ	1. Размер стипендии; 2. Квалификация преподавателей; 3. Стоимость жизни в городе; 4. Престижность диплома.	*Критерии*: стоимость жизни в городе, престижность диплома, квалификация преподавателей, размер стипендии. *Стипендия*: Oxford не платит стипендии студентам, в Тамб. ГТУ стипендия небольшая, в Томском гос. ун-те – немного больше, в Московском – существенно больше. *Преподаватели*: самые квалифицированные – в Oxford, чуть менее квалифицированные – в Московском гос. ун-те, существенно менее – в Томском гос. ун-те, самая низкая квалификация – в Тамб. ГТУ. *Стоимость жизни*: самая низкая – в Тамбове, существенно выше – в Томске, гораздо выше – в Москве, самая высокая – в Лондоне. *Диплом*: самый престижный – Oxford, немного менее – Московского гос. ун-та, существенно менее – Томского гос. ун-та, самый непрестижный – Тамб. ГТУ.
3	Выбор спутницы жизни: A. Татьяна; B. Лариса; C. Наталья; D. Ольга.	1. Внешность; 2. Финансовые запросы; 3. Домовитость; 4. Характер.	*Критерии*: внешность, характер, финансовые запросы, домовитость. *Внешность*: Лариса – красавица, Татьяна – довольно миловидна, Ольга – симпатична и стройна, Наталья – малопривлекательна. *Финансовые запросы*: самые большие – у Ольги, чуть менее – у Татьяны, выше среднего – у Натальи, ниже среднего – у Ларисы. *Домовитость*: самая хозяйственная – Наталья, чуть менее – Ольга, существенно менее – Татьяна, еще менее – Лариса. *Характер*: Лариса – мягкая и покладистая, Наталья – строгая, но справедливая, Татьяна – «душа компании», но «себе на уме», Ольга – с диктаторскими наклонностями.

1	*2*	*3*	*4*
4	Выбор дороги: A. Автострада; B. Шоссе; C. Грейдер; D. Проселок.	1. Расстояние; 2. Качество покрытия; 3. Контроль; 4. Инфраструктура.	*Критерии*: расстояние, инфраструктура, качество покрытия, контроль. *Расстояние*: самое большое – по автостраде, чуть меньше – по шоссе, существенно меньше – по грейдеру, самое короткое – по проселку. *Качество покрытия*: лучшее – на автостраде, существенно хуже – на шоссе, еще хуже – на грейдере, отсутствует – на проселке. *Контроль*: самый жесткий – на автостраде, на шоссе – почти такой же жесткий, много мягче – на грейдере, на проселке – практически отсутствует. *Инфраструктура*: самая развитая – на шоссе, чуть менее – на автостраде, существенно менее – на грейдере, на проселке – практически отсутствует.
5	Выбор породы дерева для строительства: A. Береза; B. Сосна; C. Дуб; D. Лиственница.	1. Цена за 1 м^3; 2. Легкость обработки; 3. Долговечность; 4. Водостойкость.	*Критерии*: долговечность, цена за 1 м^3, легкость обработки, водостойкость. *Цена*: самый дорогой – дуб, лиственница немного дешевле, сосна еще дешевле, береза – самая дешевая. *Обработка*: самая легкая в обработке – береза, сосна – существенно тяжелее, дуб – еще тяжелее, самая тяжелая в обработке – лиственница. *Долговечность*: самая долговечная – лиственница, чуть менее – дуб, существенно менее – сосна, самая недолговечная – береза. *Водостойкость*: самая водостойкая – лиственница, чуть менее – сосна, существенно менее – дуб, еще менее – береза.
6	Выбор устройства для работы в социальных сетях: A. Компьютер; B. Ноутбук; C. Планшет; D. Смартфон.	1. Начальная цена; 2. Стоимость обслуживания; 3. Емкость ЗУ 4. Размер экрана.	*Критерии*: начальная цена, размер экрана, емкость ЗУ, стоимость обслуживания. *Цена*: Компьютер и ноутбук сравнимы по стоимости, смартфон немного дешевле, планшет существенно дешевле. *Обслуживание*: самый дорогой – смартфон, планшет немного дешевле, ноутбук еще дешевле, самый дешевый – компьютер. *Емкость ЗУ*: Компьютер и ноутбук имеют и внешнюю и оперативную память сравнимой емкости, планшет и смартфон – только оперативную память меньшей емкости. *Экран*: самый большой – у компьютера, немного меньше – у ноутбука, существенно меньше – у планшета, самый маленький – у смартфона.

