

2.6. Уравнения, содержащие модуль

При решении уравнений, которые содержат модуль, используют определение модуля и его свойства.

Модулем неотрицательного действительного числа x называется само это число $|x| = x$.

Модулем отрицательного действительного числа x называется противоположное число $|x| = -x$.

$$\text{То есть } |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Свойства модуля

- 1) $|-x| = x$
- 2) $|x|^2 = x^2$
- 3) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- 4) $\frac{|x|}{|y|} = \left| \frac{x}{y} \right|$
- 5) $|x + y| \leq |x| + |y|$
- 6) $|x - y| \geq |x| - |y|$

Примеры.

1. Решим уравнение $|x| = 12$.

Используем определение модуля $|x| = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 12; \\ x_2 = -12. \end{cases}$

Ответ: $\{12; -12\}$.

2. $|x| = -12$. Это уравнение не имеет корней, так как при любом значении

x , $|x| \geq 0$, но -12 – это отрицательное число.

Ответ: $\{\emptyset\}$.

3. Решим уравнение $|x - 4| + |x - 1| = 9$.

По определению модуля имеем:

$$|x - 4| = \begin{cases} x - 4, & x - 4 \geq 0; \\ -(x - 4), & x - 4 < 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4, & x \geq 4; \\ 4 - x, & x < 4. \end{cases}$$

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1, & x - 1 \geq 0; \\ -(x - 1), & x - 1 < 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1, & x \geq 1; \\ 1 - x, & x < 1. \end{cases}$$

Рассмотрим три интервала.

- 1) $x < 1$

$4 - x + 1 - x = 9 \Rightarrow -2x = 4 \Rightarrow x = -2 \in (-\infty; 1) \Rightarrow x = -2$ – корень уравнения.

$$2) 1 \leq x < 4$$

$4 - x + x - 1 = 9 \Rightarrow 3 = 9$. Получили неверное равенство, поэтому на интервале $1 \leq x < 4$ уравнение не имеет корней.

$$3) x \geq 4$$

$x - 4 + x - 1 = 9 \Rightarrow 2x = 11 \Rightarrow x = 5,5 \in (4; +\infty) \Rightarrow x = 5,5$ – корень уравнения.

Ответ: $\{-2; 5,5\}$.