Министерство образования и науки Российской Федерации
«ТАМБОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФГБОУ ВПО «ТГТУ»

ВАСИЛЬЕВ В.В.,
ЛАНОВАЯ А.В., ЩЕРБАКОВА А.В.

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА
ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

Утверждено Методическим советом ТГТУ
в качестве методических указаний для студентов,
обучающихся по инженерным и экономическим
направлениям подготовки

ЧАСТЬ I

Тамбов 2015

Рецензент

к.ф.-м.н., доцент А.Д. Нахман

Утверждено Методическим советом ТГТУ

(протокол № 1 от 20.01.2015 г.)

I. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

1. **Предел функции при $x \to \infty$.**

Пусть дана функция $y = 2 + \frac{1}{x}$. Рассмотрим поведение функции при неограниченном возрастании аргумента *x*, т.е. при $x \to +\infty$. Составим таблицу значений этой функции и построим фрагмент ее графика.

x	1	2	10	100	1000
y	2	2,5	2,1	2,01	2,001

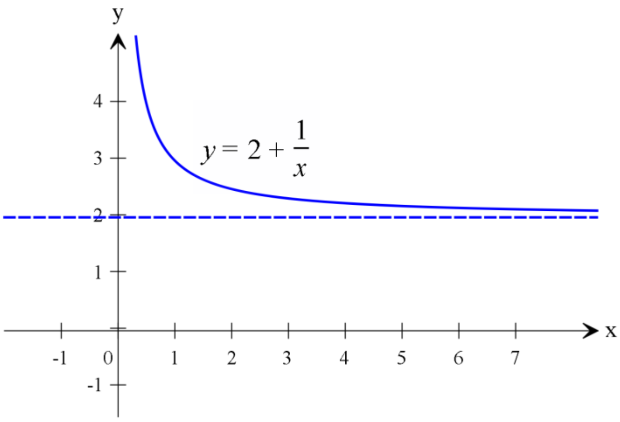


Рис. 1

Заметим, что чем больше задается значение аргумента *x*, тем меньше значение функции отличается от числа 2; или, можно сказать, что график функции неограниченно приближается к прямой $y = 2$. Можно найти и другие слова для описания поведения функции: при неограниченном возрастании аргумента *x*, например, функция при $x \to +\infty$ стремится к значению, как угодно мало отличающемуся от двух, или можно сказать, что имеет пределом число 2. Но, в математике не принято описывать одно и то же понятие множественными терминами, неоднозначная трактовка недопустима.

Найдем расстояние от произвольной точки *M(x,y)* графика функции $y = 2 + \frac{1}{x}$ до прямой $y = 2$: $\left|f(x) - 2\right| = \left|2 + \frac{1}{x} - 2\right| = \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$.

Тогда, тот факт, что функция $y = 2 + \frac{1}{x}$ при $x \to +\infty$ имеет пределом число 2, означает, что расстояние от произвольной точки *M(x,y)* графика функции $y = 2 + \frac{1}{x}$ до прямой $y = 2$, может быть сделано меньше любого наперед заданного числа для достаточно больших значений *x*.

Так, например, если $x > 10$, то $\left|f(x) - 2\right| = \frac{1}{|x|} < \frac{1}{10}$;

если $x > 100$, то $\left|f(x) - 2\right| = \frac{1}{|x|} < \frac{1}{100}$.

Т.е., можно выбрать сколь угодно малое число $\varepsilon > 0$, что $\left|f(x) - 2\right| = \frac{1}{|x|} < \frac{1}{\varepsilon}$, для всех $x > \frac{1}{\varepsilon}$.

Введем понятие предела функции при неограниченном возрастании аргумента x.

Определение. Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ существует положительное число N такое, что для всех значений аргумента x, удовлетворяющих условию $x > N$, выполняется неравенство $\left|f\left(x\right) - A\right| < \varepsilon$.

Для обозначения введенного понятия используется следующая символика: $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right) = A$.

Для функции $y = 2 + \dfrac{1}{x}$ имеем, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2 + \dfrac{1}{x}\right) = 2$.

Геометрический смысл предела функции при $x \to +\infty$.

Если функция $y = f(x)$ имеет пределом число A, то это значит, что если для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ найдется такое положительное число N, что для всех значений аргумента x, удовлетворяющих условию $x > N$, выполняется неравенство

$$\left|f\left(x\right) - A\right| < \varepsilon. \qquad (1)$$

Преобразуем неравенство (1), используя свойства абсолютных величин:

$$-\varepsilon < f\left(x\right) - A < \varepsilon,$$

или

$$A - \varepsilon < f\left(x\right) < A + \varepsilon. \qquad (2)$$

Неравенство (2) показывают, что график функции $y = f(x)$ для всех x, превосходящих число N, содержится в полосе, ограниченной прямыми $y = A - \varepsilon$ и $y = A + \varepsilon$.

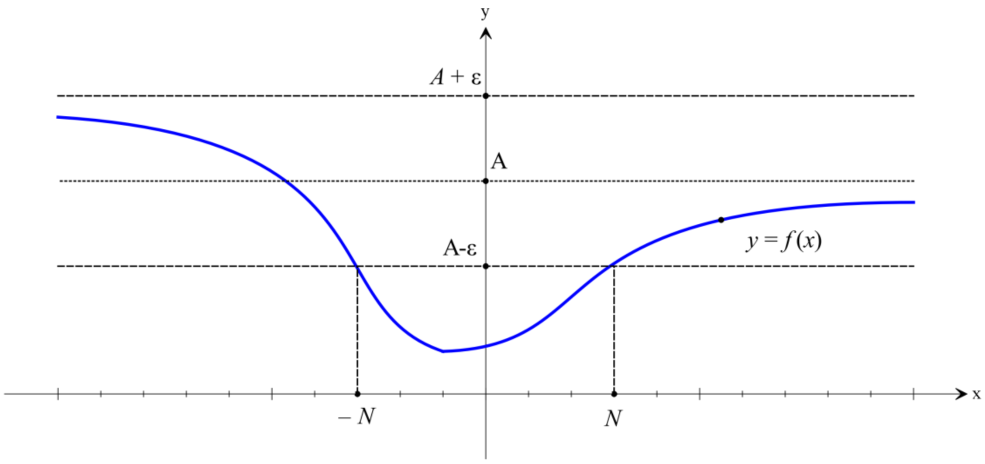


Рис. 2

Аналогично вводится определение, если $x \to -\infty$.