Продолжение таблицы 6.4

1	*2*	*3*	*4*
7	Выбор спутника жизни: A. Анатолий; B. Александр; C. Владимир; D. Сергей	1. Образование; 2. Физическая подготовка; 3. Внешность; 4. Характер.	*Критерии*: характер, образование, внешность, физическая подготовка. *Образование*: Сергей учится в аспирантуре, Александр закончил технический вуз, Владимир – военное училище, Анатолий – экономический колледж. *Физподготовка*: самый физически крепкий – Владимир, Александр и Сергей уступают немного, Анатолий – существенно. *Внешность*: Анатолий и Владимир – красавцы, Александр и Сергей – довольно симпатичны. *Характер*: Анатолий – повеса и сердцеед, Александр – оптимист и трудяга, Владимир – лидер и карьерист, Сергей – умница и самоед.
8	Выбор санатория: A. "Липецк", г. Липецк; B. "Сосновый бор", Тамбовский район; C. "Лесная жемчужина", г. Котовск; D. "Сосны", г. Пенза.	1. Качество лечения; 2. Уровень сервиса; 3. Качество питания; 4. Расстояние от Тамбова.	*Критерии*: качество лечения, расстояние от Тамбова, качество питания, уровень сервиса. *Лечение*: самое качественное – в "Липецке", чуть хуже – в "Соснах", еще хуже – в "Лесной жемчужине", самое некачественное – в "Сосновом бору". *Сервис*: лучший – в "Сосновом бору", немного хуже – в "Соснах", существенно хуже – в "Липецке" и "Лесной жемчужине". *Питание*: самое качественное – в "Соснах", немного хуже – в "Лесной жемчужине", существенно хуже – в "Липецке" и "Сосновом бору". *Расстояние*: дальше всего – до Пензы, до Липецка существенно ближе, "Сосновый бор" и "Лесная жемчужина" – рядом с Тамбовом.
9	Выбор Интернет-провайдера; A. "LanTa"; B. "Ростелеком"; C. "Зеленая точка"; D. "Комстар-Регионы".	1. Стоимость пакета "Эконом+ТВ"; 2. Скорость; 3. Служба поддержки; 4. Качество услуг.	*Критерии*: качество услуг, стоимость пакета "Эконом+ТВ", скорость, служба поддержки. *Стоимость*: самая большая – у "Зеленой точки", немного меньше – у "Комстар-Регионы", существенно меньше – у "Ростелекома", самая маленькая – у "LanTa". *Скорость*: самый скоростной – Комстар-Регионы", чуть менее – у "LanTa", еще меньше – у "Зеленой точки", самый медленный – "Ростелеком". *Служба поддержки*: самая оперативная – у "LanTa", немного хуже – у "Ростелеком", и "Зеленой точки", самая плохая – у "Комстар-Регионы". *Услуги*: лучшее качество – у "Зеленой точки", чуть хуже – у "Ростелекома", еще хуже – у "Комстар-Регионы", самые некачественные – у "LanTa".

Продолжение таблицы 6.4

1	*2*	*3*	*4*
10	Выбор материала водопроводных труб: A. Металлопласт; B. Армированный пластик; C. Нержавеющая сталь; D. Черная сталь.	1. Цена за 1 м; 2. Допустимое давление; 3. Долговечность; 4. Внешний вид.	*Критерии*: Долговечность, цена за 1 м, внешний вид, допустимое давление. *Цена*: Самая дорогая – нержавеющая сталь, металлопласт немного дешевле, армированный пластик – еще дешевле, черная сталь – самая дешевая. *Допустимое давление*: Самое большое – у нержавеющей и черной стали, у металлопласта – существенно ниже, у армированного пластика – еще ниже. *Долговечность*: самый долговечный – металлопласт, немного менее – нержавеющая сталь, еще менее – армированный пластик, самая недолговечная – черная сталь. *Внешний вид*: лучший – у армированного пластика, чуть хуже – у металлопласта, существенно хуже – у нержавеющей и черной стали.

