

### 1.3. Рациональные выражения

Рациональные выражения включают в себя целые рациональные выражения и дробно-рациональные выражения.

Целые рациональные выражения содержат числа, переменные и их целые, неотрицательные степени, а также действия сложения, вычитания, умножения и деления на число, не равное нулю. Например,  $x^2$ ;  $3ab^2 + b$ ;  $(5n - 8m)(4n - 3)$ ;  $x^2 - \frac{5xy}{2} + 2y^3$  – это целые рациональные выражения.

Одночлены и многочлены являются целыми рациональными выражениями.

Дробно-рациональные выражения, кроме действий сложения, вычитания и умножения ещё содержат действие деления на выражение с переменными. Например,  $\frac{x-7}{6x^2}$ ;  $\frac{5}{a}$ ;  $\frac{m+n^3}{4m+1} - 5n$  – это дробно-рациональные выражения.

Дроби, у которых числитель и знаменатель являются многочленами или одночленами называют рациональными, алгебраическими дробями.

Целое рациональное выражение имеет смысл при любых значениях переменных, дробно-рациональное выражение имеет смысл, только при тех значениях переменных, при которых знаменатели дробей, входящих в это выражение, не равны нулю.

Множество всех значений переменных, при которых выражения имеют смысл, называют областью допустимых значений (ОДЗ) выражения.

Примеры.

1. Найти область допустимых значений выражения  $7x^5 - 8xy^2 + y^3$ . Это целое рациональное выражение, содержащее переменные  $x$  и  $y$ . В выражении  $7x^5 - 8xy^2 + y^3$  переменные могут принимать любые действительные значения, чтобы оно имело смысл. Поэтому ОДЗ:  $x \in \mathbb{R}$  и  $y \in \mathbb{R}$ .
2. Найти ОДЗ  $\frac{m+n^3}{4m+1} - \frac{m}{n^2} + 5n$ . Видим, что выражение дробно-рациональное. Знаменатели дробей содержат переменные. Выражение  $\frac{m+n^3}{4m+1} - \frac{m}{n^2} + 5n$  имеет смысл, если  $4m + 1 \neq 0$  и  $n^2 \neq 0$ , то есть  $m \neq -\frac{1}{4}$  и  $n \neq 0$ . Поэтому ОДЗ:  $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{4}\right\}$  и  $n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Целые рациональные и дробно-рациональные выражения можно преобразовывать и упрощать. Для этого используют правила

выполнения действий, правила раскрытия скобок, свойства степеней, приведение дробей к наименьшему общему знаменателю (НОЗ), формулы сокращённого умножения и другие законы математики.

Формулы сокращённого умножения.

1. Разность квадратов  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
2. Квадрат разности  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. Квадрат суммы  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
4. Сумма кубов  $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
5. Разность кубов  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
6. Куб суммы  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
7. Куб разности  $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
8. Квадрат трёхчлена  $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

Примеры.

1.  $\left(\frac{x}{x+1} + 1\right) \cdot \frac{1-x^2}{4x^2-1}$ . Выполним действия и упростим. В скобках приведём выражение к НОЗ. За скобками у дроби разложим числитель и знаменатель на множители, используя формулу «Разность квадратов».

$$\left(\frac{x}{x+1} + 1\right) \cdot \frac{1-x^2}{4x^2-1} = \left(\frac{x+x+1}{x+1}\right) \cdot \frac{(1-x)(1+x)}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{(2x+1)(1-x)(1+x)}{(x+1)(2x-1)(2x+1)} = \frac{1-x}{2x-1}.$$

2. Выполнить действия и упростить  $\left(x - \frac{x^2+y^2}{x+y}\right) \cdot \left(\frac{1}{y} + \frac{2}{x-y}\right)$ .

Раскроем скобки, выполнив действия приведения дробей к наименьшему общему знаменателю.

$$\left(x - \frac{x^2+y^2}{x+y}\right) \cdot \left(\frac{1}{y} + \frac{2}{x-y}\right) = \frac{x^2+xy-x^2-y}{x+y} \cdot \frac{x-y+2y}{y(x-y)}.$$

Приведём подобные члены в числителе дробей и сократим.

$$\left(x - \frac{x^2+y^2}{x+y}\right) \cdot \left(\frac{1}{y} + \frac{2}{x-y}\right) = \frac{x^2+xy-x^2-y}{x+y} \cdot \frac{x-y+2y}{y(x-y)} = \frac{y(x-y)(x+y)}{(x+y)y(x-y)} = 1.$$