Определение. Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to -\infty$, если для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ существует положительное число N такое, что для всех значений аргумента x, удовлетворяющих условию $x < -N$, выполняется неравенство $\left|f(x) - A\right| < \varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.

Геометрический смысл предела функции при $x \to -\infty$ аналогичен геометрическому смыслу предела при $x \to +\infty$. Если $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$, то каково бы ни было положительное число $\varepsilon > 0$ существует положительное число N такое, что для всех значений аргумента x, удовлетворяющих условию $x < -N$, график функции находится в полосе, ограниченной прямыми $y = A - \varepsilon$ и $y = A + \varepsilon$.

Для функции $y = 2 + \dfrac{1}{x}$ при неограниченном убывании аргумента x, получим $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(2 + \dfrac{1}{x}\right) = 2$.

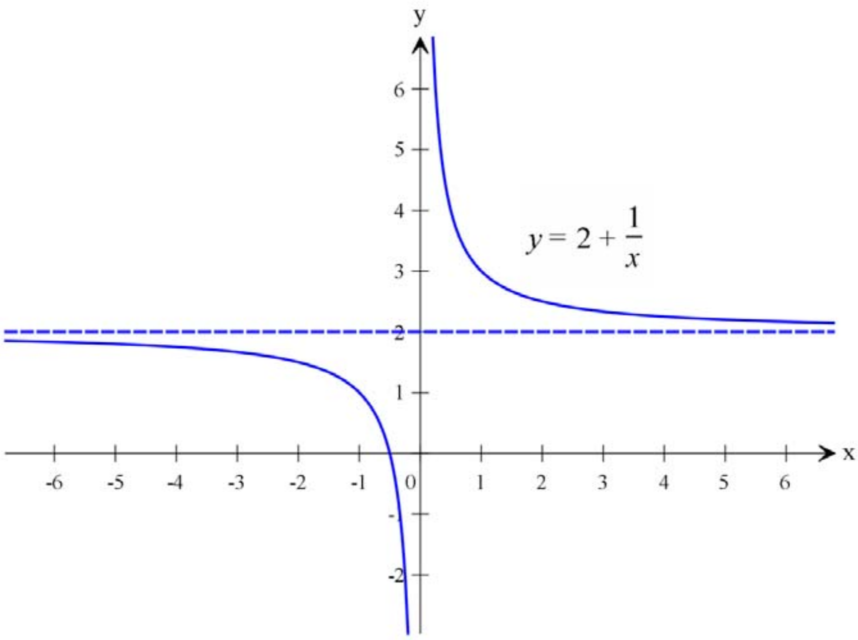


Рисунок 3

Пример. Доказать, что $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\dfrac{3x - 1}{x}\right) = 3$.

Решение. Выберем произвольное число $\varepsilon > 0$ и рассмотрим $\left|f(x) - A\right|$.

В данном случае $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x}$, $A = 3$: $\left|f(x) - A\right| = \left|\dfrac{3x - 1}{x} - 3\right| = \left|\dfrac{-1}{x}\right| = \dfrac{1}{|x|}$.

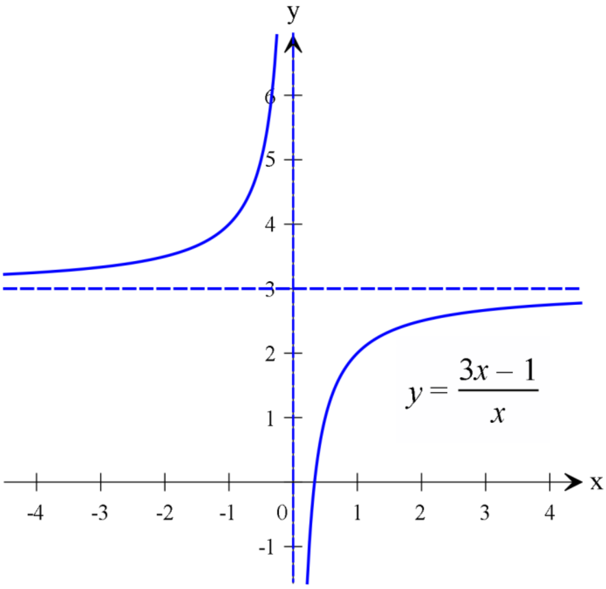


Рис. 4

Для того, чтобы выполнялось неравенство

$$\left|f\left(x\right)-A\right|=\left|\frac{3x-1}{x}-3\right|=\frac{1}{|x|}<\varepsilon,$$

достаточно, чтобы $x>\dfrac{1}{\varepsilon}$. Т.к. рассматривается предел при $x\to+\infty$, то x является положительным и в качестве N можно выбрать $\dfrac{1}{\varepsilon}$. Таким образом, получаем: для любого $\varepsilon>0$ существует положительное число $N=\dfrac{1}{\varepsilon}$ такое, что для всех значений аргумента x, удовлетворяющих условию $x>N=\dfrac{1}{\varepsilon}$, выполняется неравенство $\left|\dfrac{3x-1}{x}-3\right|<\varepsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x-1}{x}\right)=3$. График функции изображен на рис. 4.

2. Предел функции при $x\to a$.

Введем понятие предела функции в точке. Рассмотрим функцию $y=f(x)$, определенную в некотором интервале, содержащем точку $x=a$.