Порядок выполнения.

1. Составить вектор весов критериев, используя шкалу 1÷10 и нормализовать его.

2. Замена критериев ограничениями:

2.1. Выбрать главный критерий и минимально допустимые уровни для остальных.

2.2. Выбрать все приемлемые альтернативы и лучшую из них по главному критерию.

3. Формирование и сужение множества Парето:

3.1. Выбрать два критерия и сформировать множество Парето графическим методом.

3.2. Выбрать оптимальную альтернативу из множества Парето, используя лексикографическую оптимизацию и метод ЭЛЕКТРА.

4. Взвешивание и объединение критериев:

4.1. Составить матрицу рейтингов альтернатив по критериям, используя шкалу 1÷10 и нормализовать ее.

4.2. Умножить нормализованную матрицу на нормализованный вектор весов критериев и получить значения объединенного критерия для всех альтернатив. Выбрать наиболее приемлемую альтернативу.

5. Метод анализа иерархий:

5.1. Для каждого из критериев: составить и нормализовать матрицу попарного сравнения альтернатив, вектор приоритетов альтернатив, меру согласованности оценок и коэффициент их согласованности. Если коэффициент согласованности превосходит 0.1, вернуться к составлению матрицы попарного сравнения альтернатив по соответствующему критерию.

5.2. Составить и нормализовать матрицу попарного сравнения критериев, вектор приоритетов критериев, меру согласованности оценок и коэффициент их согласованности. Если коэффициент согласованности превосходит 0.1, вернуться к составлению матрицы попарного сравнения критериев.

5.3. Определить средневзвешенные рейтинги альтернатив путем умножения компонент векторов приоритетов альтернатив по критериям на соответствующую компоненту вектора приоритетов критериев. Выбрать наиболее приемлемую альтернативу. Сравнить с результатом выбора в п. 4.

Контрольные вопросы.

1. Сущность, достоинства и недостатки метода перевода критериев в ограничения?

2. Порядок формирования объединенного критерия?

3. Как можно оценить корректность экспертного выбора весов критериев?

4. Основные этапы метода анализа иерархий?

5. В чем суть проверки согласованности оценок при анализе иерархий?

Лабораторная работа №5. *Принятие решений в условиях риска.*

Задание: выбрать лучшую из альтернатив решения предложенной задачи из табл. 6.5 с использованием информации о вероятностях выбора. Проанализировать чувствительность полученного решения.

Таблица 6.5 – Задачи принятия решений в условиях риска

№ вар-та	Задача, альтернативы	Вероятности	Описание условий выбора
1	*2*	*3*	*4*
1	Планирование посевной кампании: A. Пшеница; B. Подсолнечник; C. Сахарная свекла.	Цены: снизятся – 0,25; повысятся – 0,3; не изменятся – 0,45.	Если цены возрастут, урожай пшеницы даст 100 тыс. руб. чистого дохода, подсолнечника – 200 тыс. руб., сахарной свеклы – 300 тыс. руб. Если цены останутся неизменными, прибыли не будет совсем. Если цены понизятся, урожай пшеницы приведет к потерям 20 тыс. руб., подсолнечника – 35 тыс. руб., сахарной свеклы – 50 тыс. руб.
2	Выбор способа вложения денег: A. Банковский депозит; B. Золото; C. Акции.	Доходность: упадет – 0,1; не изменится – 0,5; вырастет – 0,4.	При снижении доходности прибыль от депозита увеличится на 5%, золото даст убыток в 10%, а акции – прибыль в 2%. При неизменной доходности прибыль от депозита увеличится на 7%, от золота – на 5%, от акций – на 7%. При росте доходности прибыль от депозита увеличится на 8%, от золота – на 30%, от акций – на 20%.
3	Планирование тиража книги на три года вперед: A. 2000 экз.; B. 3000 экз.; C. 4000 экз; D. 5000 экз.	Спрос на книгу в ближайшие три года: 2000 экз. – 0,1; 3000 экз. – 0,5; 4000 экз. – 0,2; 5000 экз. – 0,2.	Прибыль от продажи – 900 руб. за 1 экз. Убытки при непродаже – 400 руб. за 1 экз. Убытки от неудовлетворенного спроса – 100 руб. за 1 экз.

