

2.8. Иррациональные уравнения

Уравнения, которые содержат неизвестные под знаком радикала, называются иррациональными.

Пример. $\sqrt{x+1} + 2x = 0$ – это иррациональное уравнение, так как под знаком радикала стоит неизвестное x .

$x + 1 + x\sqrt{5} = 1$ – это не иррациональное уравнение, так как под знаком радикала стоит число.

При решении иррациональных уравнений необходимо находить область допустимых значений или выполнять проверку корней подстановкой.

Решая иррациональные уравнения, следует помнить, во-первых, что $\sqrt[n]{x^{2n}} = |x|$, где $n \in \mathbb{N}$, во-вторых, что если $\sqrt[n]{x} = a$, то $x \geq 0$, $a \geq 0$, $x = a^{2n}$.

Основные методы решения иррациональных уравнений – это возведение в степень и введение новой переменной.

Пример.

Решить уравнение $\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} = 3$.

Перенесём $\sqrt{x+2}$ в правую часть уравнения. Получим $\sqrt{3-x} = 3 - \sqrt{x+2}$. Возведём обе части уравнения в квадрат. $(\sqrt{3-x})^2 = (3 - \sqrt{x+2})^2 \Rightarrow 3 - x = 9 - 6\sqrt{x+2} + 2 + x$. Приведём подобные. $2x + 8 = 6\sqrt{x+2}$. Разделим обе части уравнения на 2 и ещё раз возведём в квадрат. $x + 4 = 3\sqrt{x+2} \Rightarrow x^2 + 8x + 16 = 9(x+2) \Rightarrow x^2 + 8x - 9x + 16 - 18 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow D = 1 + 8 = 9 \Rightarrow$ корни $x_1 = -1$ и $x_2 = 2$.

Выполним проверку для $x_1 = -1$. Подставим -1 в уравнение $\sqrt{-1+2} + \sqrt{3+1} = 3 \Leftrightarrow 1 + 2 = 3 \Leftrightarrow 3 = 3$. Получили верное равенство, значит, $x_1 = -1$ – корень уравнения. Аналогично проводим проверку для $x_2 = 2$, видим, что 2 также является корнем. Решение уравнения: $\{-1; 2\}$.