Определение. Число A называется пределом функции $y=f(x)$ при $x\to a$ (или в точке a), если для любого числа $\varepsilon>0$ существует число $\delta>0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию

$$0<\left|x-a\right|<\delta, \quad (3)$$

выполняется неравенство

$$\left|f\left(x\right)-A\right|<\varepsilon. \quad (4)$$

Обозначение предела функции $y=f(x)$ при x стремящимся к a:

$$\lim_{x\to a}f\left(x\right)=A.$$

Выясним геометрический смысл этого определения. Неравенства (3) означают, что точка x отстоит от точки a не далее, чем на δ, т.е. принадлежит интервалу $(a-\delta;a+\delta)$. Неравенство (4) означает, что значения функции $y=f(x)$ не выходят из интервала $(A-\varepsilon;A+\varepsilon)$. Т.е., точки графика $y=f(x)$ должны находиться в полосе, ограниченной прямыми $y=A-\varepsilon$ и $y=A+\varepsilon$. Рис.5.

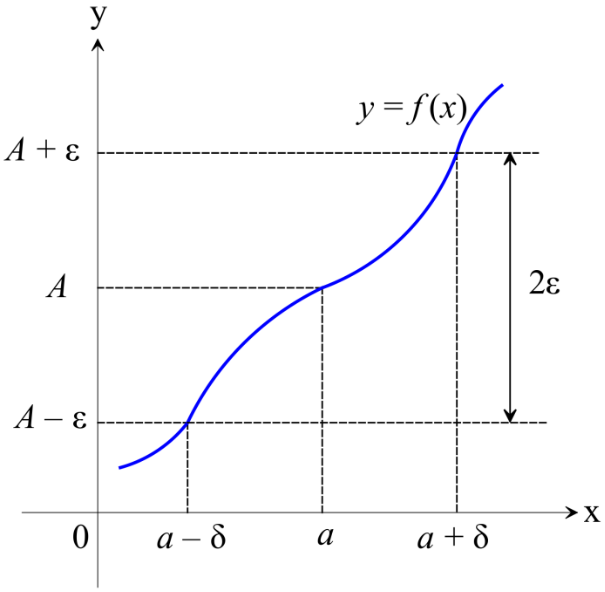


Рис. 5

Пример. Найти предел функции $y=3x–1$ при $x\to$

Используя график функции (рис.6), можно увидеть, что если $x \to 1$ с любой стороны, то соответствующие точки $M(x, y)$ графика стремятся к точке $M(1, 2)$, т.е. можно предположить, что $\lim\limits_{x\to 1}(3x-1)=2$. Докажем это. Зададим произвольное число $\varepsilon > 0$. Рассмотрим, при каких условиях выполняется неравенство $|(3x–1) – 2|<\varepsilon$ или $|3x–3| < \varepsilon$, откуда $3|x– 1| < \varepsilon$.

Таким образом, если положить $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$, то при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x– 1|<\delta$, будет выполняться неравенство $|(3x-–1) –2| < \varepsilon$. По определению предела это и означает, что число 2 есть предел функции $y=3x –1$ при $x\to 1$.

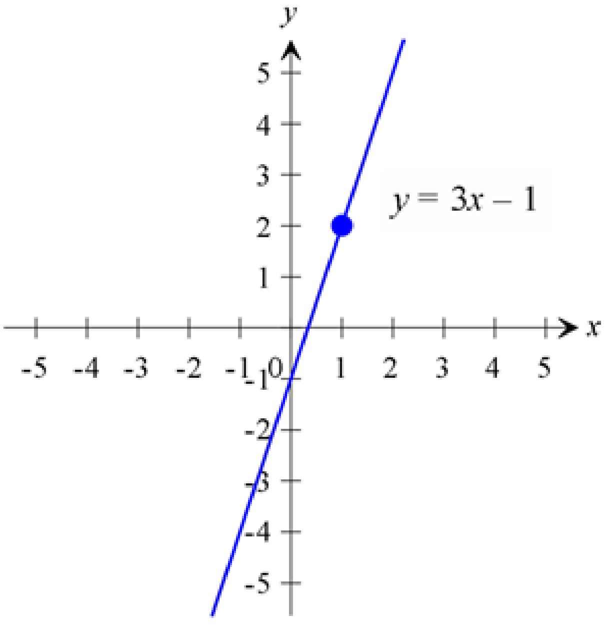


Рис. 6

В рассмотренном примере предел функции при $x \to 1$совпадает со значением функции в точке при x=1. Это справедливо не для всех функций, а для тех, графиком которых является плавная, нигде не прерывающаяся линия (что соответствует школьным представлениям о непрерывности функции). При рассмотрении графика такой функции $y = f(x)$ мы видим, что если независимая переменная x приближается к точке a, то значение функции $y = f(x)$ неограниченно приближается к значению функции в точке a, т.е. к $f(a)$.

Дадим строгое определение непрерывности функции. Пусть дана функция $y = f(x)$.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если она определена в этой точке и в некоторой окрестности содержащей точку x_0 и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Замечание. При вычислении предела функции непрерывной в точке x_0, непосредственно подставляем значение x_0 в функцию и получим значение предела в заданной точке.

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x \to -2} x^3$.

Функция $y = x^3$ является непрерывной при $x = -2$. Поэтому $\lim\limits_{x \to -2} x^3 = \lim\limits_{x \to -2} (-2)^3 = \lim\limits_{x \to -2} (-8) = -8$.

3. **Односторонние пределы.**

Пусть дана функция $y = \dfrac{1}{x}$. Рассмотрим поведение этой функции вблизи точки $x = 0$, рис. 7.