Продолжение таблицы 6.5

1	*2*	*3*	*4*
4	Выбор рекламной кампании: А. Не проводить; В. Скромная; С. Интенсивная.	Результаты кампании: провал – 0,3; скромный успех – 0,5; большой успех – 0,2.	Стоимость скромной рекламной кампании – 200 тыс. руб., интенсивной – 500 тыс. руб. Если рекламная кампания не проводится вовсе, ожидаемый годовой доход –2 млн. руб., в случае ее провала – 1 млн. руб., в случае скромного успеха – 2,5 млн. руб., большого успеха – 5 млн. руб.
5	Выбор потребителя продукции при доп. проценте брака: А. ≤ 0,8%; В. ≤ 1,2%; С. ≤ 1,4%.	Доля брака: ≤ 0,8% – 0,25; ≤ 1,2% – 0,4; ≤ 1,4% – 0,35.	Поставщик штрафуется на 10 тыс. руб. за каждую 0,1%, если процент брака выше допустимого. Если процент брака ниже допустимого, поставщик получает прибыль – 5 тыс. руб. за каждую 0,1%. Продукция перед отправкой потребителям не проверяется.
6	Планирование дневной закупки выпечки: А. 100 шт.; В. 150 шт.; С. 200 шт.; D. 250 шт.; Е. 300 шт.	Ежедневный спрос: 100 шт. – 0,2; 150 шт. – 0,25; 200 шт. – 0,3; 250 шт. – 0,15; 300 шт. – 0,1.	Магазин покупает выпечку по 25 руб. за 1 шт., а продает по 55 руб. Если продукция не продана, то к концу дня она может быть реализована по 15 руб. за 1 шт. Штраф за неудовлетворенный спрос – 10 руб. за 1 шт.
7	Выбор компании для покупки акций с прибылью: А. Высокая; В. Низкая; С. Средняя.	Котировки: возрастут – 0,45; не изменятся – 0,25; снизятся – 0,3.	Сумма вложений – 3 млн. руб. *Рост котировок*: А – прибыль 65%, В – прибыль 30%, С – прибыль 50%. *Постоянство котировок*: А – прибыль 20%, В – прибыль 20%, С – прибыль 20%. *Снижение котировок*: А – потери 50%, В – прибыль 5%, С – потери 30%.
8	Выбор мощности производства: А. Большая; В. Малая; С. Увеличение от малой до большой через 2 года (при высоком спросе).	Спрос на продукцию: высокий – 0,5; средний – 0,2; низкий – 0,3.	Период работы – 10 лет. Затраты: А – 500 млн. руб., В – 100 млн. руб., С – 420 млн. руб. Годовой доход: *высокий спрос*: А – 10 млн. руб., В – 2,5 млн. руб. С – 9 млн. руб.; *средний спрос*: А – 6 млн. руб., В – 2,5 млн. руб. С – 5 млн. руб.; *низкий спрос*: А – 3 млн. руб., В – 2 млн. руб. С – 2 млн. руб.
9	Выбор инвестиционного фонда: А. Простой; В. Специальный; С. Глобальный.	Цена акций: вырастет – 0,4; не изменится – 0,5; снизится – 0,1.	Прибыль: *рост*: А – 8%, В – 30%, С – 20%; *неизменность*: А – 7%, В – 5%, С – 7%; *падение*: А – 5%, В – -10%, С – 2%;

Продолжение таблицы 6.5

1	2	3	4
10	Выбор дневной производительности: A. 10 тыс. шт. B. 12 тыс. шт. C. 14 тыс. шт. D. 16 тыс. шт. E. 18 тыс. шт.	Ежедневный спрос: 10 т. шт. – 0,1; 12 т. шт. – 0,2; 14 т. шт. – 0,3; 16 т. шт. – 0,3; 18 т. шт. – 0,1.	Кондитерский цех печет торты себестоимостью 450 руб. за 1 шт. и реализует по 600 руб. за 1 шт. Если торт не продан, убытки составят 300 руб. за 1 шт. Штраф за неудовлетворенный спрос – 200 руб. за 1 шт.