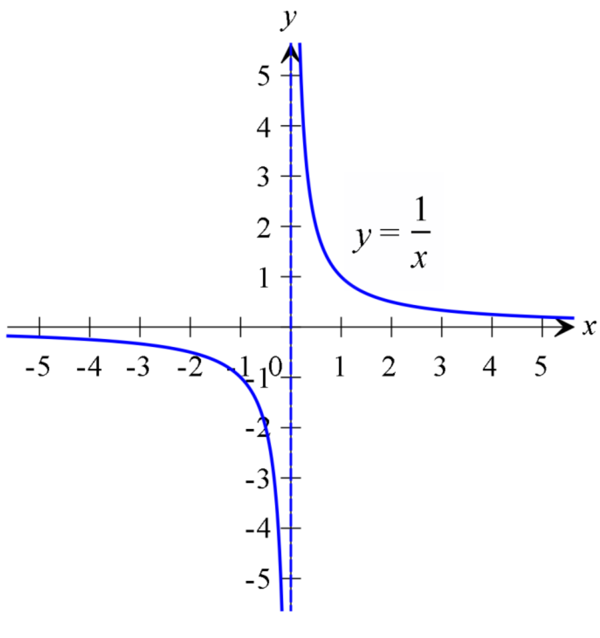


Рис. 7

При стремлении аргумента x к нулю справа значения функции неограниченно возрастают, т.е. $y \to +\infty$, а при стремлении аргумента x к нулю слева значения функции неограниченно убывают, т.е. $y \to -\infty$. В данном случае имеем, что способ приближения аргумента x к точке влияет на значение предела функции.

Поэтому вводят понятия односторонних пределов.

Определение. Число A_1 называется пределом функции $y = f(x)$ слева в точке a, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что при $x \in (a - \delta; a)$ выполняется неравенство $\left| f(x) - A_1 \right| < \varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A_1$.

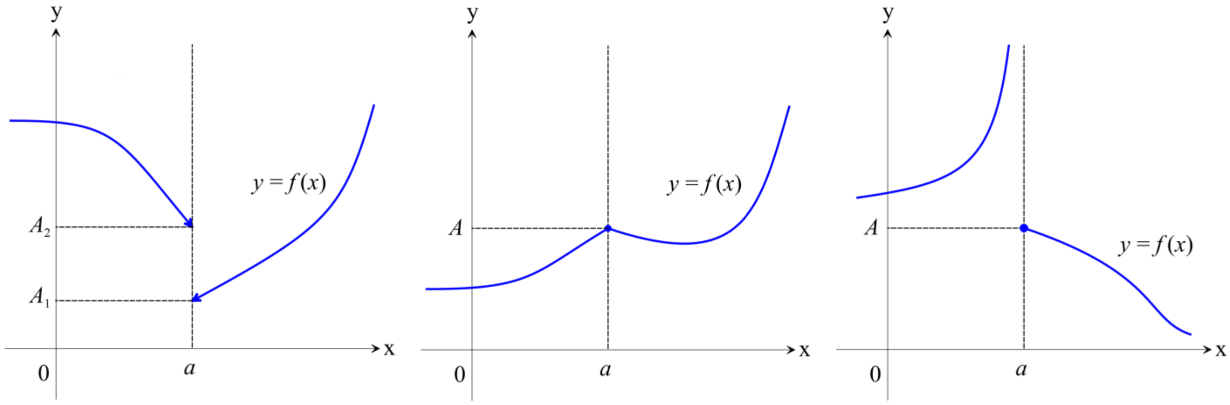
Определение. Число A_2 называется пределом функции $y = f(x)$ справа в точке a, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что при $x \in (a; a + \delta)$ выполняется неравенство $\left| f(x) - A_2 \right| < \varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A_2$.

Пределы функции слева и справа называются односторонними пределами.

Можно доказать, что если односторонние пределы равны, т.е. $A_1 = A_2 = A$ (рис.8, б)) то предел функции в точке a существует и равен односторонним пределам: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Если односторонние пределы различны, т.е. $A_1 \neq A_2$, или хотя бы один из них не существует, то не существует и предел функции в точке $x = a$ (рис.8, а), в)).

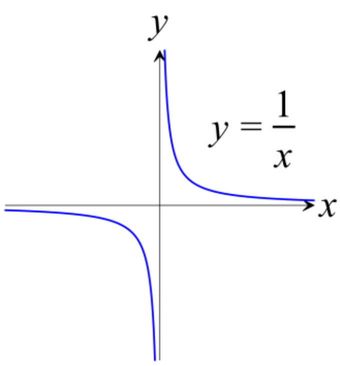


а) б) в)

Рис. 8

Из определения предела функции следует, что предел постоянной функции равен этой постоянной: $\lim\limits_{x\to a} c = c$, где c-const.

Рассмотрим графики некоторых элементарных функций, и отметим факты, которые будут полезны в дальнейшем при исследовании функций.

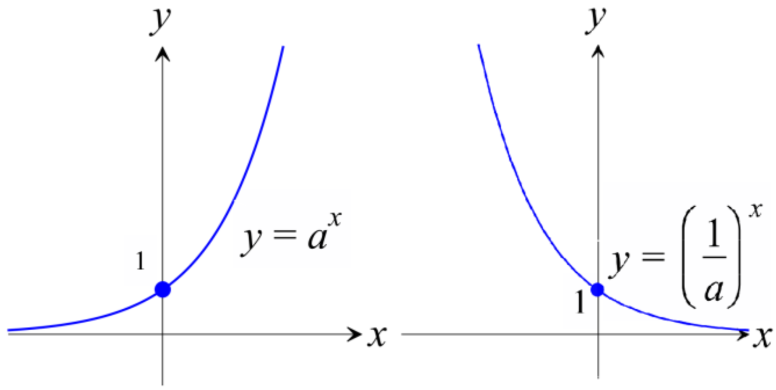


Гипербола

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty ,$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0 .$$

Показательная функция $y = a^x$



$a > 1$:

$\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$,

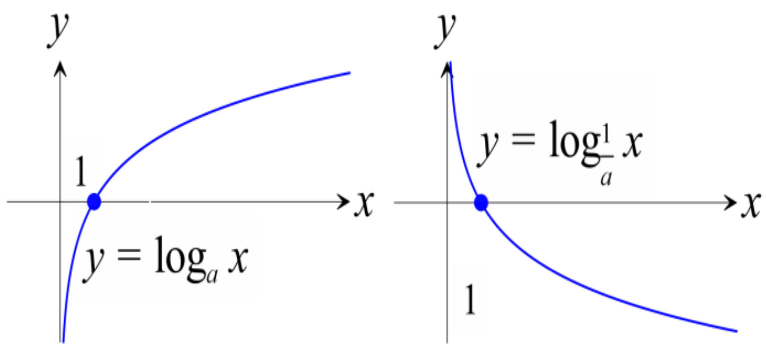
$\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$;

$0 < a < 1$:

$\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$,

$\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$.

Логарифмическая функция $y = \log_a x$



$a > 1$:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$,

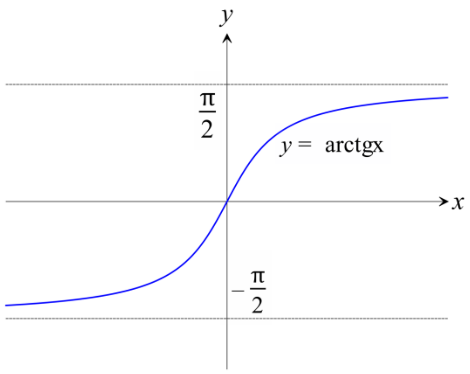
$\lim\limits_{x \to 0+0} \log_a x = -\infty$;

$0 < a < 1$:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$,

$\lim\limits_{x \to 0+0} \log_a x = +\infty$.

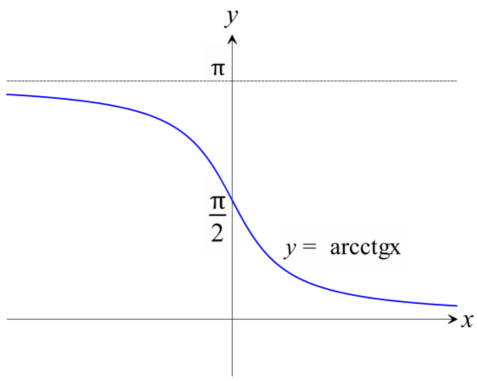
Обратные тригонометрические функции:



$y = arctgx$:

$\lim\limits_{x \to +\infty} arctgx = \frac{\pi}{2}$,

$\lim\limits_{x \to -\infty} arctgx = -\frac{\pi}{2}$;



$y = arcctgx$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} arcctgx = 0$,

$\lim\limits_{x\to-\infty} arcctgx = \pi$.

4. Бесконечно малые функции и их свойства.

Определение. Функция $\alpha = \alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a$ (или $x \to \infty$), если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = 0$ (или $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x) = 0$).

Функция $\alpha(x) = (x+1)^2$ есть бесконечно малая при $x \to -1$, т.к. $\lim\limits_{x\to-1}\alpha(x) = \lim\limits_{x\to-1}(x+1)^2 = 0$. Функция $\alpha(x) = \dfrac{1}{x}$ также является бесконечно малой, при $x \to \infty$, т.к. $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} = 0$.

Свойства бесконечно малых функций.

1. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций есть величина бесконечно малая.
2. Произведение бесконечно малой на ограниченную функцию есть бесконечно малая функция.

Следствие 1. Произведение двух бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

Следствие 2. Произведение бесконечно малой функции на постоянную есть бесконечно малая функция.

3. Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, имеющую отличный от нуля предел, есть функция бесконечно малая.

Сравнение бесконечно малых функций.

Частное двух бесконечно малых функций не определяется однозначно, могут быть самые разнообразные варианты.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ бесконечно малые функции при $x \to a$. Тогда, если:

1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с $\beta(x)$: $\alpha(x) = o(\beta(x))$;

2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A\neq 0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются бесконечно малыми одного порядка малости; при $A=1$ они называются эквивалентными: $\alpha(x)\sim\beta(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$, то $\beta(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с $\alpha(x)$: $\beta(x)=o(\alpha(x))$.

Таким образом, отношение двух бесконечно малых функций есть величина неопределенная, обозначается неопределенность $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Для раскрытия неопределенностей $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ часто бывает полезным применение принципа замены бесконечно малых функций эквивалентными: если $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$, $\beta(x)\sim\beta_1(x)$ при $x\to a$ и существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$, то существует и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, причем

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Ниже приведены некоторые важнейшие эквивалентности, которые используются при вычислении пределов. Например, при $x\to 0$:

$\sin x\sim x$;	$e^x-1\sim x$;
$tgx\sim x$;	$a^x-1\sim x\cdot\ln a$;
$\arcsin x\sim x$;	$\ln(1+x)\sim x$;
$arctgx\sim x$;	$\log_a(1+x)\sim x\cdot\log_a e$;
$1-cosx\sim\dfrac{x^2}{2}$;	$(1+x)^k-1\sim k\cdot x, k>0$,
	$\sqrt{1+x}-1\sim\dfrac{x}{2}$.

Как использовать эти соотношения для раскрытия неопределенностей рассмотрим в следующем разделе.

5. **Бесконечно большие функции и их свойства.**

Определение. Функция $y=f(x)$ называется бесконечно большой при $x\to a$, если для любого положительного числа N, найдется такое число $\delta>0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0<|x-a|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)|>N$.

Примером бесконечно большой функции является функция $y=\frac{1}{x}$ при $x\to 0$ (рис.7).

Бесконечно большая функция не имеет предела при $x\to a$, но условно говорят, ее предел равен бесконечности. Если функция принимает только положительные значения, то пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$, если только отрицательные значения, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$.

Свойства бесконечно больших функций.

1. Сумма бесконечно большой функции и ограниченной функции есть бесконечно большая функция.