Порядок выполнения работы.

1. Построение дерева принятия решений или таблицы возможных исходов (по указанию преподавателя).
2. Выбор критерия оценки качества решения (максимизация прибыли или минимизация затрат).
3. Оценка каждого из вариантов решения и выбор лучшего.
4. Анализ чувствительности полученного решения.

Контрольные вопросы.

1. Чем отличается «принятие решения в условиях риска» от «принятия решения в условиях неопределенности»?
2. Преимущества и недостатки дерева решений задачи по сравнению с таблицей возможных исходов?
3. Для чего осуществляется анализ чувствительности решения, принятого в условиях риска?
4. Какие выводы можно сделать из анализа функции «полезности» принятого решения?
5. На каком основании чаще всего строятся гипотезы относительно вероятностей условий, в которых осуществляется принятие решения?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предлагаемое пособие включает основные сведения о теории принятия решений, методах и алгоритмах решения задач принятия решений в условиях определенности, частичной и полной неопределенности.

В пособии рассмотрены:

- математическая формализация и основные подходы к решению задач принятия решений;
- методы оптимизации (принятия решений в условиях полной определенности при наличии единственного критерия), в том числе методы решения задач линейного программирования и вариационных задач;
- методы многокритериального выбора в условиях определенности;
- методы принятия решений в условиях риска и неопределенности;
- особенности принятия проектных решений.

Лабораторный практикум содержит формулировки заданий, исходные данные, рекомендации по выполнению и контрольные вопросы к пяти лабораторным работам:

- поиск безусловного и условного экстремума функции двух переменных;
- решение задачи линейного программирования;
- решение вариационной задачи с закрепленными концами;
- решение задачи многокритериального выбора;
- принятие решения в условиях риска.

В качестве основного инструмента выполнения лабораторных работ студентам предложено использовать систему инженерных расчетов MathCAD.

Автор надеется, что предлагаемое пособие будет полезно для студентов, обучающихся по специальности 15.05.01 "Проектирование технологических машин и комплексов" и направлению 15.03.01 "Машиностроение" дневной и заочной формы обучения, а также для аспирантов и работников проектно-конструкторских отделов промышленных предприятий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Таха, Х. Введение в исследование операций / Х. Таха. – М.: Вильямс, 2005. – 912 с.

2. Эддоус, М. Методы принятия решений / М. Эддоус, Р. Стэнсфилд. — М.: Юнити, 1997. – 587 с.

3. Федунец, Н.И. Теория принятия решений / Н.И. Федунец, В.В. Куприянов. – М.: Горная книга, 2005. – 218 с.

4. Демидова, Л.А. Принятие решений в условиях неопределенности / Л.А. Демидова, В.В. Кираковский, А.Н. Пылькин. – М.: Горячая линия-Телеком, 2012. – 288 с.

5. Козлов, В.Н. Системный анализ и принятие решений: учебное пособие / В.Н. Козлов. – СПб: Изд-во СПБГПУ, 2009. – 233 с.

6. Лисьев, Г.А. Технологии поддержки принятия решений / Г.А. Лисьев, И.В. Попова. – М.: Флинта, 2011. – 133 с.

7. Гуров, С.В. Теория системного анализа и принятия решений: учебное пособие / С.В. Гуров. – СПб: Изд-во СПбГЛТУ, 2008. – 144 с.

8. Солодовников, И.В. Теория принятия решений: учебное пособие / И.В. Солодовников, О.В. Рогозин, О.Б. Пащенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2008. – 54 с.

9. Горбунов, В.М. Теория принятия решений: учебное пособие / В.М. Горбунов. – Томск: Изд-во ТПУ, 2010. – 67 с.

10. Балыбин, В.М. Принятие проектных решений: учебное пособие / В.М. Балыбин, В.С. Лунев, Д.Ю. Муромцев, Л.П. Орлова. – Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2003. – 80 с.

11. Семериков, А.В. Теория принятия решений. Лабораторные работы: метод. указания / А.В. Семериков, Е.С. Буханец. – Ухта: Изд-во УГТУ, 2006. – 48 с.