Замечание. Сумма бесконечно больших функций есть бесконечно большая функция: $[\infty+\infty]\to+\infty$; разность бесконечно больших функций – величина неопределенная: $[\infty-\infty]\to ?$ (раскрытие таких неопределенностей будет рассмотрено ниже).

2. Произведение бесконечно большой функции и функции, предел которой отличен от нуля, есть бесконечно большая функция.

3. Частное от деления бесконечно большой функции на функцию, имеющую предел в точке, есть бесконечно большая функция.

Замечание. Частное от деления бесконечно большой функции на бесконечно большую функцию есть величина неопределенная; обозначается $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ и способ раскрытия таких неопределенностей будет рассмотрен ниже.

Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими функциями.

Если функция $\alpha=\alpha(x)$ стремится к нулю при $x\to a$ (или $x\to\infty$) и не обращается в нуль, то функция $f(x)=\frac{1}{\alpha(x)}$ стремится к бесконечности. Т.е., если при вычислении предела функции возникла неопределенность $\left[\frac{1}{0}\right]$, полезно запомнить, что $\left[\frac{1}{0}\right]\to\infty$, или $\left[\frac{c}{0}\right]\to\infty$, где c – *const*.

6. Основные теоремы о пределах функций.

1) Функция $y=f(x)$ не может иметь более одного предела при $x\to a$.
2) Если каждая из функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеет предел при $x\to a$, то сумма, разность и произведение этих функций также имеют пределы, причем

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\pm\varphi(x)\right]=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}\varphi(x);$$

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot\varphi(x)\right]=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}\varphi(x).$$

Если, кроме того, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\neq 0$, то и частное $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ имеет предел, причем

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)}.$$

Следствие 1. Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x\to a}\left[cf(x)\right]=c\cdot\lim_{x\to a}f(x).$$

Следствие 2. Если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ и n – натуральное число, то

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^n=\left[\lim_{x\to a}f(x)\right]^n,$$

в частности

$$\lim_{x\to a}(x^n)=(\lim_{x\to a}x)^n=a^n.$$

3) Если $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$, а $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$, то $\lim\limits_{x\to x_0}f(\varphi(x))=A$.

7. Замечательные пределы.

Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$, данная функция неопределенна при $x=0$. Существует теорема, доказывающая, что предел этой функции существует, а именно:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \qquad (*)$$

Этот предел получил собственное название: *первый замечательный предел*.

Из формулы (*) следует, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}=1$.

Эти формулы используются для раскрытия неопределенности $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ в случае, если функция, стоящая под знаком предела, содержит тригонометрические функции.

Второй замечательный предел используется для раскрытия неопределенности $\left[1^\infty\right]$.

Рассмотрим функцию $f(x)=(1+\dfrac{1}{x})^x$. При $x\to\infty$ основание степени стремится к 1, а показатель – бесконечно большая величина, т.е. имеем неопределенность $\left[1^\infty\right]$.

Справедлива теорема, утверждающая, что предел функции $f(x)=(1+\frac{1}{x})^x$ при $x\to\infty$ существует и равен e:

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e.$$

Второй замечательный предел имеет еще одну форму:

$$\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e.$$

Примеры приведены в следующем разделе.

II. Решение типовых задач.

1. Рассмотрим примеры вида $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ с неопределенностью вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, где $f(x)$ и $\varphi(x)$ в общем случае – сложные степенные или показательные функции.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+1}{7-4x^2}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Найдем наибольшую степень x в числителе и в знаменателе. Это x^2. Разделим числитель и знаменатель почленно на x^2, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{4x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{7}{x^2}-\frac{4x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}{\frac{7}{x^2}-4}=-\frac{3}{4}.$$

б) $$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^5+4x^3}{3x^2-2x+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7x^5}{x^5}+\frac{4x^3}{x^5}}{\frac{3x^2}{x^5}-\frac{2x}{x^5}+\frac{1}{x^5}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{7+\frac{4}{x^2}}{\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^4}+\frac{1}{x^5}}=\frac{7}{0}=\infty.$$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x-2}{x^4+x^3-2x+1}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{4x}{x^4}-\dfrac{2}{x^4}}{\dfrac{x^4}{x^4}+\dfrac{x^3}{x^4}-\dfrac{2x}{x^4}+\dfrac{1}{x^4}}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{4}{x^3}-\dfrac{2}{x^4}}{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}}=\frac{0}{1}=0.$$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{27x^3+4x^2-2x+1}+5x-3}{2-7x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right].$

Найдем наибольшую степень x в числителе и знаменателе. Это x^1.

Рассмотрим $\sqrt[3]{27x^3+4x^2-2x+1}$ (внесем под корнем x^3) $\sqrt[3]{x^3\left(27+\dfrac{4}{x}-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)}=x\sqrt[3]{27+\dfrac{4}{x}-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}$.

Подставим полученное выражение в заданный предел и разделим числитель и знаменатель на x^1 почленно:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x\sqrt[3]{27+\dfrac{4}{x}-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}}{x}+\dfrac{5x}{x}-\dfrac{3}{x}}{\dfrac{2}{x}-\dfrac{7x}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{27+\dfrac{4}{x}-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}+5-\dfrac{3}{x}}{\dfrac{2}{x}-7}=-\frac{8}{7}=-1\frac{1}{7}.$$

2. Рассмотрим примеры вида $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ с неопределенностью вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. В этом случае необходимо разложить на множители и числитель и знаменатель дроби или домножить и числитель и знаменатель дроби на одно и то же выражение, приводящее к формулам сокращенного умножения.

а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x^2+7x+12}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x-3)(x+3)}{(x+3)(x-4)}=\dfrac{-3-3}{-3+4}=-6$.

[Раскладываем числитель как разность квадратов по формулам $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$].

[Знаменатель дроби разложим по формулам на множители $x^2+7x+12=(x+3)(x+4)$

$Д=49-48=1$].

$x_1=\dfrac{-7+1}{2}=-3;\ x_2=\dfrac{-7-1}{2}=-4$

б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{25-x^2}-3}{x-4}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\left(\sqrt{25-x^2}-3\right)\left(\sqrt{25-x^2}+3\right)}{\left(\sqrt{25-x^2}+3\right)(x-4)}=$

(Умножим числитель и знаменатель на число сопряженное числителю: $\sqrt{25-x^2}+3$. Получим в числителе разность квадратов: $\left(\sqrt{25-x^2}-3\right)\left(\sqrt{25-x^2}+3\right)$).

$=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{25-x^2-9}{\left(\sqrt{25-x^2}+3\right)(x-4)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{16-x^2}{\left(\sqrt{25-x^2}+3\right)(x-4)}=$

$=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(4-x)(4+x)}{\left(\sqrt{25-x^2}+3\right)(x-4)}=-\dfrac{8}{9}$.

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(\sqrt{3x-2}-2\right)\left(\sqrt{3x-2}+2\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3x-2}+2\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}=$

Числитель и знаменатель необходимо домножить на сопряженное выражение: $\left(\sqrt{3x-2}+2\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(3x-2-4)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}{(x-2)\left(\sqrt{3x-2}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3(x-2)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}{(x-2)\left(\sqrt{3x-2}+2\right)}=\dfrac{3\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)}{4}=$

$=\dfrac{6\sqrt{2}}{4}=\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$.

3. Рассмотрим неопределенность вида $[\infty-\infty]$.

а) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{2x+8}{x^3-8}\right)=[\infty-\infty]$.

Имеем неопределенность вида $[\infty-\infty]$.

Приведем дроби к общему знаменателю:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4-2x-8}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(x-2)(x^2+2x+4)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}.$$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-5}-x\right)=[\infty-\infty].$

Имеем неопределенность вида $[\infty-\infty]$.

Умножим и разделим данную функцию на выражение, сопряженное ей то есть

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-2x-5}-x\right)\left(\sqrt{x^2-2x-5}+x\right)}{\sqrt{x^2-2x-5}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x-5-x^2}{\sqrt{x^2-2x-5}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x-5}{\sqrt{x^2-2x-5}+x}.$$

Найдем наибольшую степень дроби. Это x^1, следовательно:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-2-\frac{5}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}+1}=-1.$$

Так как при $x\to\infty$ $\frac{5}{x};\frac{1}{x};\frac{5}{x^2}$ – бесконечно малые величины.

Замечательные пределы $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

4. Рассмотрим примеры, содержащие неопределенность вида $\left[1^\infty\right]$.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-3}{2x^2+1}\right)^{-3x^2}$.

Имеем неопределенность вида $\left[1^\infty\right]$, так как

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3}{2x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}}=\frac{2}{2}=1.$$

Выделим целую часть дроби:

$$\frac{2x^2-3}{2x^2+1}=\frac{\left(2x^2+1\right)-1-3}{2x^2+1}=\frac{\left(2x^2+1\right)-4}{2x^2+1}=1-\frac{4}{2x^2+1}=1+\left(\frac{-4}{2x^2+1}\right)$$

$\dfrac{-4}{2x^2+1}=\alpha(x)$ – является бесконечно малой величиной при $x\to\infty$.

Домножим показатель степени $\left(\alpha(x)\dfrac{1}{\alpha(x)}\right)$, это действие не нарушает знака равенства:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\left(\frac{-4}{2x^2+1}\right)^{\frac{2x^2+1}{-4}\cdot\left(\frac{-4}{2x^2+1}\right)}\right)^{-3x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\left(\frac{-4}{2x^2+1}\right)^{\frac{2x^2+1}{-4}}\right)^{\frac{12x^2}{2x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{12x^2}{2x^2+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x^2}{2x^2+1}}=e^6.$$

$$\left[\lim_{x\to\infty}\frac{12x^2}{2x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{12}{2+\frac{1}{x^2}}=6\right].$$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x-1}{2x-1}\right)^{\frac{3}{x}}$.

Имеем неопределенность вида $\left[1^\infty\right]$, так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-1}{2x-1}=1$.

Выделим целую часть: $\dfrac{x-1}{2x-1}=\dfrac{(2x-1)-2x+1+x-1}{2x-1}=\dfrac{(2x-1)-x}{2x-1}=$

$=1+\left(\dfrac{-x}{2x-1}\right)$.

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\left(\frac{-x}{2x-1}\right)\right)^{\frac{2x-1}{-x}\cdot\left(\frac{-x}{2x-1}\right)\cdot\frac{3}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(\left(1+\left(\frac{-x}{2x-1}\right)\right)^{\frac{2x-1}{-x}}\right)^{\frac{-3}{2x-1}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-3}{2x-1}}=e^3.$$ (Так как $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\left(\dfrac{-x}{2x-1}\right)\right)^{\frac{2x-1}{-x}}=e$).

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+3)-\ln 3}{5x}$.

Имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Используем свойства логарифмов ($\log_a b-\log_a c=\log_a\dfrac{b}{c}$;

$n\log_a x=\log_a x^n$).

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{x+3}{3}}{5x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{5x}\cdot\ln\frac{x+3}{3}\right)=\lim_{x\to 0}\ln\left(\frac{x+3}{3}\right)^{\frac{1}{5x}}=\lim_{x\to 0}\ln\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{5x}}.$$

Учитывая непрерывность логарифмической функции, символы lim и ln можно переставить, получим:

$$\ln\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{5x}}=\ln\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{3}{x}\cdot\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{5x}}=\ln e^1 15=\frac{1}{15}.$$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

а) Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x}{x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1.$$

Так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos 0}=1$.

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

Имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Сделаем замену $\arcsin x = y \Rightarrow x = \sin y$ при $x \to 0$; $y \to 0$, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y} = 1.$$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x + \sin 8x}{4x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 5x\cdot\cos 3x}{4x} =$

(Для числителя применили формулу:

$\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$).

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\dfrac{\sin 5x}{5x}\cdot 5x\cdot\cos 3x}{4x} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}.$$

(так как cos (3·0) = cos 0 = 1).

Примеры для самостоятельного решения:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3 - 8x^5}{4x^7 + 2}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^8 - 2x + 1}{3 - 2x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{9x^3 + 2x} - 6x + 2}{3 - x}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{64x^3 - 27x^2 + 1} - x + 1}{2x + 4}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2 - 5x + 1} - \sqrt{2x^2 + 4x}\right)$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3 + 2x - 3}{4 - 7x^3}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2 - 2} - \sqrt{4x^2 + 5x - 6}\right)$.

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$; $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3 - 27}{x^2 - 9}$; $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2 + 7x + 12}{x^2 + 6x + 9}$;

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2 + x - 6}{2x^2 - x - 6}$; $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2 - 5x + 6}{(x-3)^2}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 2}$; $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 16}$.

3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-1} - 1}{x - 2}$; $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{3x^2 - 11} - 8}{x - 5}$; $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2 - 49}{\sqrt{x} - \sqrt{7}}$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}$; $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1} - 2}{5 - \sqrt{22 + x}}$; $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{2x^2 + 7} - 5}{x + 3}$;

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3x+7}-\sqrt{7}}{\sqrt{5x+3}-\sqrt{3}}.$$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-5}\right)^{-x+4}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+8}\right)^{4-2x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2x+4}\right)^{\sqrt{x}}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x+3}{7x-4}\right)^{\frac{1}{x}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4x-1}{x^2-2x+8}\right)^{-3x+4}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{7x+1}{3x-2}\right)^{2-\sqrt{x}}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}10x}{\sin 3x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}3x}{\cos 2x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2}$;

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin 4x}{x^2}$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{2x^2}$.

III. Индивидуальные задания для самостоятельной работы

Найти указанные пределы.

I

1. а) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x^2-1}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to -8}\frac{2x^2+15x-8}{3x^2+25x+8}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{2x^2-x}-\frac{1}{x^2-x}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{4x^2+3x+15}{x^2-6x-27}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^2-x}-\frac{3}{x^3-1}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{6x^2-16x-6}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^5-x+2}{2x^5+3x^2+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{2x^2-x-6}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x^2-x+1}{x^3+3x^2+4x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3-\sqrt{x^2+9}}{x^2}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x^2+x-1}{x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x-3}-1}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{7}}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{2x^2-12x+10}{2x^2-11x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^8+5x-1}{3x^2+2x}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x+5}-3}{\sqrt{x}-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-7x+5-\sqrt{9x^2-7x}}{2x+1}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{7x^2-9x-6}}{x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{-4x^2-3x+1}{8x^3+2x^2-10x-4}$.

11. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{-3x^2-3x}{-x^2+3x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x-2+\sqrt[3]{4x^3+2x^2+2x-2}}{5x+1}$.

12. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(9x-2-\sqrt{81x^2}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{4x^2-3x-3}-2}{x+1}$.

13. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(8x+8-\sqrt{64x^2-8}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4+3x^2-1}{7x^8+4}$.

14. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x-3}-\sqrt{x+2}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{6}{x^2-9}\right)$.

15. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$.

16. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n^2+5)(n-1)!}{(n+1)!}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x^8+2x-10}-3x^2}{5x^2-1-\sqrt[3]{27x^6+x^5-15x}}$.

17. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^4-3x^2+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{x}+7x^3-2x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3^x+2}{3^{x+1}-1}$.

18. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)x!}{(x+1)!}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-14x+12}{x^2-6x+5}$.

19. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)!-x!}{(x+1)!}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x+5}-3}{\sqrt{x}-2}$.

20. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2-9}-2x}{2-\sqrt[3]{x^3+5}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{x^2+4}}{3x^2}$.

II

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\ln(2x-1)-\ln(2x-3)\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{3x\sin x}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x+\sin x}{2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3+x}{x}}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot \text{tg}x$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{1+2x}\right)^{-5x}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{-3x+6}{\sin(x-2)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{6}{x}+2}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+3}\right)^{3x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3+x}{x}}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+2\cos x)^{\frac{3}{\cos x}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x=3}{x+4}\right)^{-2x}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[2x(\ln(x+3)-\ln(x-3))\right]$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{tg}x-\sin x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{4x^2-1}{3x^2-1}\right)^{\frac{3}{x^2}}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(5-x^2)-\ln 5}{2x^2}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{3-2x^2}{3+3x^2}\right)^{-\frac{4}{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{7x}{\sin x+\sin 7x}$.

III. Найти пределы, используя эквивалентные бесконечно малые функции:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{arctg}2x}{8x}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{10x}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{\sin 2x}$

4. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\text{tg}(x+2)}{x^2-4}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x}{\text{tg}4x}$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\text{arctg}^2 2x}$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{arctg}3x}{4x}$

13. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\arcsin 2x}$

14. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin^2 x}{3x\sin x}$

15. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{\text{arctg}3x}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{arctg}5x}{\text{tg}2x}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\ln(1+2x)}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{\text{tg}2x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 8x}{\text{tg}4x}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{arctg}6x}{2x^2-3x}$

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 6x}{2x}$

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x+\sin x}{\arcsin x}$

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 2x}{x\arcsin x}$

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 6x}{x^2-x}$

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2-2x}{\text{arctg}8x}$.

Список использованной литературы

1. Высшая математика для экономистов : учеб. для вузов / Н. Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин [и др.]; под ред. Н.Ш.Кремера. - 3-е изд. - М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2008. – 479 с.
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: [в 2 ч.] . Ч. 1/Дмитрий Письменный. – 7-е изд.. – М.: Айрис-пресс, 2007. – 288 с.: ил.